Treillis des diviseurs d'un nombre

Lorsque l'on prend un ensemble d'objets, avec en plus une relation d'ordre entre eux (relation binaire car elle joue dans la comparaison de deux objets), on dit que l'on a un ensemble partiellement ordonné. Par analogie avec le $\leq$ qui permet de comparer deux nombres, cette relation d'ordre est notée $\leq$.

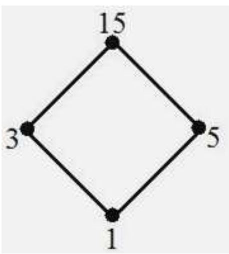
Une relation d'ordre est définie par trois propriétés :

- pour tout x de l'ensemble, on a $x \leq x$ (réflexivité)
- si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$ (antisymétrie)
- si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (associativité)

Dans le cas évident où la relation d'ordre est le $\leq$ habituel, signifiant « inférieur ou égal » et jouant par exemple sur les nombres entiers naturels de $\boldsymbol{N}$, tous les nombres sont comparables entre eux (soit l'on a $x \leq y$, soit $y \leq x$), on a un ensemble totalement ordonné. Mais il existe d'autres cas où les éléments ne sont pas tous comparables entre eux deux à deux par la relation d'ordre, et l'on parle d'ensemble partiellement ordonné.

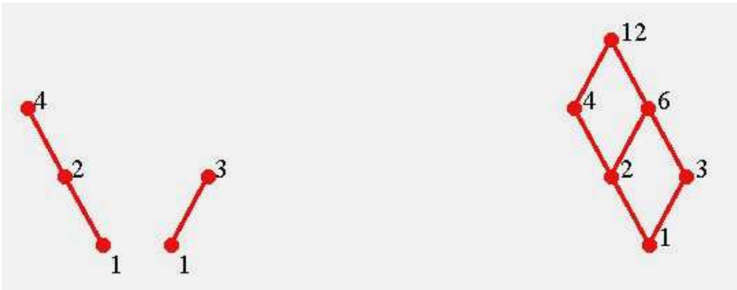
On est justement dans ce cas qui va nous concerner : l'ensemble est celui des diviseurs d'un nombre entier positif n, et la relation d'ordre est la divisibilité : on dit que $x \leq y$ lorsque x divise y (ou bien : y est divisible par x). Par exemple l'ensemble des diviseurs de 15 est l'ensemble fini {1, 3, 5, 15}, et l'on a une relation d'ordre partiel : 5 $\leq$ 15 (5 divise 15) mais 3 et 5 ne sont pas comparables.

Plus précisément, pour un tel ensemble fini, on dit que y couvre x lorsque $x < y$ et qu'aucun élément z ne s'intercale entre x et y, dans le sens où $x < z < y$. Dans l'exemple des diviseurs de 14, 3 couvre 1, 5 couvre 1, 15 couvre 3 et couvre aussi 5, mais 15 ne couvre pas 1 (puisque $1 < 3 < 15$). Ces relations de couverture caractérisent l'ordonnancement de l'ensemble. Cela permet de définir un graphe dont les sommets sont les éléments de l'ensemble et dont les arêtes correspondent à chaque relation de couverture. On fait en sorte que si y couvre x, on place y à un étage au-dessus de x. On obtient alors ce que l'on appelle le diagramme de Hasse de l'ensemble partiellement ordonné. Par exemple pour les diviseurs de 15 :

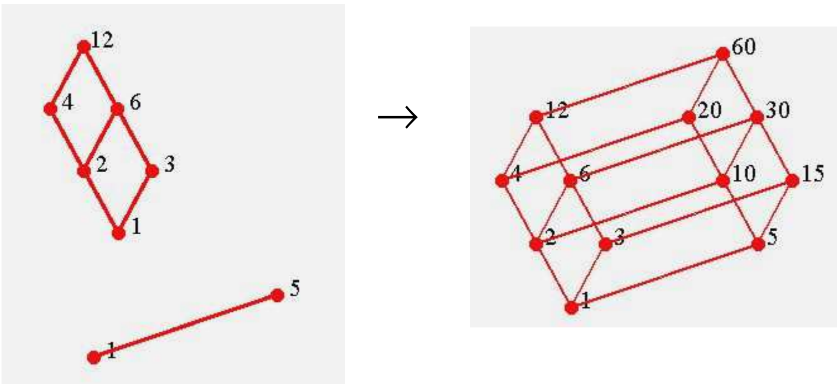


Un tel ensemble de diviseurs d'un nombre n est tel que si l'on prend deux diviseurs x et y, quels qu'ils soient, ils possèdent une borne supérieure, en l'occurrence n, car $x \leq n$ et $y \leq n$, et aussi une borne inférieure 1. L'ensemble partiellement ordonné est alors appelé treillis (*lattice* en anglais).

Comment construire le treillis des diviseurs d’un nombre ? Cela se fait de proche en proche. On commence par décomposer le nombre en produit de puissances de nombres premiers. On commence par prendre le treillis associé à la première puissance d’un nombre premier, ce qui donne une chaîne de points alignés, et l’on fait de même avec la deuxième puissance, ce qui donne une autre chaîne. On fusionne ensuite ces deux chaînes. Pour cela il suffit, à partir de la première chaîne, de la dupliquer par le biais de la seconde chaîne que l’on accroche à chaque sommet de la première. Comme on le voit sur l’exemple suivant, avec 12 = 4 . 3.



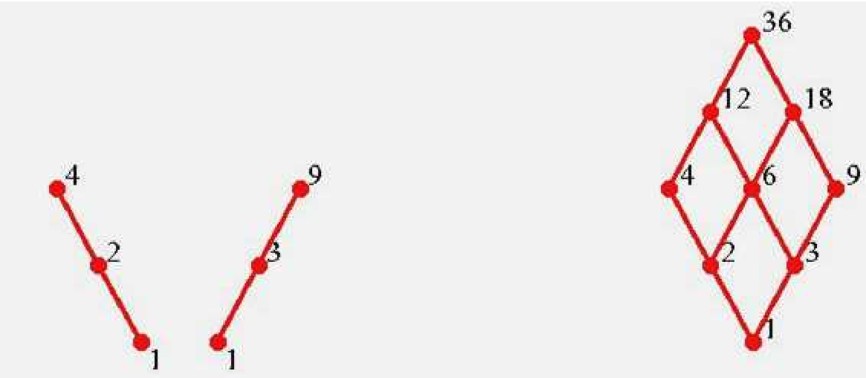
Et l’on répète cela avec chaque nouvelle puissance de nombre premiers que l’on fusionne avec ce qui a été obtenu précédemment. Comme pour 60 = 12 . 5.



Le programme en découle. On trouvera sur la page suivante un exemple avec quatre facteurs.

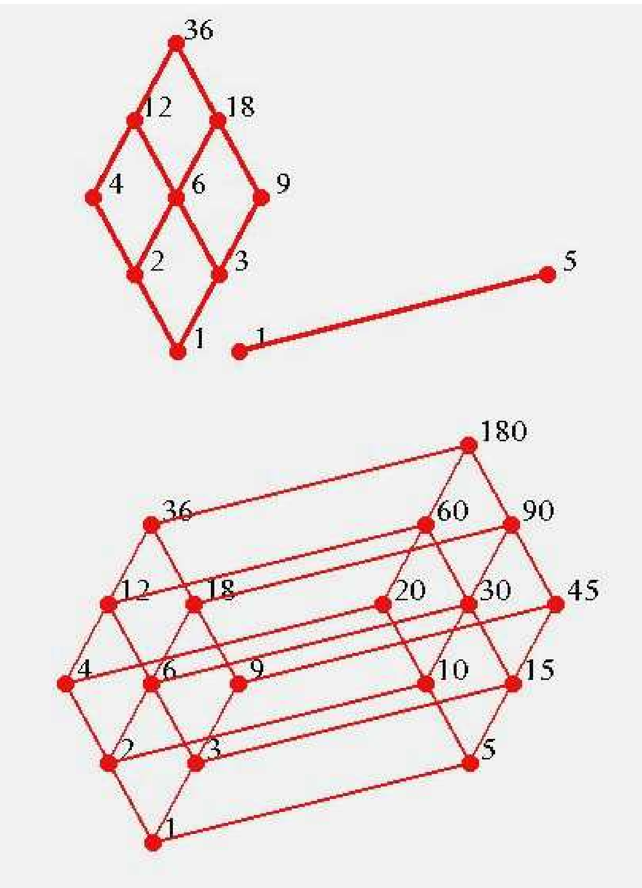
Nombre = 1260 = 4 . 9 . 5 . 7

treillis pour les deux premiers :   36 = 4 . 9



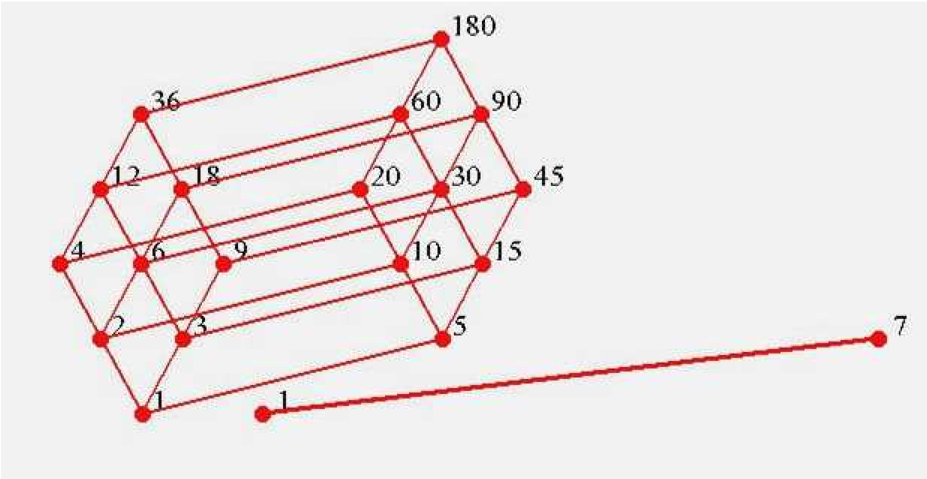
trois facteurs = 180 = 4 . 9 . 5

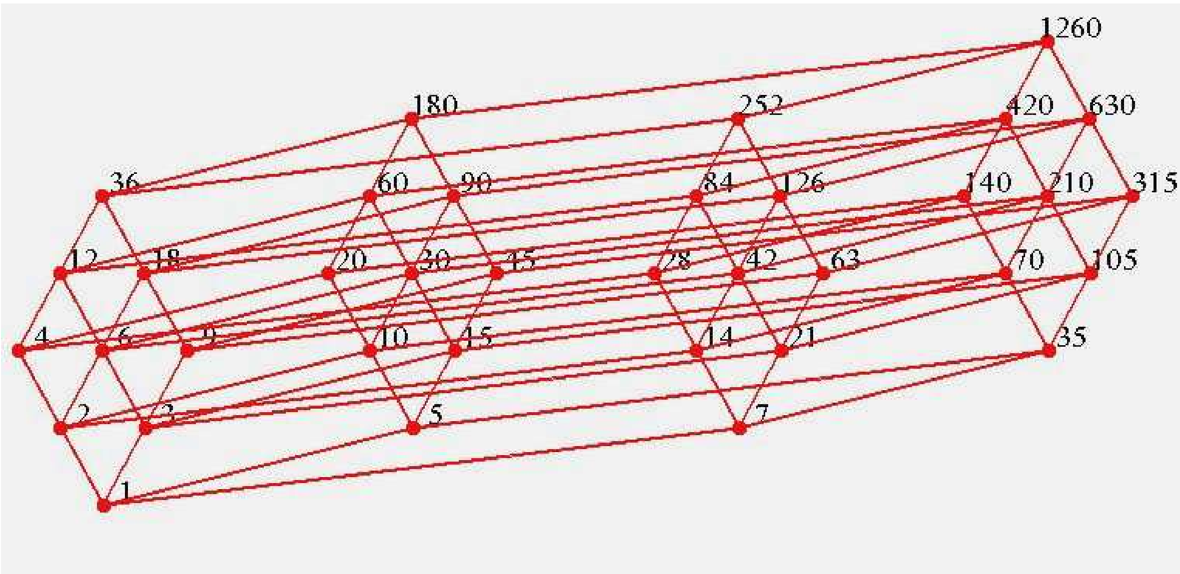
treillis avec le troisieme facteur :   36 . 5



Nombre = 1260 = 4 . 9 . 5 . 7

treillis avec le quatrieme facteur : 180 . 7





treillis final des diviseurs de 1260

Référence bibliographique, pour aller plus loin sur les ensembles partiellement ordonnés :

- R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, volume 1, chapitre 3, Cambridge University Press, 1999.