

Triangle orthique et trajectoire de lumière

Considérons un triangle ABC , et traçons ses trois hauteurs $[AI]$, $[BJ]$, $[CK]$, les points I , J , K étant les pieds des hauteurs situés sur les côtés du triangle ABC . Le triangle IJK est appelé triangle orthique. Ce qui suit, sous forme d'exercices, fait le lien entre ce triangle orthique et des trajectoires lumineuses où les côtés du triangle font office de miroirs sur lesquels se réfléchit la lumière.

1. Triangle orthique et trajectoire lumineuse

1.1. Montrer que si le triangle ABC , choisi de sens direct, a ses trois angles aigus ($< 90^\circ$) les points I , J , K sont sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle, et que l'orthocentre H , point d'intersection des hauteurs, est à l'intérieur du triangle.

Montrons que le point I est sur $]BC[$ dès que les angles \hat{B} et \hat{C} sont aigus. Formons le produit scalaire¹ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cos B > 0$ puisque l'angle \hat{B} est aigu, et l'on a aussi $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$, ce qui prouve que \overrightarrow{BI} et \overrightarrow{BC} sont de même sens : I est sur $]B C)$. Faisons de même avec $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CB} > 0$, et I est sur $]CB)$. Le point I est bien sur $]BC[$. Il en est de même pour J et K . Le point H d'intersection des trois segments hauteurs, qui sont situés à l'intérieur du triangle, est aussi à l'intérieur (figure 1).

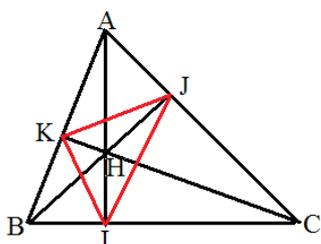


Figure 1 : Triangle orthique IJK et orthocentre H lorsque les angles de ABC sont tous aigus.

1.2. Que se passe-t-il si le triangle ABC a un angle obtus ($> 90^\circ$) ?

Supposons par exemple que l'angle \hat{A} soit obtus, les deux autres angles ne pouvant être qu'aigus. On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos A < 0$ et à son tour $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$, donc K est à l'extérieur de $[AC]$, du côté de A . De même J est à l'extérieur de $[BA]$. Seul I est sur $[BC]$. L'orthocentre H est à l'extérieur du triangle ABC (figure 2).

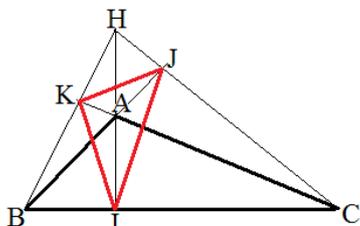


Figure 2 : Triangle orthique lorsque le triangle ABC a un angle obtus. A noter l'analogie de cette figure avec la figure 1, si l'on échange A et H .

¹ Rappelons que les vecteurs sont ici écrits en caractères gras.

1.3. Montrer que les trois bissectrices du triangle orthique IJK sont les hauteurs du triangle ABC .

Précisons que cela vaut pour les deux types de triangles vus au 1° et au 2°. Les deux figures sont en effet identiques si l'on échange A et H . Sans perte de généralité, supposons que le triangle ABC a ses trois angles aigus.

Avec les angles droits en I et J , le cercle de diamètre $[AB]$ passe par I et J . Grâce au théorème de l'angle inscrit, les angles $(\mathbf{IJ}, \mathbf{IA})$ et $(\mathbf{BI}, \mathbf{BK})$ voient le même arc AI et sont tous deux situés *en dessous* de (AI) ou (AB) dans le contexte du dessin de la *figure 3-a*, à l'intérieur de ABC si l'on préfère. Ces deux angles sont égaux modulo 2π .

De même, avec le cercle de diamètre $[AC]$ passant par I et K , on a $(\mathbf{IA}, \mathbf{IK}) = (\mathbf{CA}, \mathbf{CK})$, les points I et C étant sur le même grand arc AK (*figure 3-b*). Enfin, avec le cercle de diamètre $[BC]$ passant par J et K , on a aussi $(\mathbf{CI}, \mathbf{CK}) = (\mathbf{BI}, \mathbf{BK})$ (*figure 3-c*).

Finalement, $(\mathbf{IJ}, \mathbf{IA}) = (\mathbf{IA}, \mathbf{IK})$, et $[IA]$ est la bissectrice de l'angle \hat{I} du triangle IJK . Ce que l'on a fait avec I vaut aussi pour J et K .

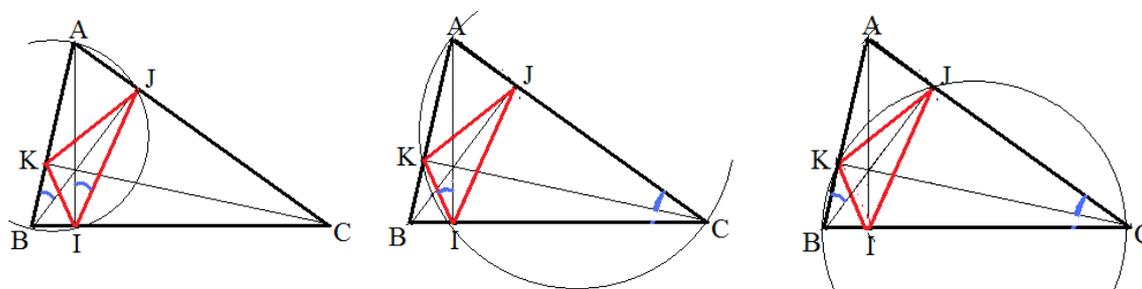


Figure 3- a, b, c : Egalité d'angles inscrits.

1.4. En déduire qu'en remplaçant les trois côtés du triangle ABC par des miroirs, IJK est une trajectoire de lumière, celle-ci ne cessant de rebondir en I, J, K . Mais cela ne vaut que si ABC a ses trois angles aigus.

La loi de la réflexion indique que le rayon lumineux incident et le rayon réfléchi en un point d'un miroir sont symétriques par rapport à la normale (la perpendiculaire) au miroir en ce point. C'est justement le cas en I, J, K . Ainsi, un rayon lumineux partant de I et se dirigeant vers J se réfléchit en J pour aller vers K , puis se réfléchit en K pour revenir en I , puis repart vers J après réflexion, et cela indéfiniment. Mais cela ne vaut que si les points I, J, K sont sur les côtés-miroirs du triangle ABC , ce qui impose que les trois angles du triangle soient aigus.

1.5. Construire par programme le triangle orthique. Puis en lançant un trait lumineux de I vers J , vérifier que la trajectoire de lumière ne cesse de le parcourir. Enfin, tout en partant du point I , mais en décalant très légèrement le trait initial par rapport à $[IJ]$, constater expérimentalement que la trajectoire est instable et se sépare inéluctablement du triangle orthique.

Donnons-nous un triangle ABC à angles aigus, avec A de coordonnées $(x[0], y[0])$, etc. Les points I, J, K , avec I de coordonnées $(xx[0], yy[0])$, etc., sont chacun déterminés par intersection entre un côté et la perpendiculaire à ce côté menée par le sommet concerné. Les pentes des côtés $[BC], [CA], [AB]$, sont notées $m[i]$ avec i de 0 à 2. Il est supposé que ces pentes existent et leurs inverses utilisés pour les perpendiculaires aussi, ce qui sous-entend que les droites concernées ne sont ni exactement verticales ni exactement horizontales. Les résultats des calculs correspondants sont donnés dans le programme.

Comme conditions initiales, on lance une ligne partant de I et dirigée vers J , portée par le vecteur unitaire \mathbf{V}_0 . Puis on lance la grande boucle du programme, où la trajectoire rebondit sur chacun des côtés successivement. On notera I', J', K' les points de rebonds obtenus à chaque tour, leurs

coordonnées étant notées $(xx[i],yy[i])$ pour i de 0 à 2. On est seulement assuré que la première fois que le rayon tombe sur $[AC]$, le point J' est confondu avec J , à cause des conditions initiales. Ces points J' , K' , I' sont calculés à chaque étape, comme intersections du rayon lumineux et des côtés du triangle sur lesquels le rayon tombe, avant de se réfléchir et de repartir vers le côté suivant.

Comment avoir les coordonnées de ces points de rebond ? On prend l'équation du côté sur lequel le rayon va rebondir, de la forme $y = m x + p$, et pour le rayon lumineux, on prend ses équations paramétriques, en utilisant le fait qu'il passe par le point de rebond précédent (x_0, y_0) et de vecteur directeur $\mathbf{V}(a, b)$, soit $x = x_0 + a t$, $y = y_0 + b t$. En résolvant le système d'équations on trouve la valeur de t pour laquelle on a le nouveau point de rebond, dont on peut alors connaître les coordonnées. Les résultats de ces calculs sont donnés dans le programme.

Il reste à connaître le vecteur du rayon réfléchi \mathbf{V}_r lorsque l'on a le vecteur \mathbf{V}_i du rayon incident au point concerné. Pour cela on a besoin du vecteur \mathbf{N} normal (perpendiculaire) et de longueur unité du côté. Ce calcul est fait pour les trois vecteurs $\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ associés aux côtés de ABC . Les deux vecteurs unitaires $-\mathbf{V}_i$ et \mathbf{V}_r , eux aussi de longueur unité, sont symétriques par rapport à \mathbf{N} (figure 4). Les vecteurs $-\mathbf{V}_i$ et \mathbf{V}_r ont des projections égales sur le vecteur \mathbf{N} , qui n'est autre que le produit scalaire $-\mathbf{V}_i \mathbf{N} = RR'$. On en déduit que $-\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_r = 2(-\mathbf{V}_i \mathbf{N}) \mathbf{N}$, et $\mathbf{V}_r = 2(-\mathbf{V}_i \mathbf{N}) \mathbf{N} + \mathbf{V}_i$. Ce vecteur réfléchi devient à son tour le vecteur incident pour le rebond suivant.

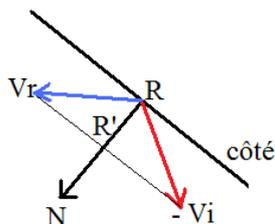


Figure 4 : Lien entre les vecteurs incident et réfléchi.

On en déduit le programme :

```
zoom=160.;
x[0]=-1.5;y[0]=1.5; x[1]= -1.;y[1]=-1.;x[2]=2.;y[2]=1.; /* le triangle ABC initial, indexé 012 */
dessintriangle(x[0],y[0],x[1],y[1],x[2],y[2]); /* fonction auxiliaire, à faire soi-même */
/* points I, J, K de coordonnées xx[i], yy[i] avec i de 0 à 2, que l'on peut dessiner par filldisc() */
m[0]=(y[2]-y[1])/(x[2]-x[1]); /* pente de la droite (BC) */
xx[0]=m[0]*(m[0]*x[1]-y[1]+x[0])/m[0]+y[0]/(m[0]*m[0]+1.); yy[0]=m[0]*xx[0]-m[0]*x[1]+y[1];
m[1]=(y[0]-y[2])/(x[0]-x[2]); /* pente de la droite (CA) */
xx[1]=m[1]*(m[1]*x[2]-y[2]+x[1])/m[1]+y[1]/(m[1]*m[1]+1.); yy[1]=m[1]*xx[1]-m[1]*x[2]+y[2];
m[2]=(y[1]-y[0])/(x[1]-x[0]); /* pente de la droite (AB) */
xx[2]=m[2]*(m[2]*x[0]-y[0]+x[2])/m[2]+y[2]/(m[2]*m[2]+1.); yy[2]=m[2]*xx[2]-m[2]*x[0]+y[0];
/* vecteurs intérieurs normaux, perpendiculaires aux côtés */
N0x=-m[0]/sqrt(1.+m[0]*m[0]); N0y=1./sqrt(1.+m[0]*m[0]);
N1x=m[1]/sqrt(1.+m[1]*m[1]); N1y=-1./sqrt(1.+m[1]*m[1]);
N2x=-m[2]/sqrt(1.+m[2]*m[2]); N2y=1./sqrt(1.+m[2]*m[2]);
/* vecteur initial unitaire V0, partant du point I, et dirigé de I vers J*/
L0=sqrt((xx[1]-xx[0])*(xx[1]-xx[0])+(yy[1]-yy[0])*(yy[1]-yy[0]));
V0x=(xx[1]-xx[0])/L0; V0y=(yy[1]-yy[0])/L0; /* vecteur unité, dirigé de I vers J */
linewidthwidth(xorig+zoom*xx[0],yorig-zoom*yy[0],
xorig+zoom*(xx[0]+V0x),yorig-zoom*(yy[0]+V0y),1,red);
SDL_Flip(screen);pause();
/***** BOUCLE de la trajectoire lumineuse *****/
for(i=1;i<20000;i++)
{ /* point d'intersection J' du rayon parti de I' avec le côté AC */
t1=(m[1]*xx[0]-m[1]*x[0]+y[0]-yy[0])/(V0y-m[1]*V0x); xx[1]=xx[0]+V0x*t1; yy[1]=yy[0]+V0y*t1;
/* ligne I' J' */
linewidthwidth(xorig+zoom*xx[0],yorig-zoom*yy[0], xorig+zoom*xx[1],yorig-zoom*yy[1],1,red);
```

```

/* vecteur réfléchi allant de J à K */
prodsal=-V0x*N1x-V0y*N1y; V1x=2.*prodsal*N1x+V0x; V1y=2.*prodsal*N1y+V0y;
/* point d'intersection K' du rayon parti de J avec le côté AB */
t2=(m[2]*xx[1]-m[0]*x[0]+y[0]-yy[1])/(V1y-m[2]*V1x); xx[2]=xx[1]+V1x*t2; yy[2]=yy[1]+V1y*t2;
/* ligne J'K' */
linewidth(xorig+zoom*xx[1],yorig-zoom*yy[1], xorig+zoom*xx[2],yorig-zoom*yy[2],1,red);
/* vecteur réfléchi allant de K' à I' */
prodsal=-V1x*N2x-V1y*N2y; V2x=2.*prodsal*N2x+V1x; V2y=2.*prodsal*N2y+V1y;
/* point d'intersection I' du rayon parti de K' avec le côté BC */
t3=(m[0]*xx[2]-m[0]*x[1]+y[1]-yy[2])/(V2y-m[0]*V2x); xx[0]=xx[2]+V2x*t3; yy[0]=yy[2]+V2y*t3;
/* ligne K'I' */
linewidth(xorig+zoom*xx[2],yorig-zoom*yy[2], xorig+zoom*xx[0],yorig-zoom*yy[0],1,red);
/* vecteur réfléchi allant de I' à J' */
prodsal=-V2x*N0x-V2y*N0y; V0x=2.*prodsal*N0x+V2x; V0y=2.*prodsal*N0y+V2y;
}

```

On constate qu'après quelques dizaines de milliers de tours, la trajectoire lumineuse ne cesse de se coller sur le triangle orthique IJK (figure 5 à gauche). Mais pour autant cette trajectoire n'est pas stable. Il suffit pour le constater de changer très légèrement les conditions initiales du programme précédent, en partant toujours du point I , mais en décalant à peine le vecteur initial. Après le calcul du vecteur V_0 , il suffit d'ajouter :

```

V0x=V0x+0.01;
L0=sqrt(V0x*V0x+V0y*V0y);
V0x=V0x/L0;V0y=V0y/L0;

```

Avec ce nouveau vecteur, très proche du précédent, on observe que la trajectoire ne cesse de s'éloigner du triangle orthique (figure 5 à droite).

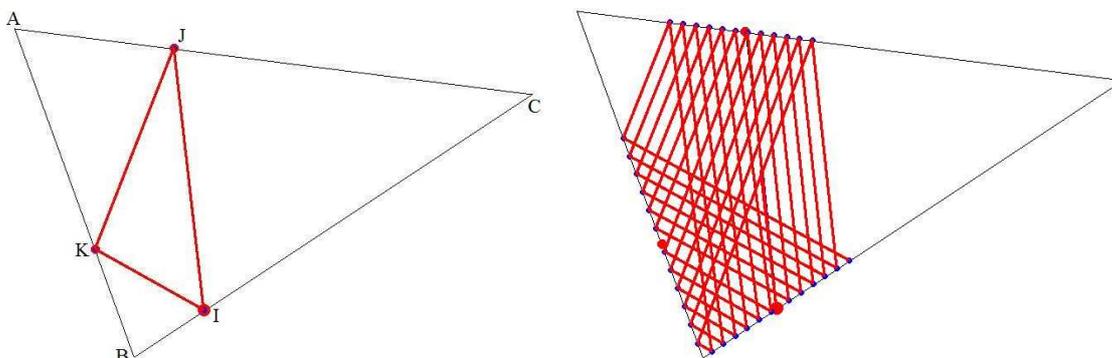


Figure 5 : A gauche, la trajectoire de lumière démarrant de I vers J , et toujours invariable après quelques dizaines de milliers de tours. A droite, avec le même point de départ I mais un rayon initial légèrement décalé par rapport à (IJ) , la trajectoire ne cesse de se séparer du triangle orthique, comme sur le dessin avec seulement 12 tours parcourus.

2. Triangle orthique d'un triangle ABC et triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC

Le problème consiste à inscrire un triangle MNP dans un triangle ABC , avec M, N, P sur les côtés respectifs $[BC], [CA], [AB]$, et à chercher la configuration qui rend minimale le périmètre de MNP . Nous verrons que cela n'a de sens que si les trois angles de ABC sont aigus ($< 90^\circ$), et qu'alors le triangle de périmètre minimal est le triangle orthique de ABC .

2.1. Prendre un point M quelconque sur $]BC[$, ainsi que deux points N et P sur $]CA[$ et $]AB[$. En utilisant les symétriques de M par rapport aux côtés (AC) et (AB) , soit M' et M'' , déterminer pour quelles positions de N et P , M restant fixé, le triangle MNP a un périmètre minimal. Vérifier que le

problème n'a d'intérêt que si les angles de ABC sont tous aigus, en prouvant que dans ce cas les deux points N et P sont bien sur $]CA[$ et $]AB[$.

Prenons un triangle MNP inscrit dans ABC . A cause des symétries, on a $M'N = MB$ et $M''P = MP$. Le périmètre de MNP est égal à la longueur de la ligne brisée $M'NPM''$. Lorsque l'on garde M fixé, la ligne brisée $M'NPM''$ a une longueur minimale si ces points sont alignés. Cette longueur est alors $M'M''$ (figures 6 et 7). Distinguons deux cas selon la forme du triangle ABC initial.

- Le triangle ABC a un angle obtus en A .² On constate que $(M'M'')$ ne traverse pas le triangle ABC (figure 6 à gauche). En effet, à cause de la symétrie par rapport à (AB) , on a $(AM, AB) = (AB, AM'')$, et de même $(AC, AM) = (AM', AM)$, d'où $(AM', AM'') = 2(AC, AB)$, ce qui donne un angle rentrant puisque l'angle \hat{A} du triangle ABC est obtus (figure 6 à droite). Le secteur angulaire associé à l'angle $M'AM''$ ne traverse pas le triangle ABC , et $[M'M'']$ ne coupe pas les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Dans ces conditions, le plus court chemin entre M' et M'' qui touche les côtés $[AB]$ et $[AC]$ est la ligne brisée $M'AM''$. Mais alors le triangle de périmètre minimal se réduit à un triangle aplati MAM , réduit à un segment, ce qui est sans intérêt.

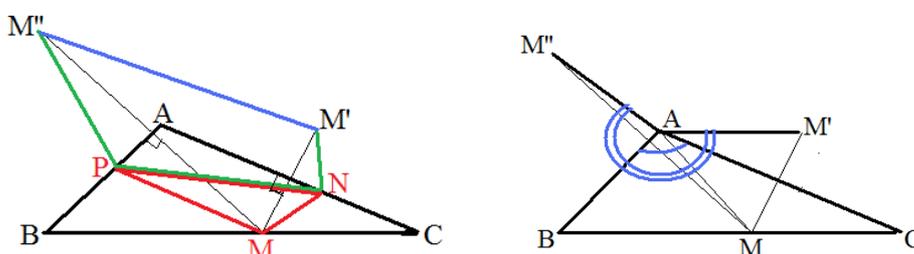


Figure 6 : Cas d'un triangle avec l'angle en A obtus.

- Le triangle ABC a ses trois angles aigus (figure 7 à gauche). Pour M donné sur $]BC[$, on constate que le segment $[M'M'']$ correspondant au périmètre minimal coupe bien les côtés $[AB]$ et $[AC]$ en deux points N et P (figure 7 à droite), ce qui donne le triangle inscrit de périmètre minimal MNP . Il reste à le prouver.

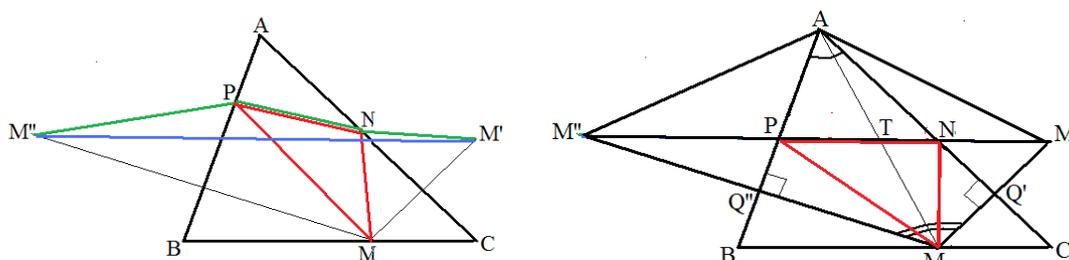


Figure 7 : A gauche, le triangle inscrit MNP en rouge, son périmètre déplié suivant la ligne brisée $M'NPM''$ en vert, et le plus court $M'M''$ en bleu. A droite, le triangle de périmètre minimal, pour M donné, en rouge.

Appelons Q' et Q'' les points d'intersection de (MM'') et (AB) d'une part, et de (MM') et (AC) d'autre part, avec les angles droits correspondants. Le quadrilatère $AQ'MQ''$ possède ces deux angles droits, ainsi que l'angle \hat{A} aigu du triangle ABC . On en déduit que son angle en M , égal à $180^\circ - \hat{A}$, est obtus. Considérons le quadrilatère $AM'MM''$. Pour les mêmes raisons que précédemment, l'angle $M'AM''$ est égal à deux fois l'angle \hat{A} du triangle ABC . Le secteur angulaire $\sphericalangle BAC$ est contenu dans le secteur angulaire $\sphericalangle M'AM''$. Avec M lui aussi inclus dans le secteur angulaire $\sphericalangle BAC$, le quadrilatère $AM'MM''$ ne peut pas être un quadrilatère croisé. Il n'est pas non plus concave, puisque la somme de

² En toute rigueur, il conviendrait aussi de traiter le cas où c'est l'angle \hat{B} qui est obtus.

ses deux angles en A et M vaut 180° , aucun des deux angles en M' et M'' ne peut excéder 180° . Le quadrilatère $AM''MM'$ est donc convexe, et ses diagonales $[M'M'']$ et $[AM]$ se coupent en un point T intérieur au triangle ABC (figure 7 à droite). Le triangle AMM'' contient le segment $[M''T]$ en son intérieur, et celui-ci coupe la hauteur $[AQ''']$ du triangle en P . Finalement P est bien sur $[AB]$. Et de même pour N , qui est sur $[AC]$. On a bien trouvé, pour M donné, un triangle unique de périmètre minimal inscrit dans ABC .

2.2. Trouver la position de M , et par suite celles de N et P , qui donnent un triangle MNP de périmètre minimal, le triangle ABC ayant ses trois angles aigus. Vérifier qu'il s'agit du triangle orthique.

Prenons M sur $[BC]$. On a vu que le périmètre minimal est $M''M'$ et que l'angle $M''AM'$ est égal à deux fois l'angle \hat{A} de ABC . Appliquons la formule d'AL Kashi dans le triangle $M'AM''$:

$$M''M'^2 = AM''^2 + AM'^2 - 2 AM'' AM' \cos 2\hat{A}, \text{ et avec } AM'' = AM = AM', \text{ il reste:}$$

$$M''M'^2 = 2 AM^2 - 2 AM^2 \cos 2\hat{A} = 2 AM^2 (1 - \cos 2\hat{A}) = 4 AM^2 \sin^2 \hat{A}$$

$$\text{Finalement } M''M' = 2 AM \sin \hat{A}.$$

Le triangle MNP a son périmètre minimal lorsque la longueur AM est minimale. Comme la distance minimale d'un point à une droite est celle prise à angle droit avec la droite, le périmètre est minimal lorsque M est en I , pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC . Comme les trois angles de ABC sont aigus, notre raisonnement, qui avait privilégié le point M sur $[BC]$, pourrait être repris aussi bien avec N sur $[AC]$ que P sur $[AB]$. Le fait d'avoir trouvé une solution unique pour le triangle de périmètre minimal prouve que les points M, N, P trouvés sont les sommets du triangle orthique de ABC .

3. Trajectoires lumineuses dont les rayons restent parallèles aux côtés du triangle orthique

3.1. Montrer que si le triangle ABC est isocèle, un côté du triangle orthique IJK est parallèle à un côté du triangle ABC .

Prenons le triangle ABC isocèle en C , il s'agit de montrer que la droite (IJ) est parallèle au côté (AB) . Le triangle isocèle ABC admet (CK) comme axe de symétrie. Comme la symétrie conserve les angles, la droite (AI) admet comme symétrique la droite passant par B et perpendiculaire à (AC) , soit (BJ) , et les points d'intersection I et J sont à leur tour symétriques. La droite (IJ) est perpendiculaire à (CK) , tout comme (AB) . Ainsi (IJ) est parallèle à (AB) (figure 8).

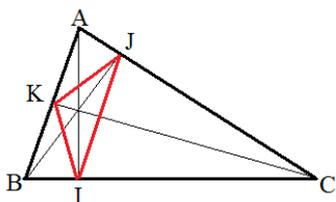


Figure 8 : Cas d'un triangle isocèle ABC en C .

3.2. On suppose dorénavant que le triangle ABC supposé direct a ses trois angles aigus ($< 90^\circ$). Montrer que si l'angle \hat{A} est inférieur à l'angle \hat{B} , ce qui impose $\hat{B} > 45^\circ$, la droite passant par B et parallèle à (IJ) coupe le segment $[AC]$.³ Indication : utiliser le triangle isocèle ABC' de base $[AB]$.

³ On montrerait de même que si l'angle A est supérieur à l'angle B , cette droite ne coupe plus le segment $[AC]$.

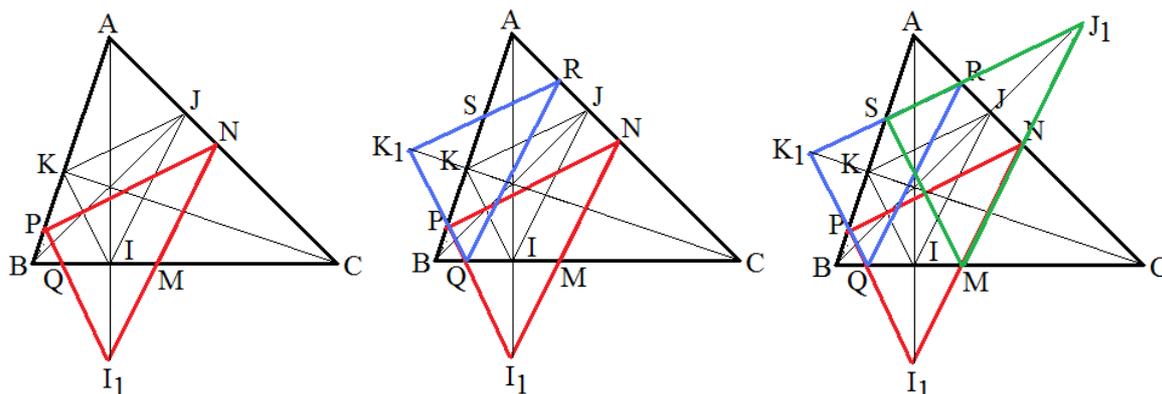


Figure 11 : (a) à gauche, début de la trajectoire $MNPQ$, (b) au centre, suite de la trajectoire QRS , (c) à droite, fin de la trajectoire avec retour en M .

Remarquons que la trajectoire partant du point Q est la même, en sens inverse, que celle partant de M . D'autre part, avec les angles $\hat{B} > \hat{C}$, le point I est plus près de B que de C . Prenons le point M_0 symétrique de B par rapport à I . Il est sur $[BC]$. Ainsi, lorsque le point M est pris sur $]BM_0[$, le point N se trouve sur $]N_0V[$, où le point V est celui trouvé précédemment, dont on sait qu'il est sur $[AC]$, et N_0 est sur (AC) avec (M_0N_0) parallèle à (BV) . Comme N_0 est le symétrique de V par rapport à J , et que J est plus près de A que de C , N_0 est sur $[AC]$. On constate aussi que la trajectoire partant de M_0 rebondit en N_0 , puis tombe en B , avec BN_0 parallèle à (JK) et les points suivants de rebond Q et R sont confondus avec B , ce qui correspond bien à une trajectoire limite. Avec M au-delà de M_0 les points Q et R ne seraient plus sur les côtés du triangle.

Enfin, si l'on mène la parallèle à (JK) passant par V , on obtient le point U sur (AB) , et comme ce point est symétrique de B par rapport à K , avec K plus près de B que de A (car $\hat{B} > \hat{A}$), U est sur $[AB]$. Remarquons que (M_0U) est aussi parallèle à (IK) .

Finalement les trajectoires cycliques de la forme 012012 ont leurs points de rebond tous situés sur les segments coloriés en rouge de la figure 12.

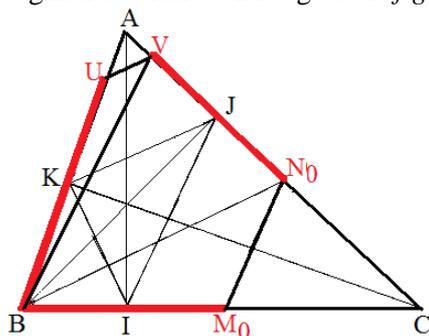


Figure 12 : Les trajectoires de lumière de la forme 012012 ont tous leurs points de rebond sur les segments coloriés en rouge.

Mais que se passe-t-il si le point de départ M est situé sur $[M_0C]$. On vérifie aisément que la trajectoire commence par être de la forme 010... mais elle finit toujours par tomber dans une zone coloriée en rouge. Elle finit donc par devenir cyclique de la forme 012012...

3.4. Faire une vérification expérimentale

Le programme est quasiment le même que celui fait au 1°. Mais après avoir déterminé les points I , J , K et le vecteur \mathbf{V}_0 initial, on modifie le point de départ en faisant :

$xx[0]=xx[0]+0.35; yy[0]=m[0]*(xx[0]-x[1])+y[1]; /* \textit{point M de départ, décalé par rapport à I} */$

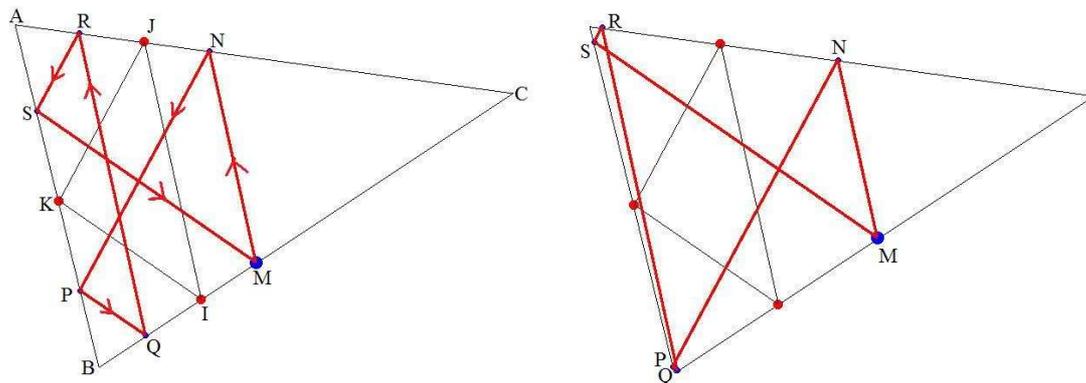


Figure 13 : A gauche trajectoire cyclique de lumière 012012..., à droite, trajectoire lorsque le point M est proche de M_0 , les points Q et R étant presque confondus avec B .

On observe effectivement la trajectoire cyclique à trois rebonds répétés deux fois (figure 13 à gauche), et lorsque M est proche de M_0 , les points P et Q sont presque confondus avec B , ce qui marque la limite de la trajectoire cyclique à triple rebond deux fois de suite (figure 13 à droite).