

Exercice lié au théorème chinois

Trouver cinq nombres entiers (positifs) successifs, chacun étant divisible par un nombre au carré. En choisissant ces cinq nombres au carré judicieusement, trouver la solution la plus petite pour les 5 entiers successifs.

Les cinq nombres sont $x, x+1, x+2, x+3$ et $x+4$.

Il s'agit de résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x = 0 & [m_0^2] \\ x = -1 & [m_1^2] \\ x = -2 & [m_2^2] \\ x = -3 & [m_3^2] \\ x = -4 & [m_4^2] \end{cases}$$

où les modulus sont tous des nombres au carré. Evidemment, on a intérêt à choisir ces modulus les plus petits possibles pour traiter le problème.

Premier cas : on prend les carrés de nombres premiers entre eux deux à deux, ce qui permet d'appliquer le théorème chinois pour les cinq équations. On garde la solution positive la plus petite. Voici quelques résultats, avec des nombres premiers entre eux assez petits. Le meilleur résultat est obtenu avec les modulus pris à partir des cinq premiers nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11.

| m_0 | m_1 | m_2 | m_3 | m_4 | x |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 1 308 248 |
| 2 | 5 | 7 | 11 | 13 | 26 061 824 |
| 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 201 411 999 |
| 3 | 4 | 5 | 7 | 11 | 2 345 823 |

Deuxième cas : les carrés ne sont plus premiers entre eux deux à deux.

Si l'on prend $x=0$ [4] et $x=-4$ [16], la première équation est une conséquence de la deuxième, et le système se réduit à quatre équations, ce qui est plutôt favorable lorsque l'on cherche une petite solution :

$$\begin{cases} x = -1 & [m_1^2] \\ x = -2 & [m_2^2] \\ x = -3 & [m_3^2] \\ x = -4 & [16] \end{cases}$$

| m_0 | m_1 | m_2 | m_3 | m_4 | x |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 4 | 117 848 |
| 2 | 5 | 7 | 3 | 4 | 47 724 |
| 2 | 7 | 3 | 5 | 4 | 121 372 |
| 2 | 5 | 3 | 7 | 4 | 10 924 |
| 2 | 7 | 5 | 3 | 4 | 14 748 |
| 2 | 3 | 7 | 5 | 4 | 84 572 |

Comme meilleure solution, on a trouvé les cinq nombres :

10 924, 10 925, 10 926, 10 927, 10 928, divisibles respectivement par 4, 25, 9, 49 et

16.

Qui dit mieux ?