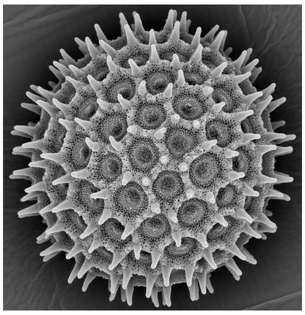
Un problème de Tammes :
Disposition harmonieuse de quatre points sur une sphère

Lorsque quatre points sont placés sur une sphère, et que l'on s'intéresse aux distances qui séparent ces points pris deux à deux, il existe parmi elles une distance minimale *d*. Parmi toutes les configurations de ces quatre points, on veut connaître celle pour laquelle cette distance *d* est maximale, autrement dit celle qui maximise la distance minimale. Cela s'appelle un problème de Tammes, du nom de P.M.L. Tammes, botaniste hollandais qui, dans les années 1930, s'intéressa à la disposition de *N* cercles de même rayon sur une sphère, ceux-ci ne se coupant pas tout en ayant le rayon le plus grand possible.[1] Cela correspond à la disposition des pores sur les grains de pollen des fleurs, comme sur la figure ci-dessous pour un grand nombre de pores (*source : safaribooksonline.com*).



Dans ce qui suit, nous traitons le problème des quatre points sous forme d'execice.

Sur une sphère de centre O et de rayon 1 sont placés quatre points A, B, C, D.

1) Calculer $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})^2$ de deux façons, d'une part en développant, d'autre part en faisant intervenir le point *G*, centre de gravité des quatre points. En déduire que :

$$2(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD})=16\,OG^2-4$$

Utilisons d'abord l'identité remarquable :

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD})$$
$$= 4 + 2(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD})$$

On peut aussi intercaler G :

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})^2=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD})^2$$
$$=(4\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})^2=16OG^2$$

car $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ par définition de G.

En égalisant ces deux résultats, on trouve bien :

$$2(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD})=16\,OG^2-4$$

2) On pose $T = AB^{2.} + AC^{2.} + AD^{2.} + BC^{2.} + BD^{2.} + CD^2$. Il s'agit de la somme des carrés des 6 distances joignant les points deux à deux. Montrer que

$$T=12-2(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\,\vec{O})$$

---

[1] Pour aller plus loin, on pourra consulter sur internet le document *APMEP, dans nos classes, le problème de Tammes*. Pour des rappels de cours sur les barycentres, voir sur mon site : rubrique *Enseignements, cours informatique et mathématiques*, *chap.17 : barycentres, produit scalaire*.

En déduire que T = 16 (1 – OG^2).

$$
\begin{aligned}
T &= AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 \\
&= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{CD}^2 \\
&= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})^2 + (\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD})^2 + (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD})^2 \\
&= AO^2 + OB^2 + AO^2 + OC^2 + AO^2 + OD^2 + BO^2 + OC^2 + BO^2 + OD^2 + CO^2 + OD^2 + \\
&\quad - 2(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD}) \\
&= 12 - 2(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD})
\end{aligned}
$$

En s’aidant du résultat du 1°, on obtient :

$T = 12 - (16\, OG^2 - 4) = 16 - 16\, OG^2 = 16\,(1 - OG^2)$

3) Parmi les 6 distances de jonction entre deux points, on appelle *d* la distance minimale. Montrer que $6\, d^2 \leq T \leq 16$.

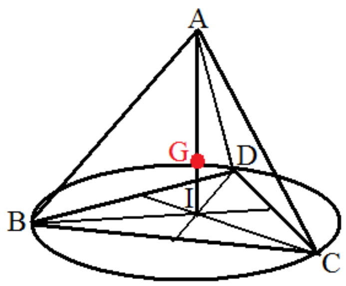
Avec $T = 16 - 16\, OG^2$, on a bien $T \leq 16$.
D’autre part, la somme T des 6 distances au carré est supérieure ou égale à 6 d^2 puisque d est la distance minimale parmi les six.

4) Pour chaque configuration des quatre points *A, B, C, D*, on a une distance minimale *d*. Parmi toutes les configurations possibles, quelle est la valeur maximale de *d*, et comment doivent alors être disposés les quatre points *A, B, C, D* ?

A cause de l’encadrement précédent, la valeur maximale de d est obtenue lorsque $6\, d^2 = T = 16$. Cela impose d’abord que $T = 16$, ce qui signifie que G est en O. Cela étant, parmi toutes les configurations ayant G en O, on a soit $6\, d^2 < 16$ lorsque la distance minimale est strictement plus petite que toutes les autres, soit $6\, d^2 = 16$ si la distance d est la même pour les six distances de jonction. On trouve donc que la distance d est maximale lorsque les 6 distances de jonction sont égales, plus précisément égales à $2\sqrt{2}/\sqrt{3} = 2\sqrt{6}/3$, avec aussi G en O. Cela semble correspondre à la configuration où les quatre points sont les sommets d’un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère. Mais rien ne dit qu’avec des distances toutes égales à $2\sqrt{6}/3$**,** une telle configuration a son centre de gravité en O.

5) On appelle tétraèdre régulier un tétraèdre dont les six côtés ont même longueur. Vérifier qu’une telle figure existe bien, et en la construisant montrer que le tétraèdre régulier est inscrit dans une sphère de centre G avec une longueur des côtés égales à $2\sqrt{6}/3$. En déduire que la configuration maximale obtenue au 4° est bien celle d’un tétraèdre régulier.

Par définition, le tétraèdre régulier doit avoir ses quatre faces qui sont des triangles équilatéraux de même dimension. Commençons par tracer un triangle équilatéral BCD faisant office de base horizontale. Ce triangle est inscrit dans un cercle de centre I, centre de gravité de BCD. En appelant a la longueur d’un côté de BCD, chaque hauteur de BCD mesure $a\sqrt{3}/2$, et le point I est aux deux-tiers des médianes, qui sont aussi hauteurs, à partir des sommets, soit $IB = IC = ID = a\sqrt{3}/3$.

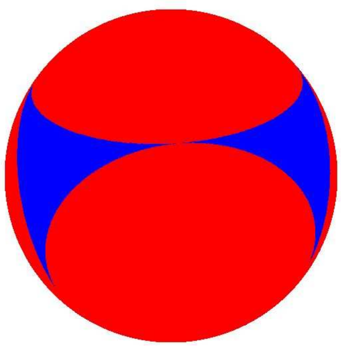


Prenons un point A, qui se projette en I' sur le plan de BCD, ce qui donne des triangles rectangles $AI'B$, $AI'C$ et $AI'D$. Pour que A puisse prétendre être le quatrième sommet du tétraèdre régulier, les trois triangles rectangles doivent avoir $AB = AC = AD = a$. Comme ils ont aussi un côté AI' en commun, cela impose que leurs troisièmes côtés aient même longueur, soit $I'B = I'C = I'D$ (en cas de doute, appliquer le théorème de Pythagore dans chaque triangle). Le point I', équidistant de B, C, D, est donc confondu avec I, et A se projette en I. Le quatrième sommet A du tétraèdre régulier doit être tel que $IA^2 + IB^2 = AB^2$, grâce à Pythagore, soit $IA^2 = a^2 - a^2 / 3 = 2\,a^2 / 3$, ou $IA = a\sqrt{2} / \sqrt{3} = a\sqrt{6} / 3$. On vient de construire un tétraèdre régulier $ABCD$ unique de côté a.

Maintenant, prenons le centre de gravité G des quatre points $ABCD$, c'est-à-dire le barycentre de ces quatre points affectés du même poids 1. Grâce à la règle du barycentre partiel, G est aussi le barycentre du centre de gravité I de BCD, affecté du poids 3, et du point restant A de poids 1. Il est donc situé aux 3/4 de la hauteur $[AI]$ à partir de A, soit $GA = (3/4)\ a\sqrt{6}/3 = a\sqrt{6} / 4$, ou encore $GA^2 = 3\,a^2 / 8$, et $GI^2 = a^2 / 24$. A son tour GB, dans le triangle rectangle GIB est tel que :

$$GB^2 = GI^2 + IB^2 = a^2 / 24 + a^2 / 3 = 3\,a^2 / 8, \text{ et } GB = a\sqrt{6} / 4$$

Il en est de même pour GC et GD. Finalement $GA = GB = GC = GD$, et G est le centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre, de centre G et de rayon $a\sqrt{6} / 4$. Si l'on veut une sphère de rayon 1, il suffit de faire $a\sqrt{6} / 4 = 1$, soit $a = 2\sqrt{6} / 3$. On retrouve ainsi exactement les conditions imposées à $ABCD$ dans la question précédente.



Les quatre calottes sphériques centrées aux sommets du tétraèdre régulier, et tangentes entre elles, correspondent à la disposition maximale.