A propos d'une fonction f telle que $f^2(n) = 3n$

On s'intéresse à une fonction f de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$, strictement croissante, et vérifiant $f^2(n) = 3n$ pour tout n entier positif (soit $f(f(n)) = 3n$, ou encore $f^2 = 3\,Id$). Nous allons montrer qu'une telle fonction existe et est unique.

1) On doit avoir **$f(1) = 2$** et **$f(2) = 3$.**

- Si l'on avait $f(1) = 1$, on aurait aussi $f^2(1) = 1$ au lieu de 3.
- Si l'on avait $f(1) = 3$ on aurait aussi $f(f(1)) = f(3) = 3$, et la suite ne serait pas strictement croissante. De même si l'on prend $f(1) = k$ avec $k > 3$, on aurait $f(k) = 3$, la suite serait décroissante, ce qui contredit l'hypothèse.
- Il reste une seule possibilité : $f(1) = 2$, et par suite $f(2) = 3$, qui ne provoque pas de contradiction.

2) On doit avoir **$f(3^k) = 2 \,.\, 3^k$ et $f(2 \,.\, 3^k) = 3^{k+1}$** (k entier ≥ 0)

- Dès que la première formule est vraie, la seconde l'est aussi : à supposer que l'on ait $f(3^k) = 2 \,.\, 3^k$, on en déduit que $f^2(3^k) = f(2 \,.\, 3^k)$ et aussi $f^2(3^k) = 3 \,.\, 3^k = 3^{k+1}$, et la seconde formule s'ensuit.

- Pour montrer que $f(3^k) = 2 \,.\, 3^k$, faisons un raisonnement par récurrence :
- La formule est vraie pour $k = 0$, comme on l'a vu : $f(1) = 2$.
- Supposons la formule vraie jusqu'à un certain rang k, et montrons qu'elle reste vraie au rang $k + 1$: par hypothèse de récurrence : $f(3^k) = 2 \,.\, 3^k$ ce qui entraîne que $f(2 \,.\, 3^k) = 3^{k+1}$, d'où $f(f(2 \,.\, 3^k)) = f(3^{k+1})$, et aussi $f(f(2 \,.\, 3^k)) = 2 \,.\, 3^{k+1}$, la formule est vérifiée au rang $k + 1$.

3) Pour tout q entier compris entre 0 et 3^k, on doit avoir **$f(3^k + q) = 2 \,.\, 3^k + q$**, et **$f(2 \,.\, 3^k + q) = 3^{k+1} + 3q$**.

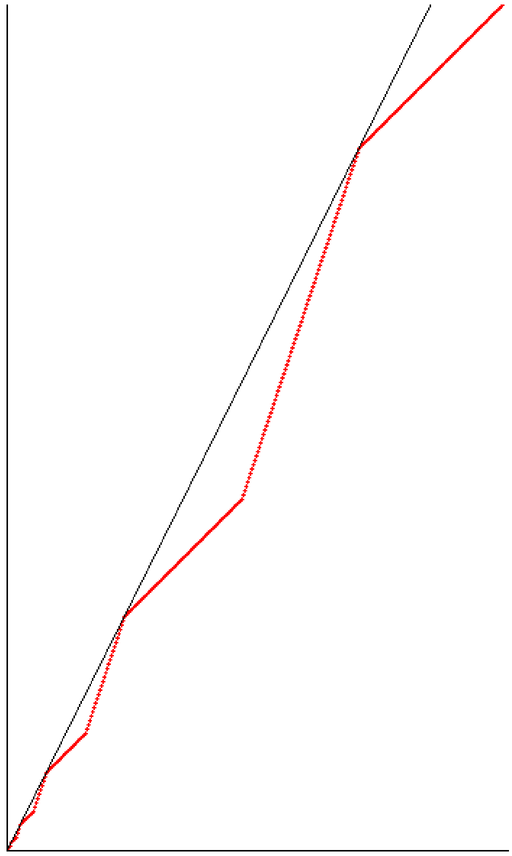
- Entre 0 et 3^k (y compris ces nombres), il y a exactement $k + 1$ nombres entiers. Entre $f(3^k) = 2 \,.\, 3^k$ et $f(2 \,.\, 3^k) = 3^{k+1}$, il y a aussi $k + 1$ nombres entiers. Comme la fonction f est strictement croissante, la seule possibilité est $f(3^k + q) = 2 \,.\, 3^k + q$.
- Entre $2 \,.\, 3^k$ et 3^{k+1}, il y a exactement $3^k + 1$ nombres entiers, et entre $f(2 \,.\, 3^k) = 3^{k+1}$ et $f(3^{k+1}) = 2 \,.\, 3^{k+1}$, il y en a $3^{k+1} + 1$. Avec $f(f(3^k + q)) = f(2 \,.\, 3^k + q)$ comme on vient de le voir, et aussi $f(f(3^k + q)) = 3^{k+1} + 3q$, on aboutit à $f(2 \,.\, 3^k + q) = 3^{k+1} + 3q$. (où $3q$ prend $3^k + 1$ valeurs).

Finalement les contraintes précédentes se réduisent à :
$f(3^k + q) = 2 \,.\, 3^k + q$, et **$f(2 \,.\, 3^k + q) = 3^{k+1} + 3q$**, avec $0 \leq q \leq 3^k$, et $k \geq 0$.

On obtient une fonction unique, et celle-ci vérifie bien les conditions de l'énoncé. On obtient la suite $f(n)$ qui commence ainsi :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n)$	2	3	6	7	8	9	12	15	18	19	20

Entre 3^k et $2 \,.\, 3^k$, la suite avance de 1 en 1, et entre $2 \,.\, 3^k$ et 3^{k+1}, elle va de 3 en 3. Graphiquement, si l'on joint les points successifs obtenus, on trouve une ligne brisée avec des pentes de 1 et de 3 au-dessus de la droite de pente 2.



En jouant sur l'autosimilarité, on peut aussi fabriquer la suite $f(n)$ de façon linguistique en enlevant à la succession des nombres pairs 2, 4, 6, 8, … (droite de pente 2), les formes triangulaires <u>01</u> <u>012321</u> <u>012345678987654321</u> <u>0</u> …

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
	0	1	0	1	2	3	2	1	0	1	2
$f(n)$	2	3	6	7	8	9	12	15	18	19	20

Le calcul de $f(n)$ se simplifie si l'on travaille en base 3, avec les règles suivantes :

- si n commence par 1 en base 3, $f(n)$ s'obtient en remplaçant ce 1 par 2.
- si n commence par 2, $f(n)$ s'obtient en remplaçant ce 2 par 1 et en ajoutant un 0 à la fin.

Par exemple $f(10201) = 20201$ ou encore $f(2212) = 12120$.