Tirages successifs alternés avec remise et sans remise

Une urne contient N boules, dont l'une est noire et les autres blanches. On effectue une succession de tirages. Le premier se fait sans remise, ainsi que tous les tirages impairs, le deuxième et tous ceux qui sont pairs se font avec remise. Il y a ainsi alternance de tirages sans et avec remise. On fait cela jusqu'à ce que l'urne soit vidée.

1) Combien y a-t-il de tirages ?

Le nombre de boules avant chaque tirage est :
N, $N - 1$, $N - 1$, $N - 2$, $N - 2$, …, 1, 1, d'où $2(N - 1) + 1 = 2N - 1$ tirages.

2) On définit des variables aléatoires X_k qui valent 1 si la boule noire sort au k ème tirage, et 0 sinon. Calculer la probabilité $p(X_k = 1)$ pour chaque valeur de k.

Comme on l'a vu, k va de 1 à $2N - 1$.
$X_1 = 1$ signifie que la première boule tirée est la noire, d'où $p(X_1) = 1 / N$.
$X_2 = 1$ signifie que la deuxième boule tirée est la noire, ce qui impose que la première boule tirée sans remise est une blanche, d'où

$$p(X_2) = p(BN) = \frac{N-1}{N}\frac{1}{N} = \frac{1}{N}.$$

Plus généralement, pour les tirages pairs, l'évènement $X_{2i} = 1$ signifie que la boule noire sort au $2i$ ème tirage, ce qui impose que la boule noire soit toujours présente, à savoir qu'elle n'ait pas disparu lors des tirages impairs précédents sans remise. Remarquons que juste avant le $2i$ ème tirage, il y a $N - i$ boules dans l'urne, et que juste avant le $2i - 1$ ème tirage, il y en avait une de plus.

$$\begin{aligned} p(X_{2i} = 1) &= p(X_1 = 0 \text{ et } X_3 = 0 \dots \text{ et } X_{2i-1} = 0 \text{ et } X_{2i} = 1) \\ &= \frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\cdots\frac{N-i}{N-i+1}\frac{1}{N-i} \\ &= \frac{1}{N} \text{ après simplifications en chaîne.} \end{aligned}$$

Passons aux évènements $X_{2i+1}=1$ correspondant aux tirages impairs. Comme il y a eu remise lors du $2i$ ème tirage, il y a autant de chances d'avoir la boule noire au $2i + 1$ ème tirage qu'au $2i$ ème tirage :

$$p(X_{2i+1} = 1) = \frac{1}{N}$$

Finalement chaque variable X_k suit la même loi de Bernoulli, de paramètre $1/N$.

3) On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où sort la boule noire au cours d'une expérience. Indiquer quels sont les évènements correspondant à $X = 1$, et calculer $p(X = 1)$.

Lorsque la boule noire sort une seule fois, cela signifie qu'elle sort pour la première fois au cours d'un tirage impair sans remise, et qu'auparavant il n'y a que des boules blanches qui sont sorties. Cela donne les évènements :
N …, ou **B** B***N*** …, ou **B** B**B** B***N*** …, ou **B** B*B* B**B** B***N*** …, etc., jusqu'à un mot de longueur $2N - 1$, les points de suspension indiquant qu'après le tirage de la boule noire, il n'y a que des boules blanches tirées, ce qui correspond à des évènements sûrs de probabilité 1.

$p(\boldsymbol{N}\ \ldots) = \dfrac{1}{N}$

$p(\mathbf{B}\ \mathrm{B}\boldsymbol{N}\ \ldots) = \dfrac{N-1}{N}\dfrac{N-2}{N-1}\dfrac{1}{N-1} = \dfrac{N-2}{N(N-1)}$

$p(\mathbf{B}\ \mathrm{B}\mathbf{B}\ \mathrm{B}\boldsymbol{N}\ \ldots) = \dfrac{N-1}{N}\dfrac{N-2}{N-1}\dfrac{N-2}{N-1}\dfrac{N-3}{N-2}\dfrac{1}{N-2} = \dfrac{N-3}{N(N-1)}$

…

avec comme dernier évènement la boule noire qui sort au dernier tirage (c'est-à-dire le tirage $2N-1$) :

$p(\mathbf{B}\ \ \mathrm{B}\mathbf{B}\ \mathrm{B}\mathbf{B}\ \mathrm{B}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathrm{B}\boldsymbol{N}) = \dfrac{N-(N-1)}{N(N-1)} = \dfrac{1}{N(N-1)}$.

La probabilité $p(X = 1)$ s'obtient par addition des probabilités précédentes:

$p(X = 1) = \dfrac{(N-1)+(N-2)+...+1}{N(N-1)} = \dfrac{N(N-1)}{2N(N-1)} = \dfrac{1}{2}$

4) Calculer $p(X = N)$.

Il s'agit de la plus grande valeur possible de X. Cela signifie que la boule noire est sortie à tous les tirages avec remise (soit $N-1$ fois) et qu'elle sort au dernier tirage sans remise.

$p(X = 1) = p(\mathbf{B}\ N\mathbf{B}\ \ N\mathbf{B}\ \ N\mathbf{B}\ \ldots\ N\mathbf{B}\ \ N\boldsymbol{N})$

$= \dfrac{N-1}{N}\ \dfrac{1}{N-1}\dfrac{N-2}{N-1}\ \dfrac{1}{N-2}\dfrac{N-3}{N-2} \ldots \dfrac{1}{3}\dfrac{2}{3}\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{1}\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{N!}$

5) Traitons précisément le cas où N = 5. En appelant comme auparavant X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où la boule noire sort, indiquer les évènements obtenus pour chaque valeur de X, avec leurs probabilités respectives. En déduire les probabilités $p(X = k)$.

Nous donnons les évènements obtenus, avec leur probabilité (les points de suspension signifient des successions de *B***B** jusqu'à la fin, de probabilité 1).

- $X = 1$

N … 1/5
B B**N** … 4/5 3/16
B B**B** B**N** … 4/5 9/16 2/9
B B**B** B**B** B**N** B**B** 4/5 9/16 4/9 1/4

L'addition des probabilités de ces quatre évènements donne $p(X = 1) = 0{,}5$.

- $X = 2$

B N**N** … 4/5 1/16
B B**B** N**N** … 4/5 9/16 1/9
B B**B** B**B** N**N** … 4/5 9/16 4/9 1/4
B B**B** B**B** B**B** N**N** 4/5 9/16 4/9 1/4
B N**B** B**N** … 4/5 3/16 2/9
B N**B** B**B** B**N** … 4/5 3/16 4/9 1/4

B B**B** N**B** B**N** …   4/5 9/16 2/9 1/4

$p(X = 2) = 0{,}275$.

- $X = 3$

B N**B** N**N** …
B N**B** B**B** N**N** …
B B**B** N**B** N**N** …
B N**B** B**B** B**B** N**N**
B B**B** N**B** B**B** N**N**
B B**B** B**B** B**B** N**N**
B N**B** N**B** B**N** …

$p(X = 3) = 0{,}158$.

- $X = 4$

B N**B** N**B** N**N** …   4/5 3/16 2/9 1/4
B N**B** N**B** B**B** N**N**   4/5 3/16 2/9 1/4
B N**B** B**B** N**B** N**N**   4/5 3/16 4/9 1/4
B B**B** N**B** N**B** N**N**   4/5 9/16 2/9 1/4

$p(X = 4) = 0{,}058$.

- $X = 5$

B N**B** N**B** N**B** N**N**   4/5 3/16 2/9 1/4

$p(X = 5) = 0{,}008$

6) Toujours avec le nombre de boules $N = 5$, faire le programme qui permet de retrouver expérimentalement les probabilités $p(X = k)$.

On se donne le nombre de boules, ici $N = 5$. Pour traiter une expérience, avec ses $2N - 1$ tirages, notés de 1 à $2N - 1$, on commence par traiter le tirage 1, sans remise, puis à partir du tirage 2, on les traite deux par deux, le premier avec remise et le deuxième sans remise. On gère une variable *NN* (nombre de boules noires, qui vaut 1 ou 0) et *NB* (nombre de boules blanches, *N*-1 au début), ainsi qu'une variable *nboules* qui est le nombre de boules avant chaque tirage. Lors d'un tirage, on tire un numéro au hasard, le numéro 0 correspondant à la boule blanche. Ce numéro est donc entre 0 et *nboules* – 1 si la boule noire est là *NN* = 1), et entre 1 et *nboules* – 1 si la boule noire n'est plus présente.

Ayant ainsi traité une expérience, il reste à en faire un grand nombre *NBE* (dans une boucle d'*essais*). Chaque fois que la boule noire sort, le nombre de fois *nbfN* augmente de 1 (il a été mis à 0 au début de chaque expérience). A la fin de chaque expérience avec son *nbfN* associé, le tableau des fréquences de sortie de la boule noire est actualisé (*freq*[*nbfN*]++). Après les *NBE* expériences, il suffit de diviser les fréquences de sortie de la boule noire (entre 1 et 5) par le nombre d'expériences pour avoir les probabilités cherchées. Voici la partie importante du programme.

```
srand(time(NULL));
for(i=0;i<2*N;i++) freq[i]=0;  /* tableau des fréquences de sortie de la noire */
for(essai=0; essai<NBE; essai++)   /*  répétition de NBE expériences */
 { NN=1; NB=N-1;  nbfN=0;
```

```
 /* le premier tirage, parmi N boules dont une boule noire */
  numero=random(N);  if (numero==0)   { nbfN=1; NN--;}  else    NB--;
  nboules=NB+NN;
  for(tirage=2;tirage<=2*N-1;tirage+=2)
    {  /* tirage avec remise */
       if (NN==1) { numero=random(nboules);  if (numero==0)  nbfN++;  }
        /*  tirage sans remise */
       if (NN==1) { numero=random(nboules);
                      if (numero==0)  {nbfN++; NN--; }    else   NB--;
                    }
       else { numero=1+random(nboules-1);  NB--;  }
       nboules--;
     }
  freq[nbfN]++;   /* construction par cumul des fréquences (nbfN entre 1 et N) */
 }
/* affichage des probabilités p(X = i) */
for(i=1; i<=N; i++) printf("%3.3f ",(float)freq[i]/(float) NBE);
```