Tétraèdres équifaciaux, ou disphénoïdes

Un disphénoÏde, ou tétraèdre équifacial, est un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles isométriques à angles aigus. Le tétraèdre régulier en est un exemple bien connu, ses faces étant des triangles équilatéraux isométriques. Ce qui est moins connu, c'est qu'il n'est pas le seul. Il existe des tétraèdres équifaciaux à base de triangles quelconques, avec des angles aigus toutefois. Commençons par un cas particulier, celui du tétraèdre appelé disphénoïde tétragonal, dont les faces sont des triangles isocèles.

1. Le disphénoïde tétragonal

Ce tétraèdre *ABCD* a ses faces qui sont des triangles isocèles isométriques. Donnons à ce triangle une base de longueur 1 et deux côtés de longueur *b*. Plaçons la face *BCD* dans le plan horizontal *xOy*, avec *O* milieu de [*BC*], comme indiqué sur la *figure 1*. Par rotation de la face *BCD* d'un angle θ autour de (*BC*), on construit la face *ABC* de façon que *AD* = *BC* = 1, et l'on a aussi *OD* = *OA*. Dans le triangle rectangle *COD*, le théorème de Pythagore donne $OD^2 = b^2 - 1/4$, d'où *OD*. Dans le triangle isocèle *AOD* avec l'angle θ en *O*, on a $\sin(\theta/2) = 1/(2\,OD)$ d'où $\theta = 2\,\mathrm{Arcsin}\,(1/(2\,OD))$. On en déduit les coordonnées des sommets du tétraèdre :

$B(0, 1/2, 0)$, $C(0, -1/2, 0)$, $D(OD, 0, 0)$, $A(OD\cos\theta, 0, OD\sin\theta)$

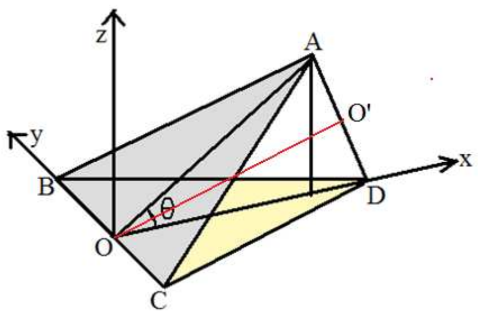


Figure 1 : Construction du disphénoïde tétragonal, dont les faces sont des triangles isocèles isométriques. Le tétraèdre est symétrique par rapport au plan vertical *AOD*.

1.1. Contraintes sur les angles

La relation $\sin(\theta/2) = 1/(2\,OD)$ impose des contraintes. Lorsque *OD* est grand, l'angle θ est petit, les trois angles des faces sont aigus, et le tétraèdre peut toujours être construit. Lorsque *OD* diminue, le sinus augmente, et l'angle $\theta/2$ aussi, mais θ doit rester inférieur à π et l'on doit avoir $1/(2OD) < 1$, soit $OD > 1/2$. Or pour la valeur limite $OD = 1/2$, le triangle isocèle *BCD* a un angle droit en *D*, et on peut aussi vérifier que le sommet *A* a trois triangles accrochés à lui avec des angles égaux à 90°, 45° et 45°, soit une somme égale à 180°, ce qui confirme que le tétraèdre est aplati. On ne peut donc pas avoir un angle droit ou un angle supérieur. Il s'ensuit que les faces du tétraèdre doivent avoir des angles strictement aigus pour que celui-ci existe.

1.2. Pavage de la sphère circonscrite

En prenant *O'* milieu de [*AD*] et *I* milieu de [*OO'*], le point *I* est équidistant des points *A*, *B*, *C*, *D*. Le tétraèdre est inscrit dans la sphère de centre *I* et de rayon *IO*. A partir de *I*, la projection radiale des faces sur la sphère circonscrite donne un pavage de la sphère suivant quatre triangles sphériques isocèles (*figure* 2).

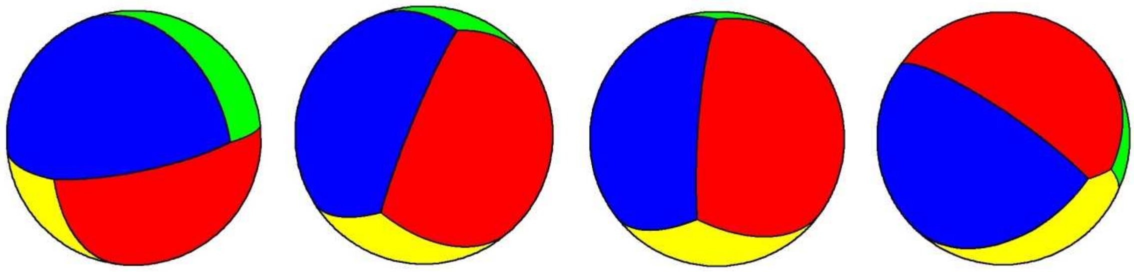


Figure 2 : Pavage de la sphère suivant quatre triangles isocèles, *de gauche à droite* pour les valeurs *b* = 0,71 (cas du tétraèdre presque plat), *b* = 0,86, *b* = 1 où l'on retrouve le tétraèdre régulier, et *b* = 6.

1.3 Pavage de l'espace 3D par un disphénoïde tétragonal

Prenons le cas particulier de disphénoïde où la face *ABC* est perpendiculaire à la face *BCD*. Le point *A* se projette en *O* sur le plan horizontal *BCD*, et l'angle θ vaut π/2, d'où l'on déduit *OD* = $1/\sqrt{2}$ puis $b = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}86$. Accolons à ce tétraèdre *ABCD* un deuxième tétraèdre identique *ABCD'* avec la face verticale *ABC* en commun. On obtient ainsi une pyramide dont la base est le losange *BDCD'*, et dont la pointe *A* se projette au centre du losange. Comme les losanges pavent le plan de base, on peut associer à chacun une pyramide de pointes *A*, *A'*, *A''*, etc. (*figure 3*). A leur tour, les pointes adjacentes comme *A*, *A'*, *A''*, *A''* forment des losanges identiques à ceux du sol, et tous dans un plan parallèle au sol, à la hauteur *OA* = *OD*. Ces losanges peuvent alors devenir les bases de pyramides avec la pointe en bas, placée au point *C* par exemple. Ces nouvelles pyramides s'intercalent entre les précédentes sans laisser de vide. On obtient ainsi un espace complètement rempli entre le sol et le plan contenant les points *A*. Il suffit de recommencer vers le haut et vers le bas pour paver l'espace en trois dimensions.[1]

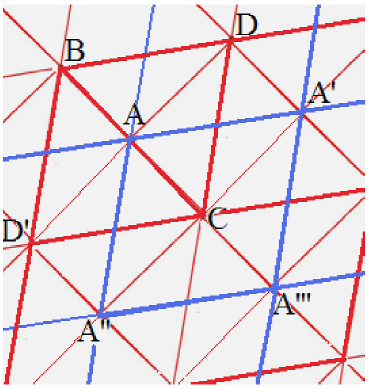


Figure 3 : Vue de haut d'un étage de pyramides étalées sur le sol, avec leurs bases sur le sol *en rouge* et celles du dessus *en bleu*.

[1] Aristote affirmait que parmi les cinq solides de Platon, seuls le cube et le tétraèdre régulier pouvaient paver l'espace. Mais cela n'est pas vrai pour le tétraèdre régulier. Comme le dit M. Senechal [SEN1995], « les efforts des disciples d'Aristote pour justifier cette assertion qui était fausse est un chapitre comique mais instructif de l'histoire des mathématiques. Est-ce que l'erreur d'Aristote était due à l'arrogance manifestée à l'égard de la pratique géométrique, telle qu'elle persiste encore aujourd'hui ? S'il avait daigné fabriquer un modèle, il se serait aperçu de son erreur immédiatement.»

2. Cas général des tétraèdres équifaciaux

2.1. Tétraèdre inscrit dans un parallélépipède

Commençons par le tétraèdre régulier. Il existe une méthode qui permet de le construire à partir d'un cube. Il suffit de tromquer quatre coins du cube jusqu'à l'obtention d'un tétraèdre régulier (*figure 4*). Lors de cette transformation, les sections obtenues sont des triangles équilatéraux et à la fin, lorsque les bords des sections deviennent des diagonales des faces carrées du cube, ils fusionnent deux à deux pour donner le tétraèdre à faces équilatérales. C'est ce que fait le morceau de programme suivant, en utilisant les numérotations de la *figure 5*.

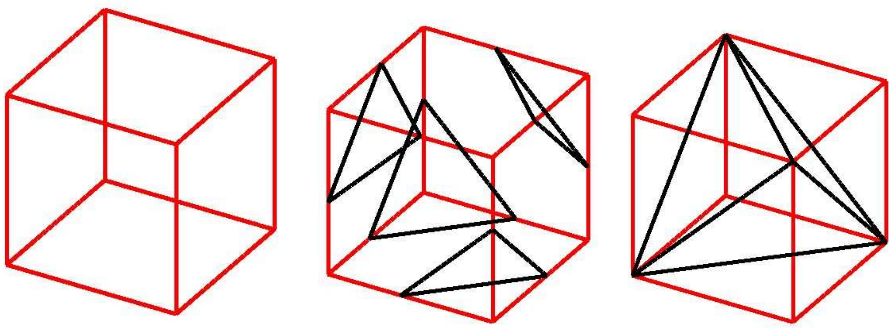


Figure 4 : Du cube au tétraèdre régulier, par troncage de quatre coins du cube.

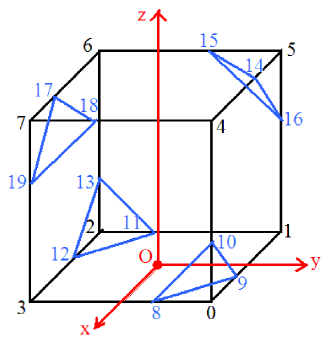


Figure 5 : Numérotation des sommets du cube tronqué, dont les côtés ont pour longueur 2. A la fin, les segments 8 9 et 11 12 se confondent pour donner la diagonale 3 1, et de même avec trois autres diagonales. Finalement on obtient le tétraèdre régulier 6 1 3 4.

```
for(h=0;h<2.;h+=0.01)
{  x[0]=1.;y[0]=1.;z[0]=0.;    x[1]=-1.;y[1]=1.;z[1]=0.;    x[2]=-1.;y[2]=-1.;z[2]=0.;   x[3]=1.;y[3]=-1.;z[3]=0.;
   x[4]=1.;y[4]=1.;z[4]=2.;    x[5]=-1.;y[5]=1.;z[5]=2.;    x[6]=-1.;y[6]=-1.;z[6]=2.;   x[7]=1.;y[7]=-1.;z[7]=2.;
   x[8]=1.;y[8]=1.-h; z[8]=0.;   x[9]=1.-h;y[9]=1.;z[9]=0.;   x[10]=1.;y[10]=1.;z[10]=h;
   x[11]=-1.;y[11]=-1.+h; z[11]=0.;  x[12]=-1.+h;y[12]=-1.;z[12]=0.;    x[13]=-1.;y[13]=-1.;z[13]=h;
   x[14]=-1.+h;y[14]=1.;z[14]=2.;   x[15]=-1.;y[15]=1.-h;z[15]=2.;     x[16]=-1.;y[16]=1.;z[16]=2.-h;
   x[17]=1.-h; y[17]=-1.;z[17]=2.;   x[18]=1.;y[18]=-1.+h; z[18]=2.;    x[19]=1.;y[19]=-1.;z[19]=2.-h;
}
```

Lorsque l'on déforme le cube de façon à obtenir un parallélépipède rectangle quelconque, avec des côtés de longueurs a, b et c, on constate que l'on obtient toujours un tétraèdre à faces isométriques, les côtés opposés étant égaux deux à deux (*figures 6 et 7*). Appelons a', b', c' les longueurs des côtés de chaque face du tétraèdre. De a, b, c, on déduit a', b', c' par

$a'^2 = b^2 + c^2$, $b'^2 = c^2 + a^2$, $c'^2 = a^2 + b^2$.

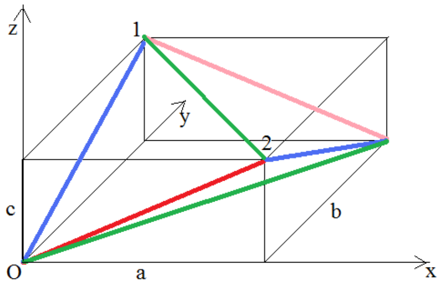


Figure 6 : Le parallélépipède rectangle et le tétraèdre équifacial inscrit.

Inversement, si l'on se donne a', b', c', on trouve

$$a^2 = (-a'^2 + b'^2 + c'^2)/2$$
$$b^2 = (a'^2 - b'^2 + c'^2)/2$$
$$c^2 = (a'^2 + b'^2 - c'^2)/2$$

ce qui impose que pour avoir a, b, c, les trois parenthèses soient positives. Autrement dit, le triangle formant une face doit avoir ses trois angles aigus. Finalement tout triangle à angles aigus peut donner un tétraèdre dont les faces sont isométriques, inscrit dans un parallélépipède rectangle de côtés a, b et c. Par les quatre sommets obtenus passe une sphère unique, celle qui est aussi circonscrite au cube. Par projection radiale du tétraèdre sur la sphère, on trouvera aussi quatre triangles sphériques isométriques.

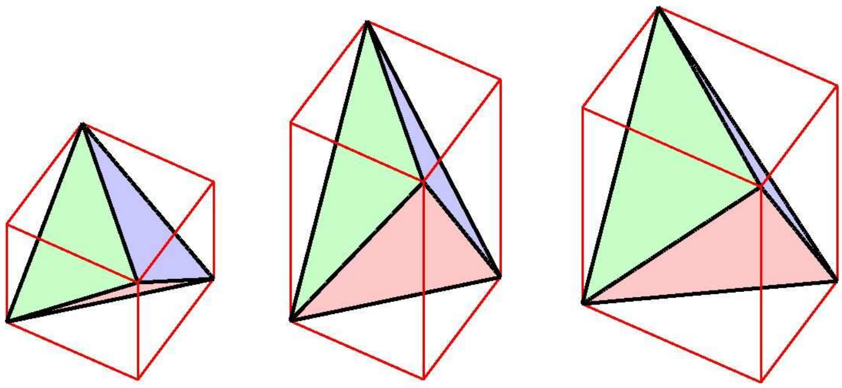


Figure 7 : *A gauche* le tétraèdre régulier et son cube circonscrit, *au centre* un tétraèdre dont les faces sont des triangles isocèles isométriques, obtenu par allongement vertical (ce tétraèdre est le disphénoïde tétragonal). *A droite* le cas général, avec un tétraèdre à faces isométiques quelconques (avec des angles aigus), obtenu en l'inscrivant dans un parallélépipède rectangle quelconque.

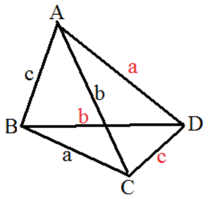
Nous allons maintenant démontrer qu'il n'existe pas d'autres tétraèdres à faces isométiques que ceux que l'on vient de trouver. Ce sont les tétraèdres équifaciaux ou encore tétraèdres isocèles (dans le sens où ils ont leurs côtés opposés égaux en longueur). Dans le cas particulier où les faces sont des triangles isocèles, on retrouve les disphénoïdes tétragonaux. Par la même occasion, nous allons préciser certaines de leurs propriétés, ainsi qu'un moyen de les construire à partir de leur base BCD située dans un plan horizontal où se trouveront l'axe de x et l'axe des y.

2.2. Le cas général des tétraèdres équifaciaux et leurs propriétés

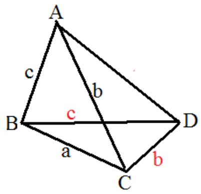
Traitons ce problème sous forme d'exercice.

1) *Considérons un tétraèdre à faces isométriques, dont les côtés ont pour longueur a, b, c et les angles α, β, γ. Montrer que ses arêtes oposées sont de même longueur deux à deux. Vérifier aussi que chaque sommet a des faces accrochées à lui avec les trois angles α, β, γ.*

Rappelons que deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs trois côtés respectifs ont même longueur deux à deux. Prenons la face *ABC* avec ses côtés *a*, *b* et *c*. Deux cas se présentent.



1) Le triangle *BCD* est tel que *BD* = *b* et *CD* = *c*. Les triangles *ABC* et *BCD* sont bien isométriques. En prenant *AD* = *a*, les deux autres faces ont aussi comme côtés *a*, *b* et *c*. Les quatre faces étant bien isométriques, et l'on constate que les côtés opposés du tétraèdre sont égaux.



2) Le triangle *BCD* est tel que *BD* = *c* et *CD* = *b*. Les triangles *ABC* et *BCD* sont bien isométriques. Dans ces conditions, les triangles *BAC* et *CAD* sont isocèles, avec des côtés respectifs *a*, *b*, *b* et *a*, *c*, *c*. Comme ils sont isométriques, cela impose *b* = *c*. Alors toutes les faces sont des triangles isocèles avec des côtés de longueur *a*, *b*, *b*. La face *ACD* est telle que *AD* = *a*. Là encore les côtés opposés du tétraèdre sont égaux en longueur. On retrouve d'ailleurs le disphénoïde tétragonal.

Comme il est évident, inversement, qu'un tétraèdre avec des côtés opposés de même longueur a ses quatre faces isométriques, une autre définition du tétraèdre équifacial est d'avoir ses côtés opposés de même longueur deux à deux.

En conséquence, chaque sommet du tétraèdre est l'extrémité de trois arêtes de longueur *a*, *b*, *c*, et donc avec les trois angles α, β, γ.

2) *En appelant I, J, K, L, M, N les milieux des faces [AB], [CD], .., (voir figure 8), montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) se coupent en G, isobarycentre de ABCD, et qu'elles sont perpendiculaires deux à deux. Montrer aussi que ces droites sont des perpendiculaires communes aux côtés opposés du tétraèdre.*

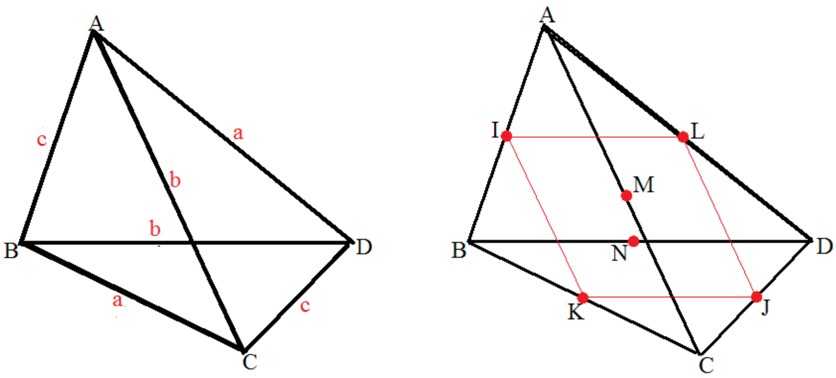


Figure 8 : Le tétraèdre équifacial et les milieux des faces.

Grâce à la régle du barycentre partiel, *G* est aussi l'isobarycentre de *I* et *J*, c'est-à-dire le milieu de [*IJ*], et de même le milieu de [*KJ*]. En faisant de même avec [*MN*], les trois segments [*IJ*], [*KL*] et [*MN*] se coupent en *G* et ce point est leur milieu.

Revenons au quadrilatère *IKLJ*. Comme ses diagonales se coupent en leur milieu *G*, *IKJL* est un parallélogramme. D'autre part, *IL* = *BD* / 2 = *b* / 2, et *IK* = *AC* / 2 = *b* / 2. Avec deux côtés adjacents égaux, *IKJL* est un losange. Ses diagonales sont perpendiculaires : [*IJ*] est perpendiculaire à [*KL*]. On ferait de même avec [*MN*].

Il reste à démontrer que (*IJ*) est la perpendiculaire commune à (*AB*) et (*CD*). Plaçons-nous dans le triangle *ABJ*. Comme [*AJ*] et [*BJ*] sont médianes dans les deux triangles isométriques *ACD* et *BCD*, elles sont même longueur. Le triangle *ABJ* est isocèle, sa médiane (*JI*) est hauteur, donc perpendiculaire à (AB). De même le triangle CDI est isocèle et (IJ) est perpendiculaire à (CD). (IJ) est la perpendiculaire commune aux côtés opposés (AB) et (CD). Il en est de même pour (KL) et (MN).

3) *Calculer* AJ^2 *puis* IJ^2, KL^2 *et* MN^2 *en fonction de a, b, c. En déduire que les faces du tétraèdre équifacial ont leurs trois angles* α, β, γ *aigus.*

Plaçons-nous dans le triangle ACD où $AC = b$, $AD = a$ et $CD = c$, avec AJ médiane.

$AC^2 + AD^2 = \mathbf{AC}^2 + \mathbf{AD}^2 = (\mathbf{AJ} + \mathbf{JC})^2 + (\mathbf{AJ} + \mathbf{JD})^2 = 2AJ^2 + JC^2 + JD^2 = 2AJ^2 + CD^2 / 2$
$AJ^2 = (a^2 + b^2 - c^2 /2) /2$

Dans le triangle rectangle ABJ :

$JI^2 = AJ^2 - IA^2 = (a^2 + b^2 - c^2 /2) /2 - c^2 /4 = (a^2 + b^2 - c^2) /2$

Finalement $IJ^2 = (a^2 + b^2 - c^2) / 2$
$KL^2 = (b^2 + c^2 - a^2) / 2$
$MN^2 = (c^2 + a^2 - b^2) /2$

Passons aux angles. Dans le triangle ABC avec la médiane [AK] et l'angle α en A, on a par analogie avec AJ^2, $AK^2 = (b^2 + c^2 - a^2 / 2) / 2$. Puis formons le produit scalaire

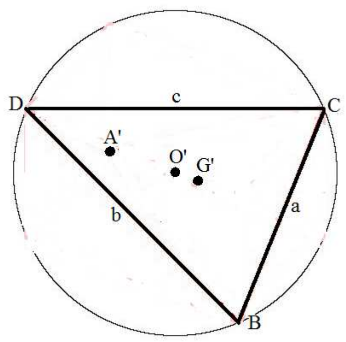
$\mathbf{AB}\ \mathbf{AC} = AB\ AC \cos\alpha = b\ c \cos\alpha$ et aussi
$\mathbf{AB}\ \mathbf{AC} = (\mathbf{AK} + \mathbf{KB})(\mathbf{AK} + \mathbf{KC}) = AK^2 + \mathbf{KB}\ \mathbf{KC} = AK^2 - KB^2 = AK^2 - BC^2 / 4 = AK^2 - a^2 / 4$
$= (b^2 + c^2 - a^2 / 2) / 2 - a^2 / 4 = (b^2 + c^2 - a^2) / 2$
On constate que $\mathbf{AB}\ \mathbf{AC} = KL^2$

Finalement $\cos\alpha = KL^2 / (b\ c)$, $\cos\alpha > 0$, d'où α aigu. On fait de même pour β et γ.

4) *Montrer que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ainsi que le centre de la sphère inscrite (tangente aux quatre faces).Calculer leurs rayons respectifs R et r en fonction de a, b, c (Pour avoir r, on aura intérêt à calculer d'abord l'aire S d'une face du tétraèdre, puis le rayon R' du cercle circonscrit au triangle BCD donné par la formule R' = abc / (4 S)). En déduire la longueur h d'une hauteur quelconque du tétraèdre.*

Reprenons le triangle isocèle ABJ, avec (JI) médiane, hauteur, et donc médiatrice. Comme G est au milieu de [IJ], on a $GA = GB$. De même (IJ) est médiatrice dans le triangle isocèle CDI et $GC = GD$. Enfin (LK) est aussi médiatrice dans le triangle LBC, et $GB = GC$. Le point G, équidistant des quatre points $ABCD$, est le centre du cercle circonscrit. Pour avoir son rayon R, considérons le triangle rectangle GIA, avec $IA = c / 2$ et $GI = 1/2\ IJ$, et $GI^2 = IJ^2 / 4 = (a^2 + b^2 - c^2) / 8$.

D'où $GA^2 = (a^2 + b^2 - c^2) / 8 + c^2 / 4 = (a^2 + b^2 + c^2) / 8$.
Ainsi $R^2 = (a^2 + b^2 + c^2) / 8$.



Plaçons le point G'centre de gravité du triangle BCD. Grâce à la règle du barycentre partiel, l'isobarycentre G de A, B, C, D, est aussi le barycentre de (G', 3) et (A, 1). Le point G se trouve aux 1/4 de [$G'A$] à partir de G', soit $\mathbf{G'G} = 1/4\ \mathbf{G'A}$.

Puisque G est le centre de la sphère circonscrite, il se projette sur la base BCD en un point O' qui est le centre du cercle circonscrit à BCD (*cf. figure ci-contre*). Appelons A' le projeté de A sur le plan BCD. [AA'] est une hauteur du téraèdre $ABCD$. Les points alignés G', G, A avec G au 1/4 de [$G'A$], se projettent suivant G', O', A' alignés et l'on a plus précisément $\mathbf{G'O'} = 1/4\ \mathbf{G'A'}$.

On a aussi **GO’** = 1/4 **AA**’. Appelons h la longueur de la hauteur [AA’]. Dans le tétraèdre les quatre hauteurs ont même longueur h, puisque le volume du tétraèdre vérifie $V = S\,h / 3$, où S est l’aire d’une quelconque des 4 faces. Finalement le point G se projette sur toutes les faces à la même distance h /4. Le point G est le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre. Son rayon est $r = h / 4$.

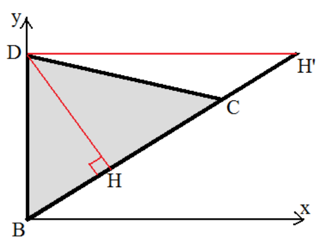
Plaçons-nous dans le triangle rectangle $GO'B$, où $GO' = r$, $GB = R$ et $O'B = R'$ rayon du cercle circonscrit au triangle BCD. On en déduit que[2] :

$r^2 = R^2 - R'^2 = (a^2 + b^2 + c^2) / 8 - (a^2\, b^2\, c^2) /(16\, S^2)$.

Il reste à chercher l’aire S d’une face, soit $S = (1/2)\, b\, c \sin \alpha$, et $S^2 = (1/4)\, b^2\, c^2 \sin^2 \alpha$. On a vu que $\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / (2\, b\, c)$, d’où $\cos^2 \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)^2 / (4\, b^2\, c^2)$. Finalement :

$S^2 = (1/4)\, b^2\, c^2\, (1 - \cos^2 \alpha) = (1/4)\, b^2\, c^2\, (1 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 / (4\, b^2\, c^2))$.

5) *En déduire une construction du tétraèdre équifacial ABCD à partir de la face BCD placée dans le plan horizontal de repère xBy.*



Dans le repère orthonormé $Bxyz$, donnons-nous les trois sommets du triangle BCD dans xBy, soit
$B(0, 0, 0)$,
$D(0, 1, 0)$
et C (xc, yc, 0) avec xc et yc positifs. On peut se donner la pente m de (BC), ainsi que xc, d’où $yc = m\, xc$, avec $m > 0$ de façon que l’angle B de BCD soit aigu. Le point C devra être situé entre H et H' (*voir figure ci-contre*) pour que tous les angles soient aigus, ce qui se traduit par et $m^2 / (m^2 + 1) < yc < 1$.

Avec $a = BC$, $b = BD$ et $c = CD$, on en déduit que $a^2 = xc^2 + yc^2$, $b^2 = 1$ et $c^2 = xc^2 + (1 - yc)^2$. Pour avoir l’aire S de la base, le plus simple est de prendre $S = xc / 2$.

Puis on construit le centre de gravité G' de BCD, soit G' (xc / 3, (1 + yc) /3, 0).

Le centre O' du cercle circonscrit est à l’intersection de la médiatrice de [BD], d’équation $Y = 1/2$, et de la médiatrice de [BC]. Cette dernière passe par le milieu K de [BC], soit K (xc /2, yc /2, 0) et elle est perpendiculaire à (BC). Sa pente est $- xc / yc$, et son équation $Y - yc / 2 = -(xc / yc)\,(X - xc /2)$. En prenant $Y = 1/2$, on trouve l’abscisse $X_{O'}$ de O', soit $1/2 - yc / 2 = -(xc / yc)\,(X_{O'} - xc /2)$, d’où

$X_{O'} = (- yc + yc^2 + xc^2) / (2\, xc)$
O' $(xc^2 + yc^2 - yc) / (2\, xc)$, 1/2, 0)

On en déduit A' par la relation vectorielle **G’O’** = 1/4 **G’A’**
A' $(4\, x_{O'} - 3\, x_{G'}, 4\, y_{O'} - 3\, y_{G'}, 0)$

Avec la hauteur de longueur $h = 4\, r$, r^2 étant connu grâce à une formule précédemment trouvée $r^2 = R^2 - R'^2$, on trouve A $(x_{A'}, y_{A'}, h)$.

Cela étant fait, on a intérêt à faire une translation de vecteur **GB** pour que l’origine du repère soit le point G. On pratique enfin une homothétie de centre G et de rapport $1/R$ pour que la sphère

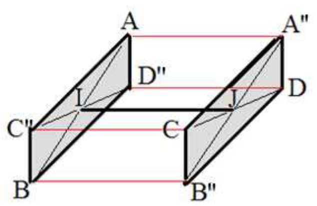
[2] Rappelons la formule, dans un triangle ABC de côtés a, b, c : $a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C = abc / (2S) = 2R$, ce qui permet d’avoir le rayon du cercle cironscrit R en fonction de l’aire S de ABC.

circonscrite ait un rayon unité, ce qui permettra ensuite de dessiner si l'on veut le pavage sphérique[3]. Cela donne le morceau de progarmme suivant, dans le cas où l'on a une vue de haut du tétraèdre.

```
xorig =400; yorig= 300; zoom=200.;  /* repère écran */
alpha= 90.*M_PI/180.;   /* cas d'une vue de haut, mais cela peut être changé */
c=sqrt(2.)*tan(alpha);A=zoom/sqrt(2.);B=zoom*sin(alpha)/sqrt(2.);C=zoom*cos(alpha); /* perspective */
m=0.6; xc=0.5; yc=m*xc;
b=1.;
x[1]=0.;y[1]=0.;z[1]=0.;  /* point B */
x[2]=xc; y[2]=yc; z[2]=0.;  /* point C */
x[3]=0.;y[3]=1.;z[3]=0.;    /* point D */
a=sqrt(xc*xc+yc*yc);  /* longueur BC */
cc =sqrt(xc*xc+(1.-yc)*(1.-yc)); /* longueur CD */
x[4]=(x[1]+x[2]+x[3])/ 3.; y[4]=(y[1]+ y[2]+y[3]) /3.; z[4]= 0.;  /* point G' */
x[5] = 0.5*( a*a- yc) /xc;  y[5]=0.5; z[5]=0.;  /* point O' */
x[6]=4.*x[5]-3.*x[4]; y[6]=4.*y[5]-3.*y[4] ; z[6]= 0.;  /* point A' */
S=xc/2.;  /* aire d'une face */
R=sqrt((a*a+b*b+cc*cc)/8); /* rayon de la sphère circonscrite */
RR=a*b*cc/(4.*S);  /* rayon du cercle circonscrit à BCD */
r=sqrt(R*R-RR*RR); /* rayon de la sphère inscrite */
h=4.*r;  /* hauteur du tétraèdre */
x[0]=x[6];y[0]=y[6];z[0]=h;    /* point A */
 x[7]=0.5*(x[0]+x[2]);y[7]=0.5*(y[0]+y[2]);z[7]=0.5*(z[0]+z[2]); /* point M */
 x[8]=0.5*(x[1]+x[3]);y[8]=0.5*(y[1]+y[3]);z[8]=0.5*(z[1]+z[3]); /* point N */
 x[9]=x[8]-x[7]+x[2];  y[9]=y[8]-y[7]+y[2];   z[9]=z[8]-z[7]+z[2];   /* point A' */
 x[10]=x[7]-x[8]+x[3];  y[10]=y[7]-y[8]+y[3];   z[10]=z[7]-z[8]+z[3];   /* point B' */
 x[11]=x[8]-x[7]+x[0];  y[11]=y[8]-y[7]+y[0];   z[11]=z[8]-z[7]+z[0];   /* point C' */
 x[12]=x[7]-x[8]+x[1];  y[12]=y[7]-y[8]+y[1];   z[12]=z[7]-z[8]+z[1];   /* point D' */
/******  dessin vue de haut   ***/
xg=0.25*(x[0]+x[1]+x[2]+x[3]); yg=0.25*(y[0]+y[1]+y[2]+y[3]); zg=0.25*(z[0]+z[1]+z[2]+z[3]); /* point G */
for(i=0;i<13;i++) {x[i]=x[i]-xg; y[i]=y[i]-yg; z[i]=z[i]-zg;} /* on prend comme origine du repère G */
for(i=0;i<13;i++) {x[i]=x[i]/R; y[i]=y[i]/R; z[i]=z[i]/R;} /* on donne un  rayon 1 à la sphère circonscrite */
for(i=0;i<13;i++)   { xe[i]=xorig +A*(x[i]-y[i]);  ye[i]=yorig-B*(x[i]+y[i])- C*z[i];} /* coordonnées écran */
for(i=1;i<4;i++)   linewithwidth(xe[i],ye[i],xe[i%3+1],ye[i%3+1],1,rouge1); /* arêtes du tétraèdre */
for(i=1;i<4;i++)   linewithwidth(xe[0],ye[0],xe[i],ye[i],1,rouge1);
filldisc(xe[4],ye[4],4,noir);
filldisc(xe[5], ye[5],4,bleu1);
filldisc(xe[6], ye[6],4,vert1);
circle(xe[5],ye[5],zoom*RR/R,noir);  /* cercle circonscrit à la base BCD dans la vue de haut */
parallelepipede();/* fonction dessinant le parallélépipède circonscrit au tétraèdre */
SDL_Flip( screen); pause() ;
```

6) *Vérifier que le tétraèdre équifacial peut être inscrit dans un parallélépipède rectangle.*

Construisons le segment [*A''B''*] de milieu *J*, parallèle à [*AB*] et de même longueur. On obtient un quadrilatère *CB''DA''* qui est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu *J* et qui est même un rectangle puisque ses diagonales ont même longueur (*A''B''* = *AB* = *CD*). Faisons de même en prenant le segment [*C''D''*] de milieu *I*, parallèle à [*CD*] et de même longueur. On obtient encore un rectangle *AC''BD''*.



Précisons que les deux rectangles obtenus ont leurs côtés respectifs parallèles. On sait aussi que la droite (*IJ*) est perpendiculaire à (*AB*) et (*CD*), d'où perpendiculaire aussi à (*A''B''*) et (*C''D''*). Elle est donc perpendiculaire aux deux plans des rectangles. On est alors dans le contexte indiqué ci-contre. On a bien obtenu un parallélépipède rectangle. Remarquons que celui-ci a des côtés de longueur *IJ*, *KL* et *MN*.

[3] Pour les pavages correspondants de la sphère, on pourra se reporter au document *Pavages de la sphère avec une forme unique de pavés*, sur mon site *pierreaudibert.fr*.

Des résultats sont donnés sur la *figure 9*.

Concluons : on a vu qu'à partir d'un parallélépipède rectangle, on pouvait construire un tétraèdre équifacial (avec des faces à angles aigus). On vient de voir qu'en partant d'un tétraèdre équifacial (ayant aussi des faces à angles aigus) on pouvait l'inscrire dans un parallélépipède rectangle. La boucle est bouclée. Il n'y a pas d'autres tétraèdres équifaciaux que ceux-là.

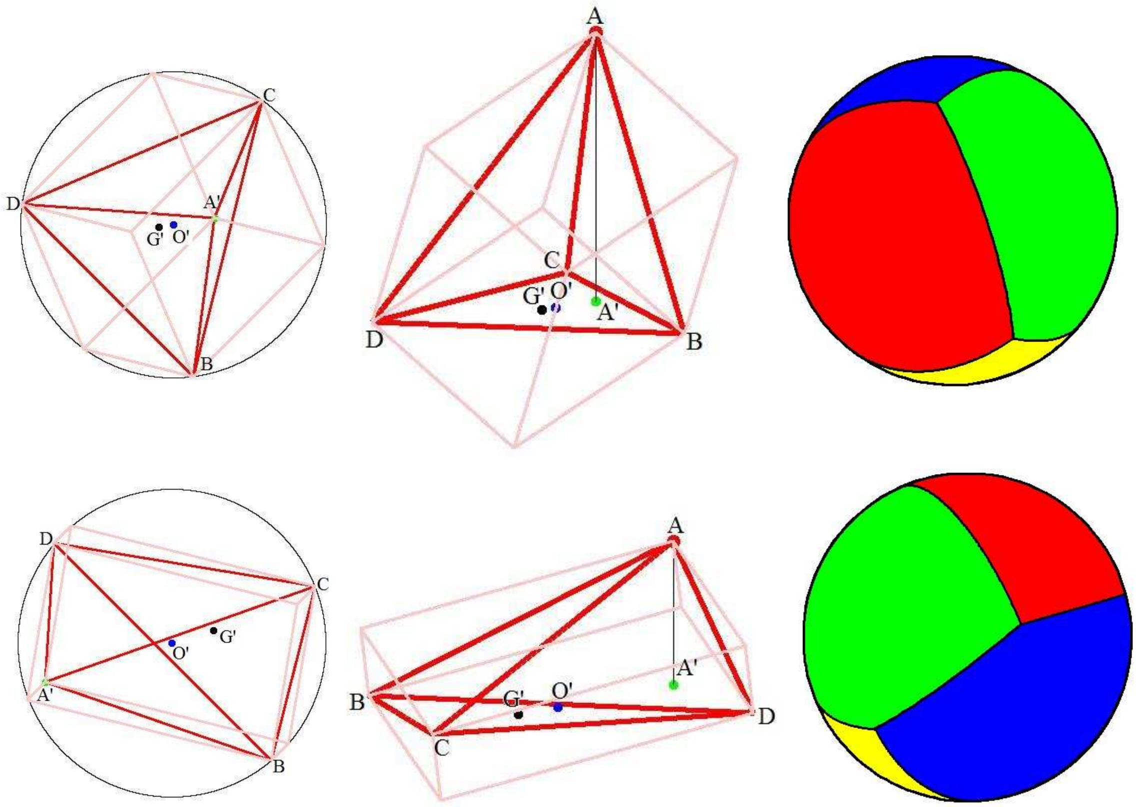


Figure 9 : *En haut*, cas où *xc* = 1 et *yc* = 0,6, *en bas xc* = 0,5 et *yc* = 0,3. *De gauche à droite*, on a une vue de haut du tétraèdre, puis une vue en perspective, et enfin la pavage de la sphère correspondant.

Bibliographie

[SEN1995] M. Senechal, *Quasicrystals and geometry*, *Cambridge University Press*, 1995.