A propos de la «suite des lapins de Fibonacci »

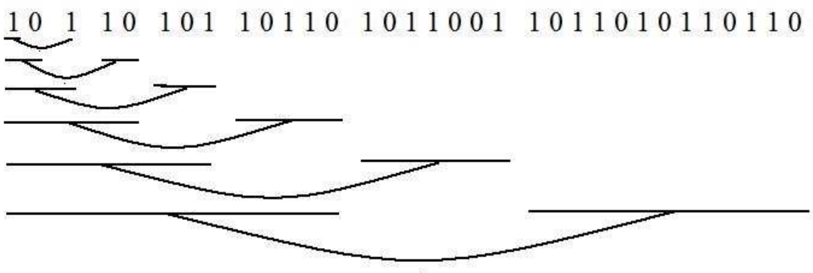
Partons de 1, et appliquons les règles de substitution 0→1 et 1→10. Cela donne les mots : 1→10→101→10110→10110101→…, aboutissant en une suite infinie à base de 0 et de 1, que nous appellerons la « suite des lapins de Fibonacci ». Indexons les termes de cette suite à partir de l'indice 1 :

indices :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
termes de la suite :	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	…

Notre objectif est de montrer que le nombre de lettres 1 entre le rang 1 et le rang n est une fonction $f(n)$ obéissant à la relation de récurrence $f(n) = n - f^2(n-1)$ avec au départ $f(0) = 0$ (ou $f(1) = 1$).

Rappels

1) Dans la suite des lapins, le mot obtenu à l'étape n s'obtient en concaténant le mot précédent, celui de l'étape $n-1$, avec celui de l'étape $n-2$. Ou encore, à chaque étape le nouveau mot a comme facteur gauche le mot précédent et comme facteur droit le facteur gauche de ce mot précédent (ce qui impose de commencer par le mot 01 dont le facteur gauche est 1. On construit ainsi les mots par grossissements successifs, leur facteur gauche étant préservé à chaque étape :



2) Les longueurs des mots successifs sont les nombres de Fibonacci, soit $F(1) = 1$, $F(2) = 1$, $F(3) = 2$, $F(4) = 3$, $F(5) = 5$, $F(6) = 8$, $F(7) = 13$, $F(8) = 21$, $F(9) = 34$, $F(10) = 55$, … , cette suite obéissant à la relation de récurrence $F(n+2)= F(n+1) + \mathrm{F}(n)$, avec au départ $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

3) Dans la suite des lapins, le nombre de 1 entre les lettres d'indices 1 et $F(m)$ est $F(m-1)$, et celui des 0 est $F(\boldsymbol{m} - 2)$. Cela se démontre aisément par récurrence.

4) Tout nombre entier positif k se décompose de façon unique en somme de nombres de Fibonacci décroissants, où les indices de ces nombres diffèrent de 2 au moins, le plus petit de ces nombres étant $F(2) = 1$. [1] Soit :

[1] Pour le démontrer, on commence par chercher le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à k, soit $k = F(m_1)$ + résidu, ce résidu étant strictement inférieur à $F(m_1 - 1)$ (s'il lui était égal on prendrait $k = F(m_1) + F(m_1 - 1) = F(m_1 + 1)$ et le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à k ne serait plus $F(m_1)$ mais $F(m_1 + 1)$). Puis on recommence avec le résidu, strictement inférieur à $F(m_1 - 1)$ et qui contient au mieux $F(m_1 - 2)$. Et ainsi de suite, d'où la formule.

$k = F(m_1) + F(m_2) + \ldots + F(m_q)$ avec $m_1 > m_2 > m_3 > \ldots > m_q$ (et même $m_1 - m_2 > 1$, $m_2 - m_3 > 1$, …) et $q \geq 2$.

Exemple : 12 = 8 + 4 = 8 + 3 +1 = $F(6) + F(4) + F(2)$.

Propriété de la suite des lapins de Fibonacci

En appelant $u(k)$ la $k^{\text{ème}}$ lettre de la suite (soit 0 soit 1), avec $k \geq 1$, on a : $u(k) = u(F(m_q))$ avec m_q dernier indice provenant de la décomposition de $k = F(m_1) + F(m_2) + \ldots + F(m_q)$. Plus précisément :

$$u(k) = 1 \text{ si } m_q \text{ est pair}$$
$$= 0 \text{ si } m_q \text{ est impair}$$

Pour le démontrer, utilisons le découpage des mots successifs formant la suite des lapins (voir *rappel 1*). Le terme $u(k)$ se trouve dans un certain facteur M, celui qui suit le facteur gauche de longueur $F(m_1)$, avec $k = F(m_1) + résidu$. Et ce facteur M constitue aussi un début de la suite, d'où $u(k) = u(F(m_1)+résidu) = u(résidu)$. A son tour *résidu* = $F(m_2)$ + *nouveau résidu*, et $u(k) = u(nouveau\ résidu)$. Et l'on continue ainsi, jusqu'au dernier résidu, qui est $F(m_q)$ (voir *rappel 4*) . D'où $u(k) = u(F(m_q))$.

Exemples :
* $u(12) = u(8+4) = u(F(6)+4) = u(4) = u(3+1) = u(F(4)+1) = u(1) = u(F(2)) = 1$.
* $u(20) = u(F(3)) = u(2) = 0$, car $20 = 13 + 5 + 2 = F(7) + F(5) + F(3)$.
* $u(21) = u(F(8)) = 1$

On constate maintenant que $u(F(2)) = 1$, $u(F(3)) = 0$, $u(F(4)) = 1$, $u(F(5)) = 0$ …. Pour montrer que l'on obtient une alternance infinie de 1 pour F(*nombre pair*) et 0 pour F(*nombre impair*), procédons par récurrence. Supposons que c'est vrai jusqu'à au rang $2p$. Alors $u(F(2p + 1)) = u(F(2p) + F(2p - 1)) = \mathrm{F}(2p - 1)$ pour les mêmes raisons que précédemment, soit 0, et on fait de même avec $F(2p + 2)) = 1$.

Nombre de 1 dans la suite des lapins de Fibonacci

Fabriquons la suite des sommes partielles à partir des 0 et des 1 de la suite, ce qui donne aussi le nombre de 1 :

indices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
suite $u(n)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
nombre de 1	1	1	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8

Introduisons $nb1(k)$, nombre de 1 de la suite entre les rangs 1 et k y compris, ainsi que le nombre de 0, $nb0(k)$. Evidemment $nb1(k) + nb0(k) = k$. On sait aussi (cf. *rappel 3*) que : $nb1(F(m)) = F(m - 1)$ et $nb0(F(m)) = F(m - 2)$ lorsque $m \geq 2$.

Comme $nb1(F(m)) = F(m - 1)$, on pourrait croire que $nb1(nb1(F(m))) = F(m - 2)$, mais cela n'est vrai que pour $m > 2$. Pour $m = 2$, on constate que $nb1(nb1(F(2))) = nb1(1) = 1$, et non pas $F(0)$ qui vaut 0. Ainsi :

$$\boldsymbol{nb1(nb1(F(m))) = F(m - 2) = nb0(F(m)) \text{ pour } m > 2}$$

$\boldsymbol{nb1(nb1(F(2))) = 1}$

Dans le cas général, avec $F(m_1)$ qui est le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à k, on a

$nb1(k) = nb1(F(m_1) + \text{résidu}) = nb1(F(m_1)) + nb1(résidu) = F(m-1) + nb1(résidu)$.

Cela se généralise : avec $k = F(m_1) + F(m_2) + \ldots + F(m_q)$, pour $m \geq 2$,

$nb1(k) = nb1(F(m_1)) + nb1(F(m_2)) + \ldots + nb1(F(m_q))$
$= F(m_1 - 1) + F(m_2 - 1) + \ldots + F(m_q - 1)$ et de même
$nb0(k) = F(m_1 - 2) + F(m_2 - 2) + \ldots + F(m_q - 2)$

Exemple : $k = 12$. Avec $12 = 8 + 3 + 1 = F(6) + F(4) + F(2)$,
$nb1(12) = F(5) + F(3) + \ldots + F(1) = 5 + 2 + 1 = 8$
$nb0(12) = F(4) + F(2) + \ldots + F(0) = 3 + 1 + 0 = 4$
On a aussi $nb1(nb1(12)) = nb1(8) = nb1(F(6)) = F(5) = 5$.

Montrons maintenant que :

$\boldsymbol{nb1(nb1(F(m) - 1)) = F(m - 2) = nb0(F(m))}$ pour $\boldsymbol{m \geq 2}$

C'est déjà vrai pour $m = 2$: $nb1(nb1(F(2) - 1)) = nb1(nb1(0)) = nb1(0) = 0$ où l'on convient que $nb1(0) = 0$, et on trouve bien $F(2 - 2) = F(0) = 0$. Pour $m > 2$, on distingue deux cas :

* m impair : on sait que $u(F(m)) = 0$, d'où $nb1(F(m) - 1)) = nb1(F(m)) = F(m - 1)$, et $nb1(nb1(F(m))) = nb1(F(m - 1)) = F(m - 2)$.
* m pair : $u(F(m)) = 1$, d'où $nb1(F(m) - 1)) = nb1(F(m)) - 1 = F(m - 1) - 1$, et avec $m - 1$ impair, $nb1(nb1(F(m))) = nb1(F(m - 1) - 1) = nb1(F(m - 1)) = F(m - 2)$.

Dans le cas général, lorsque k ne se réduit pas à un nombre de Fibonacci, comme dans ce qui précède, on reprend la décomposition de k :
$k = F(m_1) + F(m_2) + \ldots + F(m_q)$, pour $m \geq 2$,
$nb1(k - 1)) = nb1(F(m_1) + F(m_2) + \ldots + F(m_q) - 1)$
$nb1(nb1(k - 1)) = nb1(\ nb1(F(m_1)) + nb1(F(m_2)) + \ldots + nb1(F(m_q) - 1))$
$= nb1(nb1(F(m_1))) + nb1(nb1(F(m_2))) + \ldots + nb1(nb1(F(m_q) - 1))$
$= F(m_1 - 2) + F(m_2 - 2) + \ldots + F(m_q - 2)$
On a vu aussi que $nb0(k) = F(m_1 - 2) + F(m_2 - 2) + \ldots + F(m_q - 2)$.
Finalement :

$\boldsymbol{nb1(nb1(k - 1)) = nb0(k)}$ et cela est vrai pour tout $k \geq 1$.

Comme $nb1(k) + nb0(k) = k$, on trouve :

$\boldsymbol{nb1(k) + nb1(nb1(k - 1)) = k}$

Le nombre de 1 dans la séquence des lapins de Fibonacci vérifie la relation de récurrence

$\boldsymbol{nb1(k) = k - nb1(nb1(k - 1))}$ avec au départ $\boldsymbol{nb1(1) = 1}$ (ou bien $\boldsymbol{nb1(0) = 0}$).