Théorème de Napoléon

Le contexte est le suivant : on part d'un triangle quelconque, de sommets notés 0, 2, 4 et on lui accole trois triangles équilatéraux dont les centres sont notés 1, 3, 5. Le « théorème de Napoléon » dit alors que ces trois centres forment un triangle équilatéral.

On constate que les triangles 012, 234, 450 sont isocèles avec un angle de 120°. Le problème initial peut être reformulé ainsi : on part d'un triangle quelconque 024 et on lui accole trois triangles isocèles 012, 234, 450 avec chacun un angle de 120°. Et l'on démontre que le triangle 135 est équilatéral (*figure 1*). C'est cette méthode que nous allons utiliser pour démontrer le « théorème de Napoléon », sous forme de l'exercice qui suit.

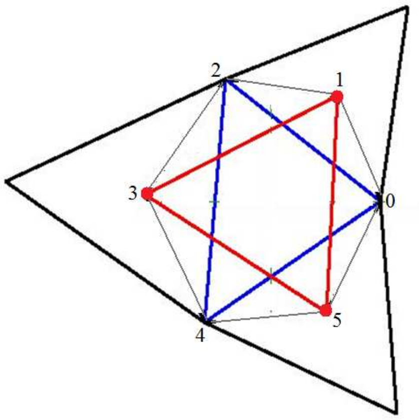


Figure 1 : Triangle quelconque initial 024 (*en bleu*) entouré des trois triangles équilatéraux, ainsi que des trois triangles isocèles 012, 234, 450 avec un angle de 120°, ce qui donne un triangle équilatéral 135 (*en rouge*).

Considérons un triangle ABC quelconque, de centre de gravité O. Appelons z_0, z_2, z_4 les affixes de ABC dans le plan complexe avec O pour origine, les points ABC étant numérotés 0 2 4. Sans perte de généralité, on peut supposer que A est sur l'axe des x, avec $\overline{OA} = 1$, d'où $z_0 = 1$. On se donne B d'affixe z_2 quelconque dans le plan.

1) Montrer qu'il existe un point C unique tel que le triangle ABC ait son centre de gravité en O.

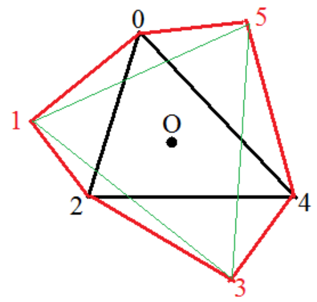
Dans ce contexte, le triangle quelconque ABC dépend uniquement du paramètre z_2, avec ses sommets d'affixe 1, z_2 et $z_4 = -1 - z_2$.

Le centre de gravité *O* est tel que l'on a l'égalité vectorielle **OA** + **OB** + **OC** = **0**, $z_0 + z_2 + z_4 = 0$, d'où $z_4 = -1 - z_2$. Le point *C* est unique.

2) On accole trois triangles semblables dans le sens direct sur les trois côtés, soit 012, 234, 450.Ils ont tous la même forme, mais cette forme est quelconque. Plus précisément, cela signifie qu'ils ont les mêmes angles. Cela signifie aussi qu'une similitude directe de centre 0 fait passer de [0 2] à [0 1], une autre de centre 2 fait passer de [2 4] à [2 3] et une troisième de centre 4 de [4 0] à [4 5], et que ces trois similitudes ont même rapport k et même angle θ, avec θ tel que $-\pi < \theta < 0$.[1]

[1] Le fait de prendre θ négatif exprime que les triangles accolés sont extérieurs au triangle initial 024. Le théorème serait aussi valable avec des triangles accolés intérieurs, mais dans ce cas la figure obtenue est moins intéressante pour ce qui nous concerne ici.

On pose $a = k\, e^{i\theta}$. Montrer que le triangle 135 a aussi pour centre de gravité O, et donner z_1, z_3, z_5 en fonction de z_2.



Posons $a = k\, e^{i\theta}$. On a alors :

$z_1 - z_0 = a\,(z_2 - z_0)$
$z_3 - z_2 = a\,(z_4 - z_2)$
$z_5 - z_4 = a\,(z_0 - z_4)$

Par addition membre à membre, il reste seulement $z_1 + z_3 + z_5 = 0$, ce qui signifie que O est aussi le centre de gravité du triangle 135.

Plus précisément :

$z_1 = 1 + a\,(z_2 - 1) = a\, z_2 + 1 - a$
$z_3 = z_2 + a\,(-1 - z_2 - z_2) = (1 - 2a)\, z_2 - a$
$z_5 = z_4 + a\,(1 - z_4) = (1 - a)\, z_4 + a = (a - 1)\, z_2 + 2a - 1$

3) Calculer $z_3 - z_1$ et $z_5 - z_1$

$z_3 - z_1 = (1 - 3a)\, z_2 - 1$
$z_5 - z_1 = - z_2 + 3a - 2$

4) Montrer qu'il existe une valeur unique de a (nombre qui définit le rapport et l'angle des similitudes), telle que pour un triangle 024 quel qu'il soit, le triangle 135 est toujours équilatéral.

Le triangle 135 sera équilatéral de sens direct si et seulement si $z_5 - z_1 = -j^2\,(z_3 - z_1)$. En effet, $-j^2$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi\,/\,3$. L'égalité précédente signifie que les vecteurs 15 et 13 ont même longueur et font un angle de $\pi\,/\,3$, ce qui caractérise un triangle équilatéral. Grâce au 3°, l'égalité devient :

$- z_2 + 3a - 2 = -j^2\,((1 - 3a)z_2 - 1)$
$(-j^2 + 3\,j^2\,a + 1)\, z_2 = 3\,a - 2 - j^2$

Imposons que $3\,a - 2 - j^2 = 0$ et aussi $-j^2 + 3\,j^2\,a + 1 = 0$. Si une valeur de a vérifie ces deux équations, cela prouvera que l'on a un triangle équilatéral quel que soit z_2, c'est-à-dire quel que soit le triangle initial 024.

L'équation $3\,a - 2 - j^2 = 0$ donne $a = (j^2 + 2)\,/\,3$. On constate alors que pour cette valeur de a la deuxième équation est aussi vérifiée, en effet

$$-j^2 + 3\,j^2\,a + 1 = -j^2 + j^2\,(j^2 + 2) + 1 = -j^2 + j^4 + 2\,j^2 + 1 = j^2 + j + 1 = 0$$

La valeur de a s'écrit aussi $a = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$. Il a pour module $1/\sqrt{3}$ et pour argument $-\pi\,/6$. Finalement les triangles 012, 234, 450 sont isocèles et leurs côtés égaux font un angle de 120° (*figure 2*).

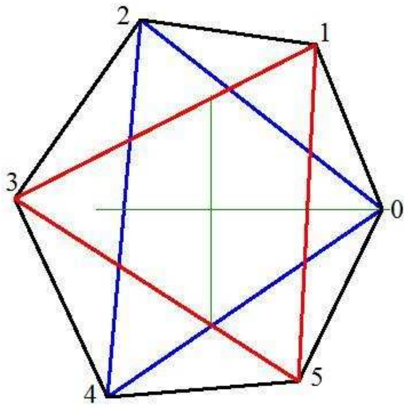


Figure 2 : Triangle initial quelconque 024 *en bleu*, triangles accolés isocèles avec un angle de 120° *en noir*, triangle équlatéral 135 *en rouge*.

*4) Lorsque l'on n'est pas dans le cas du 3°, montrer que pour chaque forme de triangle accolé comme 012, caractérisé par le rapport de similitude k = [01]/ [02] et l'angle orienté θ = (**01**, **02**), il existe un unique triangle initial 024 qui rend le triangle 135 équilatéral.*

Cela revient à déterminer la relation entre a et z_2 qui rend le triangle 135 équilatéral direct. Nous l'avons déjà vue au 3° :

$(-j^2 + 3\,j^2\,a + 1)\,z_2 = 3\,a - 2 - j^2$

$z_2 = \dfrac{3a - 2 - j^2}{-j^2 + 1 + 3a\,j^2}$ lorsque l'on n'est pas dans le cas où les triangles accolés sont isocèles avec un angle de 120° comme au 3°.

$z_2 = \dfrac{3aj - 2j - 1}{-1 + j + 3a}$ en multipliant en haut et en bas par j.

$= \dfrac{3a\,j - j - j - 1}{-1 + j + 3a} = \dfrac{3a\,j - j + j^2}{-1 + j + 3a} = \dfrac{j(3a - 1 + j)}{-1 + j + 3a}$

$= j$

Cela signifie que le triangle 024 est équilatéral, et seul ce triangle accepte des triangles accolés semblables mais quelconques qui rendent le triangle 135 équilatéral (*figure 3*).

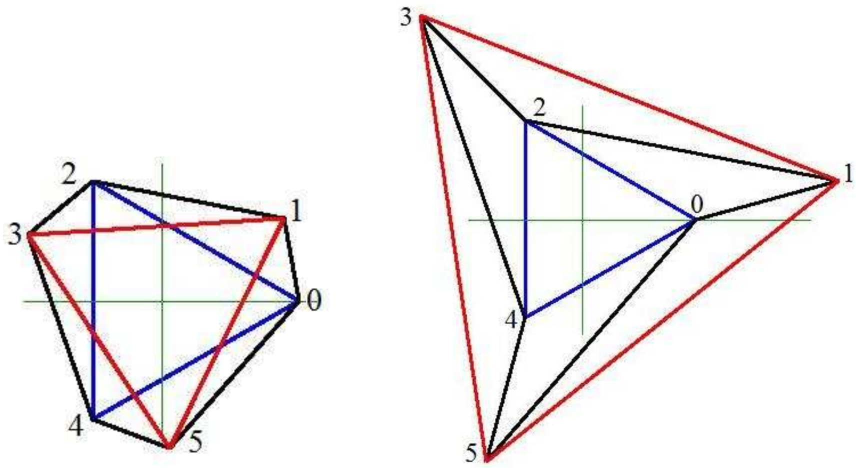


Figure 3 : Triangle initial 024 équilatéral, triangles accolés semblables quelconques 012, 234, 450, et triangle 135 équilatéral, dans deux cas de figure.

Conclusion :

- Seuls des triangles accolés isocèles et avec un angle de 120° donnent un triangle équilatéral 135 quel que soit le triangle initial 024.
- Avec des triangles accolés autres que les précédents, seul un triangle équilatéral initial 024 donne un triangle équilatéral 135.

Finalement, le théorème de Napoléon traite un cas qui est exceptionnel, celui du triangle quelconque qui doit avoir des triangles équilatéraux accolés sur ses côtés pour donner un triangle équilatéral ayant comme sommets les centres de ces triangles accolés.

Bibliographie

[RIG1991] J.F. Rigby, *Napoleon, Escher and Tesselations, Structural Topology*, 1991.