Somme de puissances de nombres entiers successifs et nombres de Bernoulli

On pose : $S_p(n) = 0^p + 1^p + 2^p + ... + (n-1)^p = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$.

Il s'agit de la somme des n entiers successifs de 0 à n – 1, tous à la même puissance p. Par exemple :

$$S_0(n) = 0^0 + 1^0 + 2^0 + ... + (n-1)^0 = 1 + 1 + ... + 1 = n$$

et l'on est censé connaître :

$$S_1(n) = 0^1 + 1^1 + 2^1 + ... + (n-1)^1 = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$S_2(n) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

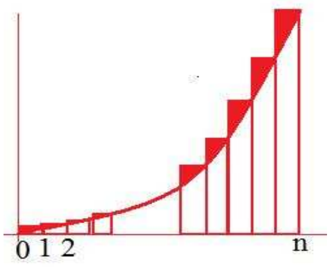
$$S_3(n) = 0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Une méthode pour calculer $S_p(n)$, par exemple $S_4(n)$

1) Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $y = x^4$ et l'axe des x, entre $x = 0$ et $x = n$

   Il s'agit de $\int_0^n x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^n = \frac{n^5}{5}$

2) Calculer l'aire des n rectangles de base unité, comme indiqué sur le dessin. On constatera que le résultat du 1° donne une valeur approchée par défaut de $S_4(n+1)$. Il reste à connaître l' « erreur », c'est-à-dire le complément à ajouter pour obtenir la valeur exacte de $S_4(n+1)$.



On a n rectangles numérotés de 1 à n. Le rectangle k a pour base 1 et pour hauteur k^4. La somme des aires des rectangles est $S_4(n+1)$. Pour avoir la valeur exacte de $S_4(n+1)$, il convient d'ajouter à l'aire obtenue au 1° celle, en rouge, qui est-au dessus de la courbe et en haut des rectangles.

3) Calculer l'aire rouge des parties des rectangles situées au-dessus de la courbe.

Pour le rectangle k, on prend l'aire de ce rectangle et on lui enlève la partie qui est située au-dessous de la courbe, soit :

$$k^4 - \int_{k-1}^{k} x^4 dx = k^4 - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{k-1}^{k} = k^4 - \frac{k^5 - (k-1)^5}{5} = 2k^3 - 2k^2 + k - \frac{1}{5}$$

En sommant pour tous les rectangles, cela donne :

$$2\sum_{k=1}^{n} k^3 - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5} = 2\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{5}$$
$$= \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

4) En déduire $S_4(n)$.

$$S_4(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4 - n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n - n^4$$
$$= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Formule donnant $S_p(n)$ et nombres de Bernoulli

Vers 1700, J. Bernoulli trouva la formule générale donnant $S_p(n)$, en introduisant les nombres B_k qui portent son nom :

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k \, n^{p+1-k}$$

Avec $S_p(1) = 0^p = 0$ sauf pour $p = 0$ où $S_0(0) = 1$, la formule précédente donne une relation de récurrence sur les nombres de Bernoulli B_k, soit

$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k = 0$ pour $p > 0$, avec en conditions initiales $B_0 = 1$.

Dans ce qui suit nous allons démontrer cette formule attribuée à Bernoulli, en utilisant les fonctions génératrices exponentielles.

Fonction génératrice exponentielle $S(z)$ associée aux $S_p(n)$, n étant fixé

Par définition, il s'agit de :

$$S(z)=S_0(n)\frac{z^0}{0!}+S_1(n)\frac{z^1}{1!}+S_2(n)\frac{z^2}{2!}+S_3(n)\frac{z^3}{3!}+S_4(n)\frac{z^4}{4!}+\ldots$$

$$\begin{aligned}
&= \quad (0^0+1^0+2^0+\ldots+(n-1)^0)\\
&\quad +(0^1+1^1+2^1+\ldots+(n-1)^1)\frac{z}{1!}\\
&\quad +(0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)\frac{z^2}{2!}\\
&\quad +\ldots
\end{aligned}$$

Faisons maintenant une lecture par colonnes successives :

$$\begin{aligned}
S(z) &= (0^0+0^1\frac{z}{1!}+0^2\frac{z^2}{2!}+0^3\frac{z^3}{3!}+\ldots)+(1^0+1^1\frac{z}{1!}+1^2\frac{z^2}{2!}+1^3\frac{z^3}{3!}+\ldots)+\ldots\\
&\qquad +((n-1)^0+(n-1)^1\frac{z}{1!}+(n-1)^2\frac{z^2}{2!}+(n-1)^3\frac{z^3}{3!}+\ldots)\\
&= e^{0z}+e^{1z}+e^{2z}+\ldots+e^{(n-1)z}\\
&= (e^z)^0+(e^z)^1+(e^z)^2+\ldots+(e^z)^{n-1}\\
&= \frac{1-e^{nz}}{1-e^z}\\
&= \frac{e^{nz}-1}{e^z-1}
\end{aligned}$$

Pour arriver à ce résultat, nous avons utilisé le développement en série de l'exponentielle, puis la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{z}.

Nombres de Bernoulli

Définition par récurrence

Les nombres de Bernoulli sont définis par $B_0 = 1$, et pour $p \geq 1$, par la relation de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k=0$$

On obtient ainsi de proche en proche :

- pour $p = 1$, $\binom{2}{0}B_0+\binom{2}{1}B_1=0$, d'où $B_1 = -1/2$.
- pour $p = 2$, $\binom{3}{0}B_0+\binom{3}{1}B_1+\binom{3}{2}B_2=0$, d'où $B_2 = 1/6$.
- dans le cas général
  $$B_p=-\frac{1}{p+1}(\binom{p+1}{0}B_0+\binom{p+1}{1}B_1+\binom{p+1}{2}B_2+\ldots+\binom{p+1}{p-1}B_{p-1})$$

Cette formule permet de programmer le calcul des nombres de Bernoulli.

Programme donnant les nombres de Bernoulli successifs

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>
#define N 12   /* calcul des nombres de Bernoulli jusqu'à  B12  */
int C(int n, int p);
float B[100],cumul;

int main()
{  int p,j;
   B[0] = 1;
   for (p=1;p<=N;p++)
     {  cumul=0;
        for(j=0;j<p;j++) cumul+=B[j]*(float)C(p+1,j);
        B[p]=-cumul/(p+1);   printf("\n%3.d: %3.3f",p,B[p]);
     }
   getch();return 0;
}

int C(int n, int p)    /* calcul des combinaisons Cn^p   */
{  int i,j,c[100];
   c[0]=1; for(j=1;j<=p;j++) c[j]=0;
   for(i=1;i<=n;i++)   for(j=p;j>=1;j--)    c[j]+=c[j-1];
   return c[p];
}
```

Remarquons que les nombres de Bernoulli sont tous des nombres rationnels (fractions d'entiers) mais le programme précédent donne les résultats sous forme de nombres à virgule.

Fonction génératrice exponentielle des nombres de Bernoulli

Rappelons qu'après $B_0 = 1$, on a la relation de récurrence :

$$\binom{p+1}{0}B_0+\binom{p+1}{1}B_1+\binom{p+1}{2}B_2+\ldots+\binom{p+1}{p}B_p=0 \quad (p\geq 1)$$

Cela s'écrit aussi, en posant $p + 1 = n$, et en ajoutant le terme supplémentaire B_n :

$$\binom{n}{0}B_0+\binom{n}{1}B_1+\binom{n}{2}B_2+\ldots+\binom{n}{n-1}B_{p-1}+\binom{n}{n}B_n=B_n \quad (n\neq 1)$$

en remarquant que cette formule est encore vraie pour $n = 0$, soit

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k=B_n \quad (n\neq 1) \quad \text{et, pour } n = 1 : \quad \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}B_k=B_1+1$$

Remarquons que les sommes peuvent être étendues à l'infini, puisque les termes supplémentaires sont tous nuls.

Prenons maintenant la fonction génératrice exponentielle $B(z)$ des nombres de Bernoulli :

$$B(z) = B_0 + B_1 \frac{z}{1!} + B_2 \frac{z^2}{2!} + B_3 \frac{z^3}{3!} + ...$$

Formons alors le produit [1]

$$e^z\, B(z) = (1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...)(B_0 + B_1 \frac{z}{1!} + B_2 \frac{z^2}{2!} + B_3 \frac{z^3}{3!} + ...)$$

En développant, le terme en z^n a pour coefficient $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{B_k}{k!}$, et le terme en $\frac{z^n}{n!}$ a pour coefficient : $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{B_k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{B_k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{k!}$.

On vient de trouver que les $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{k!}$ ont pour fonction génératrice exponentielle $e^z\, B(z)$. Sachant que :

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_n$ pour n différent de 1 (et B_1 + 1 pour n = 1), on en déduit, en égalisant les fonctions génératrices exponentielles correspondantes, que :

$$e^z B(z) = B(z) + z\ .$$

Finalement $B(z) = \frac{z}{e^z - 1}$

Lien entre les fonctions génératrices exponentielles *S*(*z*) et *B*(*z*)

Jusqu'à présent, aucun lien n'existe entre les sommes $S_p(n)$ et les nombres de Bernoulli. Les fonctions génératrices exponentielles vont créer ce lien. En effet :

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{e^{nz}-1}{e^z-1} = \frac{e^{nz}-1}{z}\frac{z}{e^z-1} = \frac{e^{nz}-1}{z} B(z) \\ &= \frac{1}{z}(\frac{nz}{1!} + \frac{n^2 z^2}{2!} + \frac{n^3 z^3}{3!} + ...)B(z) \\ &= (n + \frac{nz^2}{2!} + \frac{n^2 z^3}{3!} + ...)(B_0 + B_1 \frac{z}{1!} + B_2 \frac{z^2}{2!} + B_3 \frac{z^3}{3!} + ...) \end{aligned}$$

Finalement :

$$S_0(n)\frac{z^0}{0!} + S_1(n)\frac{z^1}{1!} + S_2(n)\frac{z^2}{2!} + S_3(n)\frac{z^3}{3!} + ... = (n + \frac{nz^2}{2!} + \frac{n^2 z^3}{3!} + ...)(B_0 + B_1 \frac{z}{1!} + B_2 \frac{z^2}{2!} + B_3 \frac{z^3}{3!} + ...)$$

[1] Si l'on fait cela, c'est parce que l'on est censé connaître une propriété fondamentale des fonctions génératrices exponentielles, à savoir que le produit de deux fonctions génératrices exponentielles donne une fonction génératrice exponentielle dont les coefficients sont obtenus par convolution binomiale, comme on va le retrouver par le calcul dans le cas présent.

Ainsi le coefficient $\frac{S_p(n)}{p!}$ du terme en z^p à gauche est le coefficient du développement à droite pour avoir le terme en z^p. Cela donne :

- terme de degré 0 : $S_0(n) = 0!\, B_0\, n = n$
- terme de degré 1 : $S_1(n) = 1!(B_0 \frac{n^2}{2!} + B_1 n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
- terme de degré 2 : $S_2(n) = 2!(B_0 \frac{n^3}{3!} + B_1 \frac{n^2}{2!} + B_2 \frac{n}{2!}) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

(sachant que $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ et $B_2 = 1/6$).

Dans le cas général :

$$S_p(n) = p!\,(B_0 \frac{n^{p+1}}{(p+1)!\,0!} + B_1 \frac{n^p}{p!\,1!} + B_2 \frac{n^{p-1}}{(p-1)!\,2!} + \ldots + B_p \frac{n}{1!\,p!})$$

$$= p! \sum_{k=0}^{p} B_k \frac{n^{j+1-k}}{(j+1-k)!\,k!}$$

Puisque $\binom{p+1}{k} = \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!}$ on trouve finalement la formule donnant $S_p(n)$:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k\, n^{p+1-k}$$

Exemple : calcul de $S_4(n)$ connaissant $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$.

$$S_4(n) = \frac{1}{5}(\binom{5}{0} B_0\, n^5 + \binom{5}{1} B_1\, n^4 + \binom{5}{2} B_2\, n^3 + \binom{5}{3} B_3\, n^2 + \binom{5}{4} B_4\, n)$$

$$= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Remarques complémentaires

- **Les nombres de Bernoulli d'indice impair à partir de B_3 sont tous nuls**

En effet, prenons $B(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}$. On vérifie aisément que cette fonction de z est paire. Dans le développement de :

$B(z) + \frac{z}{2} = B_0 + (B_1 + \frac{1}{2})\frac{z}{1!} + B_2 \frac{z^2}{2!} + B_3 \frac{z^3}{3!} + \ldots$, tous les termes de degré impair sont nuls, d'où $B_1 = -1/2$, et $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$.

- **Les nombres de Bernoulli d'indice pair ont leurs signes qui alternent, à partir de B_2 positif.**

Reprenons la fonction $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$ avec la relation précédente $B(z) + \frac{z}{2} = f(z)$. Puis égalisons la partie paire de chacun des deux membres. La partie paire de $B(z) + \frac{z}{2}$ est $\sum_{n \geq 0} B_{2n} \frac{z^{2n}}{2n!}$. Celle de $f(z)$ est :

$$\frac{f(z) + f(-z)}{2} = \frac{1}{2}(\frac{z}{e^z - 1} - \frac{z}{e^{-z} - 1}) = \frac{z}{2} \frac{e^{-z} - e^z}{(e^z - 1)(e^{-z} - 1)}$$

$$= \frac{z}{2} \frac{e^{-z} - e^z}{2 - (e^z + e^{-z})} = \frac{z}{2} \frac{-2\text{sh}z}{2(1 - \text{ch}z)} = \frac{z}{2} \frac{\text{sh}z}{\text{ch}z - 1}$$

$$= \frac{z}{2} \frac{2\text{sh}(z/2)\ \text{ch}(z/2)}{2\text{sh}^2(z/2)} = \frac{z}{2} \frac{\text{ch}(z/2)}{\text{sh}(z/2)} = \frac{z}{2} \text{cotanh}(z/2)$$

Le développement limité de la cotangente hyperbolique possède une alternance de signes à partir du terme en z^2 qui est positif, donc les nombres de Bernoulli successifs à indice pair aussi. Plus précisément :

$$\frac{z}{2} \text{cotanh}(z/2) = \frac{z}{2}(\frac{2}{z} + \frac{z}{6} - \frac{z^3}{8 \times 45} + \ldots) = 1 + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{16 \times 45} + \ldots$$

On retrouve ainsi $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$.

Référence bibliographique :

Graham, Knuth, Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1990.