Intersection de deux cercles.
Lentille et croissant

Considérons deux cercles C et C', de centres respectifs O et O', et de rayons R et R' avec $R' < R$. Plaçons-les dans un repère orthonormé d'origine O, avec O' sur la demi-droite Ox. Posons d = OO'. Lorsque les deux cercles se coupent, le petit cercle est découpé en deux parties, l'une en forme de lentille, l'autre en forme de croissant (*figure 1*). Nous allons nous intéresser aus aires A et A' de ces deux surfaces.

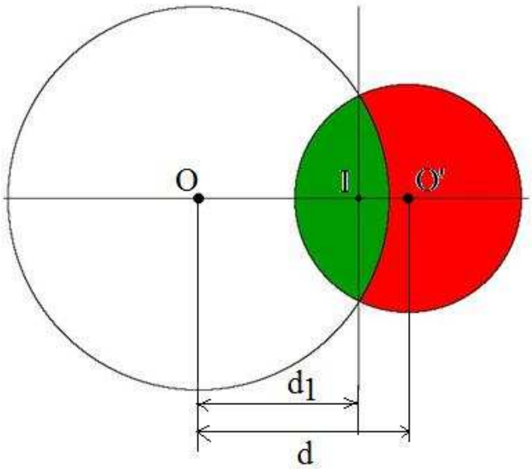


Figure 1 : Lentille *en vert*, et croissant *en rouge*.

1) A quelle condition sur d les deux cercles se coupent-ils ?

Les cas extrêmes sont ceux où le cercle C' est tangent intérieurement ou extérieurement au cercle C. On en déduit l'encadrement $R - R' \leq d \leq R + R'$ (*figure 2*).

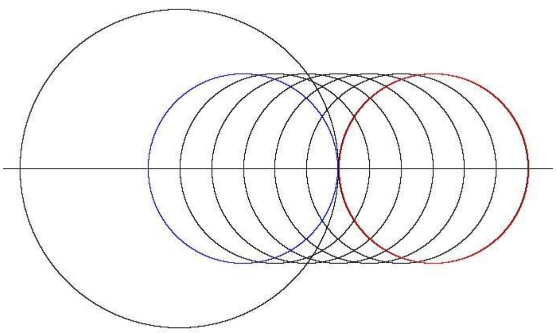


Figure 2 : Lorsque les cercles se coupent, les cas limites sont les cas de tangence, *en bleu* et *en rouge* pour le cercle C'. Quelques cas intermédiaires sont dessinés *en noir*.

2) *La droite passant par les deux points d'intersection des deux cercles est appelée axe radical. Déterminer son équation, ce qui revient à chercher les abscisses des points d'intersection ou encore l'abscisse d_1 du point d'intersection I de l'axe radical et de l'axe Ox (figure 1).*

Les équations des deux cercles sont :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - R'^2 = 0 \end{cases}$$

Par soustraction on obtient l'équation en x : $2dx - d^2 + R'^2 = R^2$
D'où l'équation de l'axe radical :

$$x = \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}$$

ce qui est aussi l'abscisse du point I : $d_1 = \dfrac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}$

***3)** Quand a-t-on $d_1 = d$, puis $d_1 < d$, et $d_1 > d$?*

$d_1 - d = \dfrac{R^2 - R'^2 - d^2}{2d}$. On en déduit que $d_1 = d$ lorsque $d = \sqrt{R^2 - R'^2}$.

D'autre part $d_1 > d$ lorsque $d < \sqrt{R^2 - R'^2}$, plus précisément lorsque $R - R' \leq d < \sqrt{R^2 - R'^2}$, et $d_1 < d$ pour $\sqrt{R^2 - R'^2} < d \leq R + R'$.[1] Ces deux cas sont illustrés sur la *figure 3*.

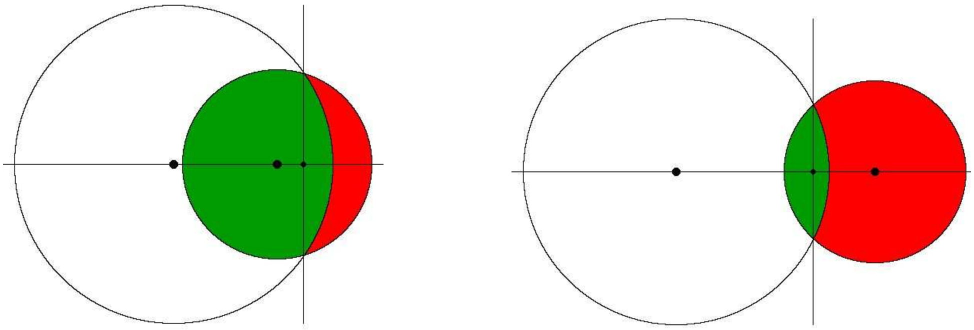


Figure 3 : Les deux cas de figure. *A gauche, $d_1 > d$, à droite $d_1 < d$.*

***4)** Dans le cas particulier où $d_1 = d$, calculer le rapport A'/ A de l'aire A'du croissant par rapport à l'aire A'de la lentille, en prenant R = 1 et R' = 0,6.*[2]

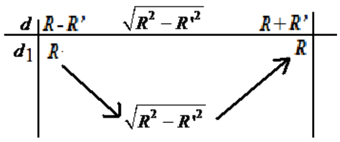
Les points I et O' sont confondus, et dans ce cas $d = \sqrt{R^2 - R'^2}$. Appelons P et P' les points d'intersection des deux cercles. La lentille est formée de deux parts, un demi-disque à gauche (*en gris pâle* sur la *figure 4 à gauche*, d'aire $\pi R'^2 / 2$, une autre partie (*en gris foncé*) qui est la différence entre le secteur angulaire OPP' et le triangle OPP'. Dans le triangle rectangle $OO'P$ avec $h = O'P = \sqrt{R^2 - d^2}$, l'angle $\alpha = P'OP$ est tel que $\sin \alpha = h / R$, et $\alpha = \text{Arcsin}(h / R)$. L'aire du secteur angulaire est $\pi R^2 \times 2\alpha / (2\pi) = R^2 \alpha$, et celle du triangle OPP' vaut $h\, d$. On en déduit l'aire de la lentille :

$$A = \pi R'^2 / 2 + R^2 \alpha - h\, d.$$

L'aire du croissant est $A' = \pi R'^2 - A$. Le calcul donne, pour $R' / R = 0{,}6$, $A' / A = 0{,}5514$.

---

[1] Accessoirement, on constate que, lorsque d croît de $R - R'$ à $R + R'$, d_1 décroît de R à $\sqrt{R^2 - R'^2}$ puis croît de $\sqrt{R^2 - R'^2}$ à R, comme l'indique le tableau de variation, déduit du signe de la dérivée d'_1 :



[2] On peut prendre plus généralement $R' = 0{,}6\, R$ sans que cela ne change A' / A. Car le fait de multiplier les longueurs par un même nombre multiplie les aires par le carré de ce nombre, mais cela ne change par le rapport des aires.

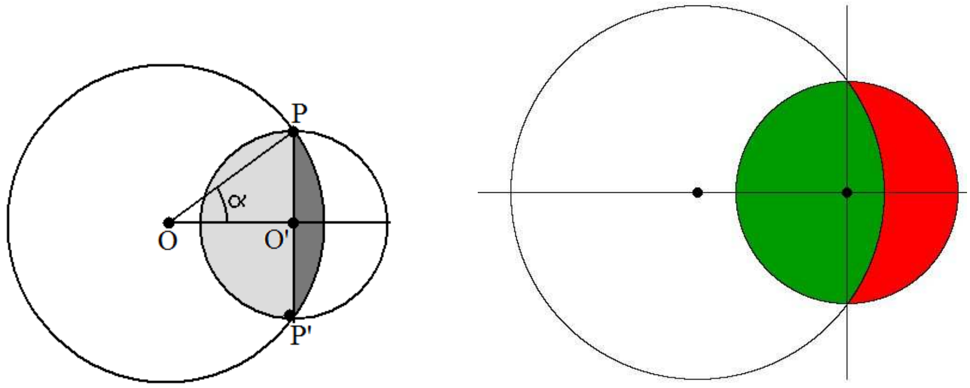


Figure 4 : Cas où $d_1 = d = \sqrt{R^2 - R'^2}$, avec $A' / A \approx 0{,}55$.

5) *Calculer A et A' lorsque $d_1 < d$. En particulier combien vaut A' / A lorsque $d = R$, en prenant $R' = 0{,}6\,R$?*

On est dans le cas où $\sqrt{R^2 - R'^2} < d \le R + R'$. Rappelons que $d_1 = OI = \dfrac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}$. La lentille se partage en deux parties (*figure 5 à gauche*). La partie de droite a une aire qui est la différence entre le secteur angulaire *OPP'* et le triangle *OPP'*. Dans le triangle rectangle *OIP* avec $h = IP = \sqrt{R^2 - d_1^2}$ et $\alpha = \text{Arcsin}\,(h / R)$, l'aire est égale à $R^2\alpha - h\, d_1$. On fait de même pour l'aire de gauche, différence entre celle du secteur angulaire *O'PP'* et celle du triangle *O'PP'*. Avec $O'I = d - d_1$ et $\beta = \text{Arcsin}\,(h / R')$, cette aire vaut $R^2\beta - h\,(d - d_1)$. Finalement :

$$A = R^2\alpha - h\, d_1 + R^2\beta - h\,(d - d_1)$$
$$= R^2\alpha + R^2\beta - h\, d, \text{ et } A' = \pi R'^2 - A.$$

Dans le cas particulier où $d = R$ et $R' = 0{,}6\,R$, le calcul donne $A' / A \approx 1{,}295$.

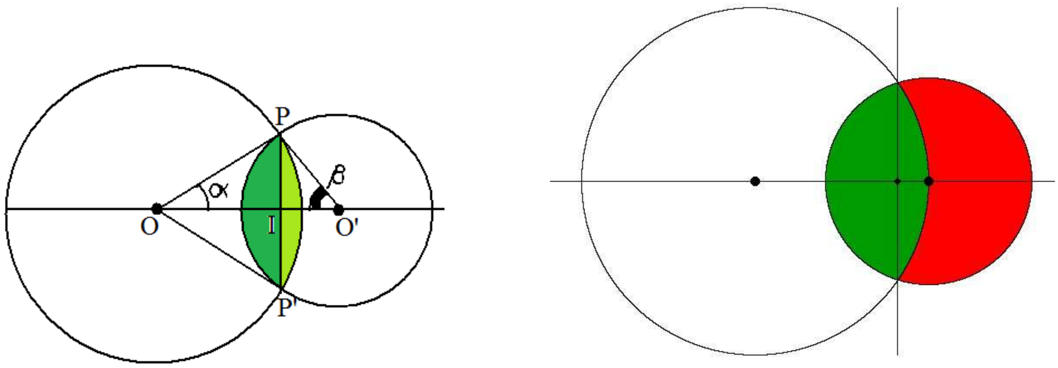


Figure 5 : *A gauche*, les deux parties, *en vert pâle* et *vert foncé*, constituant la lentille. *A droite*, le cas particulier où *d* = *R*.

6) *Calculer A et A' lorsque $d_1 > d$.* Dans le cas particulier où $R' = 0{,}6\,R$ et $d = R'$, calculer A' / A.

On sait que $d_1 > d$ pour $R - R' \le d < \sqrt{R^2 - R'^2}$. Là encore la lentille est partagée en deux zones (*figure 6*). Pour la partie droite, comme précédemment, on a $h = IP = \sqrt{R^2 - d_1^2}$, $\alpha = \text{Arcsin}\,(h / R)$, et l'aire est égale à $R^2\alpha - h\, d_1$. Mais pour la partie gauche, avec l'angle β tel que $\beta = \text{Arcsin}\,(h / R')$, l'aire du secteur angulaire devient $R^2(\pi - \beta) + h\,(d_1 - d)$. Finalement :

$$A = R^2\alpha - h\, d_1 + R^2(\pi - \beta) + h\,(d_1 - d)$$

$= R^2\alpha + R^2(\pi - \beta) - h\,d$, et $A' = \pi R'^2 - A$.

Dans le cas où $R' = 0{,}6\,R$ et $d = R'$, le cercle C' passe par O, et l'on trouve $A' / A \approx 0{,}174$.

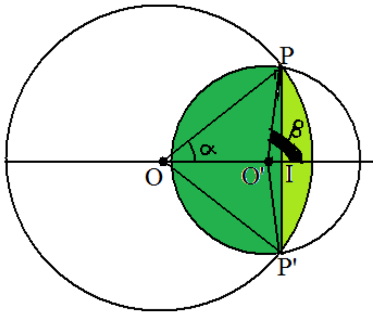


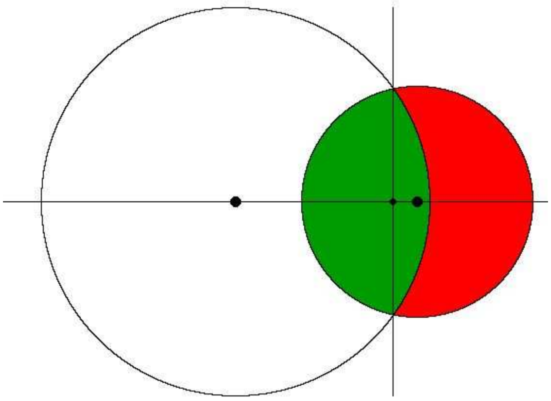
Figure 6 : Partage de la lentille en deux zones, lorsque $d_1 > d$.

***7)** Avec R' = 0,6 R, quelle est la valeur de d pour laquelle A' / A = 1 ? Et lorsque A' / A = 1/3 ?*

Il est évident que lorsque d augmente, l'aire A diminue, l'aire A' augmente, donc A' / A augmente. On a vu que $A' / A = 0{,}17$ pour $d = R'(= 0{,}6\,R)$, $A' / A = 0{,}55$ pour $d = \sqrt{R^2 - R'^2} = 0{,}8\,R$, et $A' / A = 1{,}29$ pour $d = R$.

Pour trouver quand $A' / A = 1$, d doit être compris entre $d = 0{,}8\,R$ et R. L'équation en d ne peut être traitée que par un calcul approché, en faisant par exemple varier d par petits intervalles réguliers à partir de $0{,}8\,R$. On trouve ainsi $d \approx 0{,}937\,R$ (*figure 7 à gauche*).

D'autre part, pour avoir $A' / A = 1 / 3$, d doit être compris entre $0{,}6\,R$ et $0{,}8\,R$. Un calcul approché donne $d = 0{,}700\,R$ (*figure 7 à droite*)..



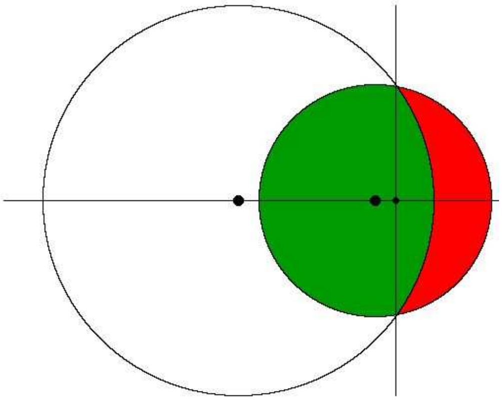


Figure 7 : *A gauche*, la lentille et le croissant ont la même aire : $A' / A = 1$. *A droite*, $A' / A = 1 / 3$.