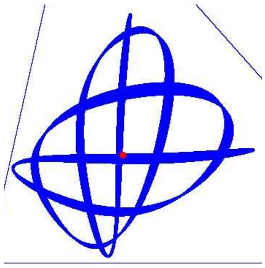
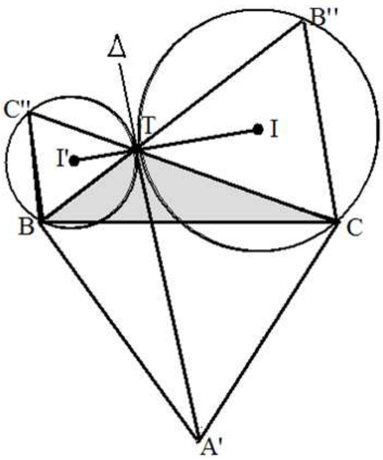
Point de Fermat-Torricelli d'un triangle *ABC*, et minimum de la somme *MA* + *MB* + *MC*



Etant donné un triangle *ABC* dans un plan, notre objectif est chercher où se trouve le ou les points *M* du plan tels que la somme *MA* + *MB* + *MC* soit la plus petite possible.[1] Pour cela nous allons traiter trois cas, le premier cas étant celui où le triangle a un angle de 120°, ce cas étant l'intermédiaire entre les deux autres, celui où le triangle possède un angle supérieur à 120° et celui où tous les angles du triangle sont inférieurs à 120°.

1. Cas particulier : Un angle du triangle vaut 120°



Appelons le triangle *TBC* au lieu de *ABC*, et supposons que l'angle *T* vaut 120°, plus précisément l'angle orienté (**TB**, **TC**) = $2\pi/3$. Puis traçons les triangles équilatéraux *TC''B* et *TCB''* à l'extérieur de *TBC*. Pour des raisons d'angles évidentes (l'angle (**TB**, **TB**'') vaut $2\pi/3 + \pi/3 = \pi$), les points *B*, *T*, *B''* ainsi que *C*, *T*, *C''* sont alignés dans cet ordre, et (*BC''*) est parallèle à (*CB''*). Traçons les cercles circonscrits aux deux triangles équilatéraux, leurs centres étant *I* et *I '*. Toujours pour des raisons d'angles (avec (*TI'*) perpendiculaire à (*BC''*) et (*TI*) perpendiculaire à (*CB''*)), les points *I'*, *T*, *I* sont alignés. Les deux cercles circonscrits aux triangles équilatéraux sont tangents. Ils admettent une tangente commune Δ en *T*.

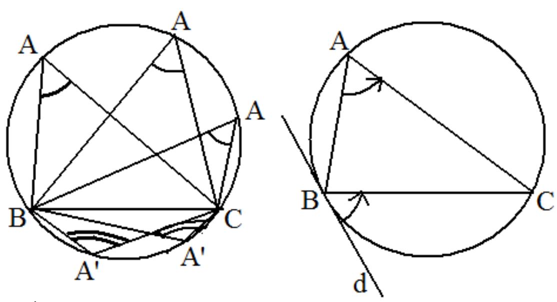
Traçons maintenant le troisième triangle équilatéral *BA'C* à l'extérieur de *TBC*. Son cercle circonscrit passe par *T* grâce au théorème de l'angle inscrit, puisque l'angle (**TB**, **TC**) = $2\pi/3 = -\pi/3 + \pi =$ (**A'B**, **A'C**) + π (*voir ci-dessous*)

Théorème de l'angle inscrit :

tous les angles *A* sont égaux, et à la limite l'angle *A* est égal à l'angle de la tangente *d* en *B* avec [*BC*),

tous les angles *A*' sont égaux,

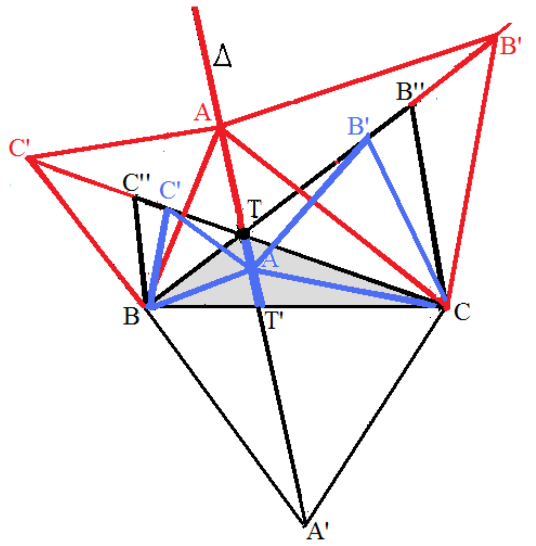
et (**AB**, **AC**) = (**A'B**, **A'C**) + π, ou encore, si l'on considère les angles *A* et *A*' comme non orientés, leur somme vaut 180°.



[1] Pourrait-il n'exister aucun point *M* avec la longueur *MA* + *MB* + *MC* minimale ? Non car toutes ces longueurs sont positives, et que l'évolution de *MA* + *MB* + *MC* est continue, il n'est pas possible que cette quantité tende vers une valeur minimale sans l'atteindre. Il y a forcément une valeur minimale.

Toujours grâce au théorème de l'angle inscrit relatif à la tangente *Δ* en *T*, (**TB**, **TA'**) = $\pi/3$, (*TA'*) est la bissectrice de l'angle *BTC*. Le point *T* est ainsi entouré de six demi-droites [*TB*), [*TA'*), [*TC*), [*TB''*), [*TΔ*), [*TC''*) qui font toutes entre elles un angle de 60°.

2. Le point de Torricelli



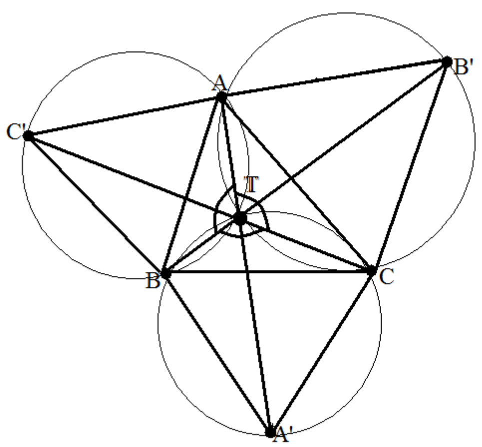
Conservons la configuration précédente avec le triangle *TBC*, et appelons *T'* le point d'intersection de la tangente *Δ* avec [*BC*]. Maintenant déplaçons un point *A* sur la demi-droite [*T'T*) portée par la tangente *Δ*.

Pour *A* sur]*T' T*[, au-dessous de *T* sur notre dessin, le triangle *ABC* (*en bleu*) a un angle supérieur à $2\pi/3$, et pour *A* au-dessus de *T*, le triangle *ABC* (*en rouge*) a tous ses angles inférieurs à $2\pi/3$. Le cas où *A* est en *T* est le cas particulier frontière.

Pour un triangle *ABC* ainsi obtenu, quel qu'il soit, traçons les trois triangles équilatéraux qui l'entourent en son extérieur. On obtient ainsi les triangles *AC'B*, *ACB'*, tandis que le triangle *BA'C* reste le même. On constate alors que le point *C'* se trouve sur (*CC''*) et que *B'* est sur (*BB''*). En effet la rotation de centre *B* et d'angle $\pi/3$ transforme tout point *A* sur *Δ* en *C'* qui se trouve sur l'image de *Δ*, à savoir la droite qui fait un angle de $\pi/3$ avec *Δ*, soit (*CC''*). De même la rotation de centre *C* et d'angle $-\pi/3$ envoie *Δ* en (*BB''*), et le point *B'* transformé de *A* se trouve sur (*BB''*).

Ainsi, pour chaque triangle *ABC*, les droites (*AA'*), (*BB'*), (*CC'*) sont concourantes au point *T*, ce point étant tel que (**TB**, **TC**) = (**TC**, **TA**) = (**TA**, **TB**) = $2\pi/3$ et l 'on a même des angles de 60° si l'on fait intervenir [*AA'*), [*BB'*), [*CC'*).

Ce que nous venons de faire est valable pour une infinité de triangles *ABC*, mais ceux-ci sont tous dépendants de la configuration initiale du triangle *TBC* avec sa droite *Δ* sur laquelle les points *A* se déplacent. Mais inversement, si l'on se donne un triangle *ABC*, on peut toujours tracer la droite (*AA'*) et le cercle circonscrit au triangle équilatéral *BA'C*, qui se coupent en *T*, avec l'angle *BTC* égal à 120°. On retombe alors sur notre configuration précédente, et l'on peut affirmer que *T* est le point d'intersection de (*AA'*), (*BB'*), (*CC'*) ou encore des cercles circonscrits aux trois triangles équilatéraux. avec (**TB**, **TC**) = (**TC**, **TA**) = (**TA**, **TB**) = $2\pi/3$. Ce point *T* ainsi trouvé pour un triangle *ABC* quelconque, est appelé point de Torricelli du triangle.



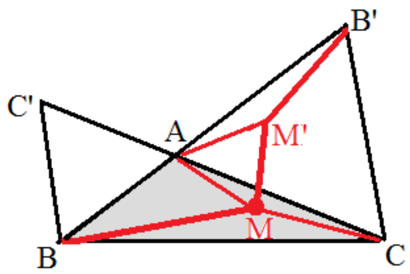
Point de Torricelli *T* du triangle *ABC*

3. Minimum de *MA* + *MB* + *MC*

Venons-en maintenant à notre problème initial, consistant à chercher où sont les points *M* minimisant la distance *MA* + *MB* + *MC*. C'est ce problème qu'avait traité Fermat, d'où le nom de point de Fermat, et comme ce point se trouve être le point de Torricelli dans les cas les plus courants, comme on va le constater, c'est la raison pour laquelle les deux noms sont liés. Pour traiter le problème, distinguons les trois cas de triangles.

1) Le triangle *ABC* a un angle de 120°.

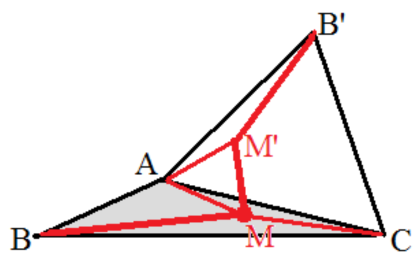
Supposons qu'il s'agit du point *A*, qui est confondu avec *T*, le point de Torricelli du triangle, comme nous l'avons vu.



Considérons la rotation de centre *A* et d'angle $\pi/3$: elle fait passer d'un point *M* quelconque à *M'*, avec *AMM'* équilatéral, et de *C* à *B'*, ce qui entraîne que *M'B'* = *MC*. Dans ces conditions, *MA* + *MB* + *MC* = *BM* + *MM'* + *M'B'*, qui est une ligne brisée allant de *B* à *B'*. Or le plus court chemin de *B* à *B'* est la ligne droite. En prenant *M* en *A*, on est assuré d'avoir la plus petite valeur de *MA* + *MB* + *MC*, soit *BB'*.

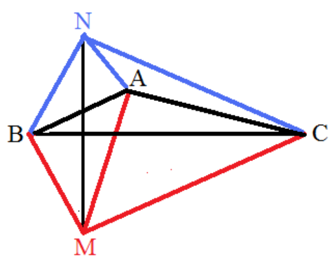
On vient de trouver une solution unique à notre problème, et la position du point *M* est le point de Torricelli *A*.

2) Le triangle *ABC* a un angle supérieur à 120°, en *A*.



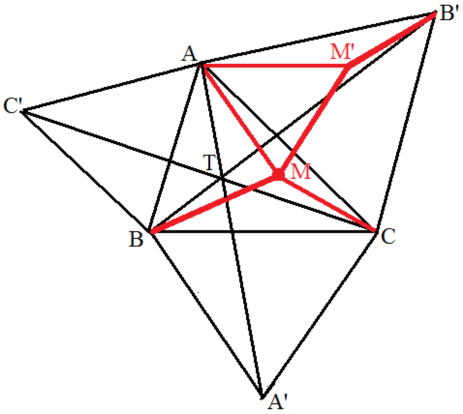
Prenons d'abord le point *M* à l'intérieur (au sens large) du triangle *ABC*. On a encore *MA* + *MB* + *MC* = *BM* + *MM'* + *M'B*. Les points de la ligne brisée *BMM'B'* sont au-dessous, dans le contexte de notre dessin, de ceux de la ligne brisée *BAC*, elle-même au-dessous de la ligne droite (*BB'*). On en déduit que la ligne *BAC* est la plus courte des lignes brisées *BMM'B'*. Le point *A* donne la valeur minimale de *MA* + *MB* + *MC* lorsque le point *M* est dans le triangle.

Supposons maintenant que le point *M* est à l'extérieur strict du triangle *ABC*. Prenons par exemple le point *M* au-dessous de (*BC*) sur notre dessin, c'est-à-dire dans le demi-plan délimité par (*BC*) et ne contenant pas *A*. Construisons le symétrique *N* de *M* par rapport à (*BC*), ce qui entraîne que *NB* = *MB* et *NC* = *MC*. D'autre part, avec *N* dans le demi-plan contenant *A*, *NA* > *MA*. On est alors assuré que *MA* + *MB* + *MC* > *NA* + *NB* + *NC*. Un tel point *M* ne peut jamais correspondre à un minimum puisque le point *N* est meilleur. Il en est ainsi pour tout point strictement extérieur à *ABC*, puisque ce que l'on a fait avec le demi-plan extérieur délimité par (*BC*) on peut aussi bien le faire avec les deux autres demi-plans extérieurs délimités par (*CA*) ou (*AB*). Aucun point strictement extérieur au triangle ne peut minimiser *MA* + *MB* + *MC*. Remarquons que le point *T* de Torricelli est un point extérieur, et qu'il ne correspond pas dans ce cas à un minimum. D'où cette conclusion finale :



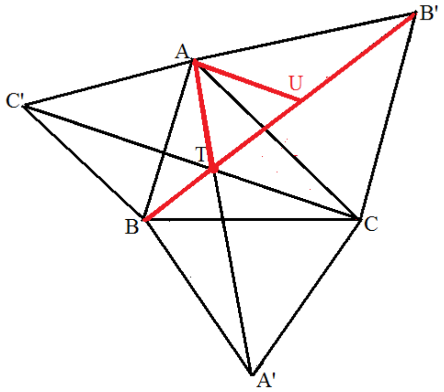
Le point qui minimise *MA* + *MB* + *MC* est le point *A*.

3) Le triangle *ABC* a tous ses angles inférieurs à 120°.



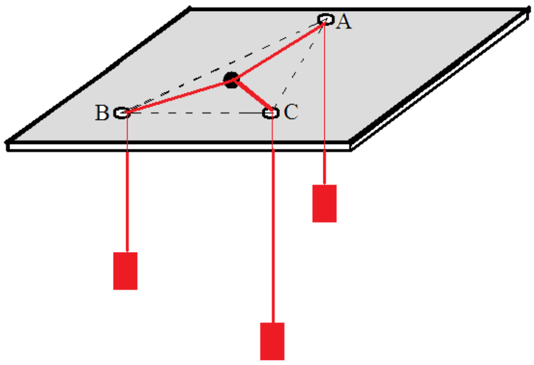
A la différence du cas précédent, le point de Torricelli *T* est à l'intérieur du triangle *ABC*. Toujours grâce à la rotation de centre *A* et d'angle $\pi/3$, la longueur *MA* + *MB* + *MC* est égale à *BM* + *MM'* + *M'B'*, qui celle d'une ligne brisée allant de *B* à *B'*.

Le plus court chemin de *B* à *B'* est en ligne droite, soit *BB'*. Mais existe-t-il un point *M* tel que *MA* + *MB* + *MC* = *BB'*?

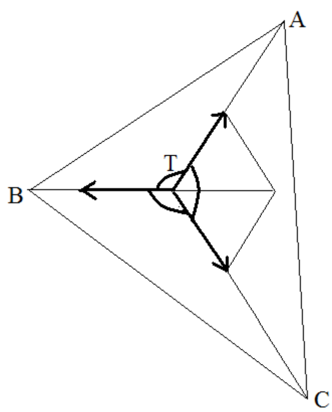


Prenons le point *T*. Lors de la rotation autour de *A*, le point *T* devient le point *U*, avec *ATU* équilatéral, et ce point *U* se trouve sur [*TB'*] car on a vu que l'angle (**TB', TA**) = $\pi/3$. Avec *UB'* = *TC* à cause de la rotation, on obtient *TA* + *TB* + *TC* = *BT* + *TU* + *UB'* = *BB'* car les points *B*, *T*, *U*, *B'* sont alignés dans cet ordre. On vient de trouver un point qui réalise le minimum de *MA* + *MB* + *MC*. Mais est-il le seul ? Oui, car tout autre point *M* qui pourrait prétendre réaliser le minimum devrait être sur (*BB'*), mais si ce n'est pas *T*, le point *M'* image de *M* par la rotation n'est pas sur (*BB'*) et l'on a une ligne brisée plus longue que (*BB'*).

Le point unique qui rend *MA* + *MB* + *MC* minimal est le point de Torricelli *T* du triangle.



On peut retrouver ce résultat en faisant l'expérience de physique suivante. Sur une plaque horizontale ont été percés trois trous là où sont les points *A*, *B*, *C*. Puis on accroche trois ficelles à un petit objet (sans poids et glissant) placé en un point *M* de la plaque. Chaque ficelle passe à travers un trou, et elle est tendue en lui mettant un poids à son extrémité. Les trois ficelles sont prises chacune avec la même longueur et avec le même poids. L'objet en *M* est soumis à trois forces égales dans les directions [*MA*), [*MB*), [*MC*).



Le point *M* sera un point d'équilibre si la somme des trois forces est nulle. Il est aisé de vérifier que cela ne se produit que si les trois forces font entre elles trois angles de 120°. On retrouve ainsi le point de Torricelli du triangle *ABC*. Cette position d'équilibre correspond à une énergie potentielle la plus petite possible du système, c'est-à-dire avec les poids situés le plus bas possible. Cela signifie que la somme des longueurs de morceaux de ficelles verticaux sous les trous est la plus grande possible, ou encore que la somme *MA* + *MB* + *MC* des morceaux horizontaux est la plus petite possible. On retrouve ainsi le fait que le point de Torricelli est celui qui minimise la somme *MA* + *MB* + *MC*.

Cela nous convie à réaliser l'expérience sur ordinateur. Le temps est découpé en petits intervalles dt. A chaque instant, on calcule la somme des trois forces, chacune ayant pour amplitude 1. Ainsi l'une d'elles est **MA** / MA. Cette somme est aussi à un facteur près l'accélération **Acc** à l'instant concerné. Puis on applique le fait que d**V** / dt = **Acc**, ce qui donne la variation de la vitesse pendant chaque dt, soit d**V** = **Acc** dt. Connaissant la vitesse à chaque instant, on en déduit la variation de position du point M pendant dt, soit d**OM** = **V** dt. Pour éviter un mouvement infini, on rajoute si l'on veut un léger frottement **-** r **V**, r étant le coefficient de frottement, et le point M va alors converger vers le point d'équilibre, dont on pourra constater qu'il s'agit bien du point de Torricelli T. C'est ce que fait le programme suivant :

```
xa=0.2,ya=0.9;  xb=0.; yb=0.; xc=1.;yc=0.; /* coordonnées de A, B, C */
line(xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,xorig+zoom*xb,yorig-zoom*yb,blue); /* triangle ABC */
line(xorig+zoom*xb,yorig-zoom*yb,xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,blue);
line(xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,blue);
xaa=0.5; yaa=-sqrt(3.)/2.;  /* points A', B', C' et tracé des trois triangles équilatéraux */
xcc=0.5*(xa-ya*sqrt(3.)); ycc=0.5*(xa*sqrt(3.)+ya);
xbb=xc+0.5*(xa-xc)+0.5*sqrt(3.)*(ya-yc);
ybb=yc-0.5*sqrt(3.)*(xa-xc)+0.5*(ya-yc);;
line(xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,xorig+zoom*xaa,yorig-zoom*yaa,blue);
line(xorig+zoom*xb,yorig-zoom*yb,xorig+zoom*xaa,yorig-zoom*yaa,blue);
line(xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,xorig+zoom*xaa,yorig-zoom*yaa,blue);
line(xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,xorig+zoom*xcc,yorig-zoom*ycc,blue);
line(xorig+zoom*xb,yorig-zoom*yb,xorig+zoom*xcc,yorig-zoom*ycc,blue);
line(xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,xorig+zoom*xcc,yorig-zoom*ycc,blue);
line(xorig+zoom*xb,yorig-zoom*yb,xorig+zoom*xbb,yorig-zoom*ybb,blue);
line(xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,xorig+zoom*xbb,yorig-zoom*ybb,blue);
line(xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,xorig+zoom*xbb,yorig-zoom*ybb,blue);

q=0.5; /* coefficient pour les forces */
 r=0.002; /* coefficient de frottement */
dt=0.00001; /* temps découpé en petits intervalles dt */
x=0.6; y=1.5;  filldisc(xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,2,red); /* point M au départ */
vx=0.;vy=0.; /* vitesse initiale nulle, mais cela peut être modifié si l'on veut */

for(;;)  /* boucle du temps */
{  compteur++;  /* comptage des dt */
   if (compteur==1000000)  break;  /* fin de boucle */
   xMA=xa-x; yMA=ya-y; xMB=xb-x; yMB=yb-y; xMC=xc-x; yMC=yc-y;
   MA=sqrt(xMA*xMA+yMA*yMA);
   MB=sqrt(xMB *xMB+yMB*yMB);
   MC=sqrt(xMC*xMC+yMC*yMC);
   a1x=q/MA*xMA; a1y=q/MA*yMA; /* les trois forces, ou les trois accélérations, de même amplitude */
   a2x=q/MB*xMB; a2y=q/MB*yMB;
   a3x=q/MC*xMC; a3y=q/MC*yMC;
   ax=a1x+a2x+a3x-r*vx; ay=a1y+a2y+a3y-r*vy; /* accélération */
   vx+=ax; vy+=ay;  /* augmentation de la vitesse pendant le temps dt */
   x+=vx*dt;y+=vy*dt; /* nouvelle position de M après chaque dt */
   xe=xorig+zoom*x; ye=yorig-zoom*y; /* dessin du point M (xe, ye) sur l'écran */
   if (xe>0 && xe<800 && ye>0 && ye<600)   circle(xe,ye,1,black);
}
```

Lorsque l'on prend un petit frottement (r = 0,002 dans notre programme), on constate que la trajectoire du point M vient se coller sur le point T après quelques oscillations plutôt irrégulières. Pour un frottement plus fort (r = 0,01), la trajectoire converge assez directement vers T. Par contre, avec un frottement nul, la trajectoire a tendance à tournoyer de façon assez erratique autour du point T, et son dessin remplit une surface aux contours assez tourmentés (*figure 1*). On constate cependant, dans certains cas particuliers que la trajectoire est une sorte de courbe qui est parcourue de nombreuses fois avec des allers-retours répétés avec deux points de rebroussement (*figure 2*).

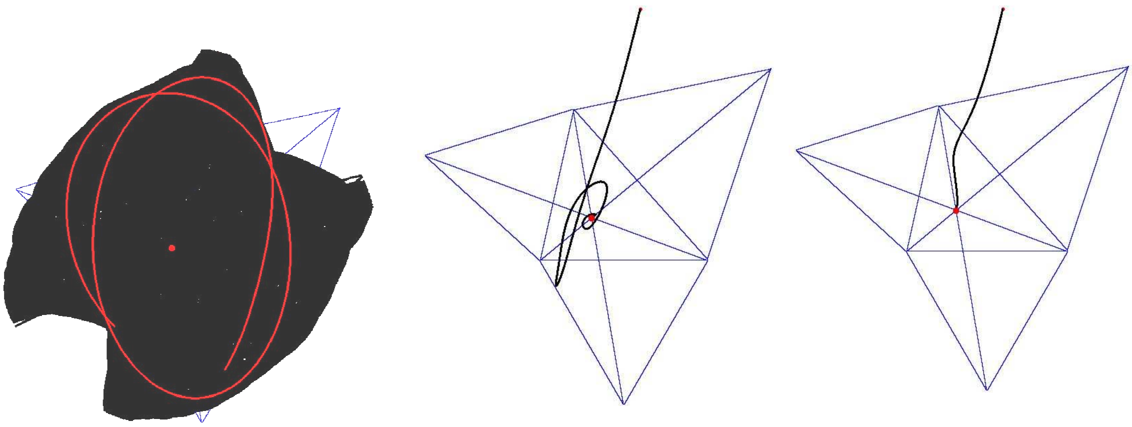


Figure 1 : Trajectoires pour $r = 0$, $r = 0{,}01$ et $r = 0{,}002$ *de gauche à droite*. Pour $r = 0$, la trajectoire remplit la surface noire, et l'on a mis en rouge un petit morceau de cette trajectoire.

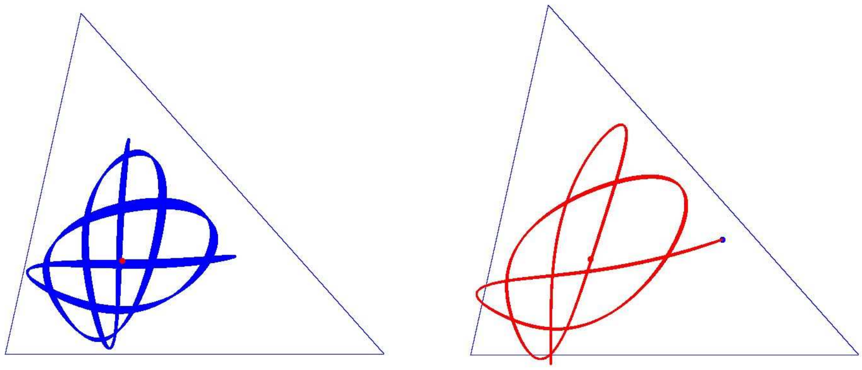


Figure 2 : Pour certaines conditions initiales, trajectoire faisant des allers-retours suivant une forme proche d'une courbe

Ce dispositif physique permet de généraliser le point de Torricelli que l'on vient d'obtenir comme point d'équilibre de trois forces égales en amplitude. On peut de la même façon prendre des forces d'amplitude différente. Cette méthode est proposée par H. Steinhaus.[2] Il suffit de construire les trois vecteurs correspondants de façon que leur somme soit nulle. Puis en utilisant les angles obtenus entre ces vecteurs, on trouve encore un point dans le triangle *ABC*. Sous réserve que ce point soit à l'intérieur du triangle, toute trajectoire soumise à ces forces, auxquelles est ajouté un frottement, converge vers ce point d'équilibre.

Exemples

1) Les forces ont une amplitude proportionnelle à 3, 4, 5. Leur somme est nulle lorsque leurs angles sont 90°, 135° et 135°. En utilisant le théorème de l'angle inscrit, le point d'équilibre se trouve à l'intersection de trois arcs de cercle dans *ABC*, l'un étant le demi-cercle de diamètre [*AB*], les deux autres étant ceux sous lesquels on voit [*BC*] et [*CA*] sous un angle de 135°. Cela se vérifie sur ordinateur en faisant agir les trois forces concernées, ce qui nécessite une légère modification du programme (il suffit de tenir compte des amplitudes 3, 4, 5 au lieu de 1, 1, 1 pour le point de Torricelli), et l'on constate bien que la trajectoire converge vers le point d'équilibre avec les angles de 90°, 135° et 135° (*figure 3 à gauche*).

2) Les forces sont proportionnelles à 1, 1, $\sqrt{2}$, ce qui donne encore un angle droit (*figure 3 à droite*).

[2] cf. *H. Steinhaus, Mathématiques en instantanés, Ed. Flammarion*, avec explications de B. Bettinelli dans *le point de Torricelli d'un triangle, www.univ-fcomte/...*

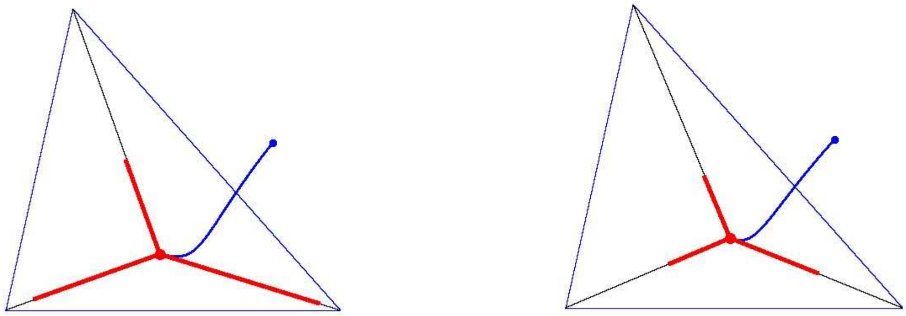


Figure 3 : Convergence d’une trajectoire (avec frottement élevé) vers le point d’équilibre, avec la somme des forces (*en rouge*) nulle, lorsque les forces ont pour amplitude 3, 4, 5 *à gauche*, et 1, 1, $\sqrt{2}$ *à droite*

Cela a des applications concrètes. Supposons par exemple que l’on ait trois villages en *A*, *B*, *C* avec des populations proportionnelles à *a*, *b*, *c* (comme 3, 4, 5 dans notre premier exemple). On veut les relier à un central téléphonique commun qui nécessite un nombre de fils de liaison proportionnel à la population de chaque village. Pour avoir une longueur totale des fils minimale, il suffit de placer le central téléphonique au point d’équilibre tel qu’on l’a obtenu avec la méthode de Steinhaus.