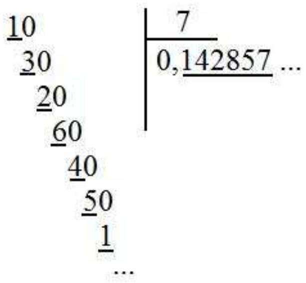
Autour du nombre 142857

Le nombre 142857 a comme particularité de donner une permutation circulaire de lui-même lorsqu'on le multiplie par 1, 2, 3, 4, 5, 6, les résultats obtenus étant 142857, 428571, 285714, 857142, 571428, 714285. Comme le nombre possède six chiffres, les six multiplications donnent toutes les permutations circulaires du nombre. D'où les questions : D'où sort un tel nombre ? Y a-t-il d'autres nombres ayant ces particularités ?

Le cas 142857



Considérons le nombre 0, 142857 142857 … dont la partie décimale est la répétition périodique du bloc 142857. Il s'agit du nombre 1 / 7. On constate que les restes successifs sont tous les nombres compris entre 1 et 6, et la répétition du bloc des restes 132645 conduit à la répétition 142857 dans le quotient. A leur tour les fractions 2/7, 3/7, …, 6/7 donnent la même suite de restes à un décalage près, et la même période dans le quotient à une permutation circulaire près. Par exemple, 2/7 = 0,285714 … comme on le voit dans la division de 1 par 7 à partir de la troisième ligne, et 2/7 = 2 . 1/7 = 2 . 0,142857…, d'où 285714 = 2 . 142857.

Généralisation

Comment trouver des nombres à *d* chiffres qui, lorsqu'on les multiplie par 1, 2, 3, …, $d - 1$, se redonnent eux-mêmes à une permutation circulaire près ? Pour cela il faut et il suffit que dans la division de 1 par *d* on trouve tous les restes successifs compris entre 1 et $d - 1$. Le fait de prendre les fractions k/d (avec *k* entre 1 et $d - 1$) donnera alors la même suite de restes à un décalage près, et la même répétition périodique dans la partie décimale du quotient à un décalage cyclique près. Ce bloc périodique sera le nombre cherché (à *d* chiffres).

La suite des restes obéit à la relation de récurrence $r_{i+1} = 10 \,.\, r_i$ modulo *d*, avec par exemple $r_0 = 1$. Pour que la suite des restes parcoure l'intervalle $[1, d - 1]$, il faut et il suffit que 10 soit un générateur[1] du groupe multiplicatif $U(d)$ et que ce groupe soit l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, d - 1\}$.Les seuls groupes cycliques (admettant des générateurs) étant $U(p^a)$ ou $U(2\,p^a)$ avec *p* premier et *a* entier ≥ 1, les seuls qui conviennent sont $U(p)$ qui contiennent tous les éléments de 1 à $p - 1$, avec 10 qui doit être un générateur, ce qui impose que 10 soit premier avec *d* : *d* ne doit contenir ni 2 ni 5. On aura alors $d = p$.

On arrive à la condition nécessaire et suffisante :

***d* premier et autre que 2 et 5, avec 10 générateur de *U*(*d*)** (les puissances successives de 10 modulo *d* donnent tous les éléments entre 1 et $d - 1$ de $U(d)$). Une permutation circulaire des restes correspondra aux fractions $k / d = k \,.\, 1/d$, et il résultera une permutation circulaire d'un bloc de *d* chiffres dans le quotient.

[1] 10 générateur de $U(d)$ signifie que les puissances successives de 10 parcourent (engendrent) $U(d)$, autrement dit $10^{d-1} = 1$, un tel résultat n'étant pas obtenu avant (10^a est différent de 1 pour *a* entre 1 et $d - 2$).

Un autre exemple

On trouve les solutions du problème par essais successifs, en prenant les nombres premiers (autres que 2 et 5) :

d = 3, 10 = 1 [3] n'est pas générateur.

d = 7, 10 = 3 [7] est générateur, on retrouve 142857.

d = 11, 10 = - 1 [11] n'est pas générateur.

d = 13, mais 10 n'est pas générateur ($10^6 = (-3)^6 = 1$).

d = 17, et 10 est générateur (les puissances de10 sont, en partant de 10^0=1 : 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, … , le retour à 1 pour la première fois se faisant pour 10^{16}) . On obtient le nombre **0588235294117647** (de longueur 16). Quand on multiplie ce nombre par 1, 2, …, 16, on trouve toutes les permutations circulaires de ce nombre.