

Courbes à boucles convergeant vers un cercle

Ce problème commence par l'étude d'une similitude directe, et il aboutit à la formation d'une suite de courbes présentant des boucles de plus en plus nombreuses mais qui s'estompent peu à peu pour donner finalement un cercle.

Dans le plan complexe, avec son repère orthonormé d'origine O , on considère la suite de points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ avec M_0 en O et M_1 d'affixe 1. La règle de passage d'un point au suivant, avec $n \geq 1$, obéit aux deux conditions : en matière de longueurs, $M_n M_{n+1} = r M_{n-1} M_n$, avec r nombre réel > 0 donné, et en matière d'angles $(\mathbf{M}_{n-1} \mathbf{M}_n, \mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n+1}) = t^1$, avec t angle donné compris entre 0 et 2π .

1) On appelle v_n l'affixe du vecteur $\mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n+1}$. Montrer que pour $n \geq 1$: $v_n = r e^{it} v_{n-1}$. En déduire la forme explicite de v_n , en fonction de n , r et t .

On passe du vecteur $\mathbf{M}_{n-1} \mathbf{M}_n$ au vecteur $\mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n+1}$ en multipliant sa longueur par r et en le tournant de l'angle t , ce qui signifie en complexes que l'on passe de l'affixe v_{n-1} du premier vecteur à l'affixe v_n du second en le multipliant par le nombre complexe de module r et d'argument t , soit $v_n = r e^{it} v_{n-1}$. Cette relation de récurrence correspond à une suite géométrique de raison $r e^{it}$ et de terme initial v_0 affixe de $\mathbf{M}_0 \mathbf{M}_1$. On en déduit la forme explicite $v_n = v_0 (r e^{it})^n$, avec $v_0 = 1$, d'où $v_n = r^n e^{in t}$.

2) En prenant comme cas particulier dans cette question $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $t = \frac{\pi}{4}$, placer les points de M_0 à M_{10} .

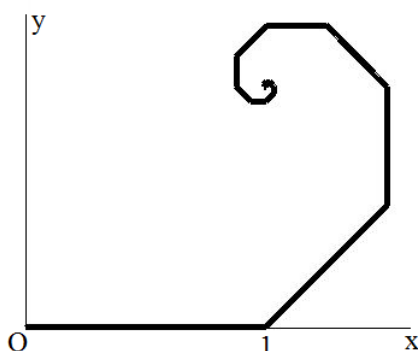


Figure 1 : Trajectoire des points M_n pour $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $t = \frac{\pi}{4}$

3) On suppose maintenant dans tout ce qui suit que $0 < r < 1$. Et l'on appelle z_n l'affixe du point M_n . En exprimant v_n en fonction de z_n et z_{n+1} , en déduire que $z_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.

Avec v_n affixe de $\mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n+1}$, on a aussi $z_{n+1} - z_n = v_n$ pour $n \geq 0$, grâce à Chasles. Ainsi :

$$z_n - z_{n-1} = v_{n-1}$$

$$z_{n-1} - z_{n-2} = v_{n-2}$$

...

$$z_2 - z_1 = v_1$$

$$z_1 - z_0 = v_0$$

En additionnant membre à membre, il se produit des simplifications en cascade, et il reste :

$$z_n - z_0 = v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + v_0, \text{ avec } z_0 = 0, \text{ ou}$$

¹ Comme d'habitude, les vecteurs sont marqués en gras.

$$z_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}.$$

4) Donner la forme explicite de z_n en fonction de n , r et θ .

Grâce à la formule précédente, $z_n = 1 + r e^{it} + (r e^{it})^2 + \dots + (r e^{it})^{n-1} = \frac{1 - (r e^{it})^n}{1 - r e^{it}}$ puisque $r e^{it}$ est différent de 1, avec $0 < r < 1$.

5) Montrer que le module du nombre complexe $z_n - \frac{1}{1 - r e^{it}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

En notant P le point d'affixe $p = \frac{1}{1 - r e^{it}}$, interpréter géométriquement le comportement de la suite des points (M_n) à l'infini. Placer sur la figure commencée au 2° le point P obtenu pour $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $t = \frac{\pi}{4}$.

D'après la formule précédente, $z_n - \frac{1}{1 - r e^{it}} = -\frac{(r e^{it})^n}{1 - r e^{it}}$, soit en module $\left| z_n - \frac{1}{1 - r e^{it}} \right| = \frac{r^n}{|1 - r e^{it}|}$ où l'on a pris le quotient des modules. Avec $0 < r < 1$, r^n tend vers 0 pour n infini, tandis que $|1 - r e^{it}|$ reste fixe. Donc avec son module qui tend vers 0, le nombre complexe $z_n - \frac{1}{1 - r e^{it}}$ tend vers 0 et z_n tend vers $p = \frac{1}{1 - r e^{it}}$. La suite des points M_n tend vers P .

6) Pour tout n entier naturel, on note Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{PM_n}$. Calculer Z_n en fonction de n , r et t . Puis établir une relation entre Z_n et Z_{n-1} . En déduire que l'on passe de M_{n-1} à M_n par une similitude directe dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

$Z_n = z_n - \frac{1}{1 - r e^{it}} = -\frac{(r e^{it})^n}{1 - r e^{it}} = -p (r e^{it})^n$. On reconnaît la forme explicite d'une suite géométrique de raison $r e^{it}$ avec comme terme initial $Z_0 = -p$. D'où la relation de récurrence $Z_n = r e^{it} Z_{n-1}$, qui s'écrit aussi $z_n - p = r e^{it} (z_{n-1} - p)$. C'est de la forme $z_n = a z_{n-1} + b$ avec $a \neq 0$. On passe de M_{n-1} à M_n par une similitude directe de rapport $|a| = r$ et d'angle $\arg a = t$, avec comme centre le point fixe P . La suite des points M_n vient s'enrouler en spirale sur le point P .

7) Déterminer les coordonnées X et Y du point P précédemment défini, en fonction de r et de t .

$$p = \frac{1}{1 - r(\cos t + i \sin t)} = \frac{1}{1 - r \cos t - i r \sin t} = \frac{1 - r \cos t + i r \sin t}{(1 - r \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}$$

$$= \frac{1 - r \cos t + i r \sin t}{1 + r^2 - 2 r \cos t}$$

$$P \begin{cases} X = \frac{1 - r \cos t}{1 + r^2 - 2 r \cos t} \\ Y = \frac{r \sin t}{1 + r^2 - 2 r \cos t} \end{cases}$$

8) Gardons r fixé entre 0 et 1. Lorsque l'angle t varie de 0 à 2π , le point P décrit une courbe C . Mettre les équations paramétriques de C sous la forme $X = \frac{a - \cos t}{b - 2 \cos t}$ et $Y = \frac{\sin t}{b - 2 \cos t}$ et préciser les valeurs des constantes a et b . Puis montrer que cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des x et indiquer dans quel intervalle pour t on peut réduire l'étude. Déterminer les points P obtenus pour $t = 0$ et $t = \pi$.

En divisant par r en haut et en bas, X et Y s'écrivent :

$$P \begin{cases} X = \frac{1/r - \cos t}{(1+r^2)/r - 2 \cos t} \\ Y = \frac{\sin t}{(1+r^2)/r - 2 \cos t} \end{cases}$$

d'où $a = 1/r$ et $b = (1+r^2)/r$.

On a là les équations paramétriques de la courbe C décrite par P . Lorsque l'on change t en $-t$ (ou $2\pi - t$), X ne change pas (le cosinus étant une fonction paire) et Y est changé en $-Y$ à cause de la fonction sinus impaire. La courbe C est symétrique par rapport à l'axe des x , et l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. Pour $t = 0$, on trouve le point $A (1/(1-r), 0)$, et pour $t = \pi$ on a le point $B (1/(1+r), 0)$.

9) Montrer que la courbe C est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon R .

Utilisant les résultats précédents en $t = 0$ et π , en prenant comme point Ω le milieu de $[AB]$, soit $\Omega (1/(1-r^2), 0)$, le rayon R éventuel ne pouvant être que $r/(1-r^2)$. Il s'agit de prouver que $\Omega P = R$, c'est-à-dire $\Omega P^2 = r^2/(1-r^2)^2$, ce qui signifie que P sera bien sur un cercle.

$$\begin{aligned}
x_{\Omega P} &= X - \frac{1}{1-r^2} = \frac{1-r \cos t}{1+r^2-2r \cos t} - \frac{1}{1-r^2} = \frac{(1-r^2)(1-r \cos t) - 1 - r^2 + 2r \cos t}{(1-r^2)(1+r^2-2r \cos t)} \\
&= \frac{r((1+r^2) \cos t - 2r)}{(1-r^2)(1+r^2-2r \cos t)} \\
y_{\Omega P} &= \frac{r \sin t}{1+r^2-2r \cos t} = \frac{r(1-r^2) \sin t}{(1-r^2)(1+r^2-2r \cos t)} \\
\Omega P^2 &= x_{\Omega P}^2 + y_{\Omega P}^2 = \frac{r^2((1+r^2) \cos t - 2r)^2 + r^2(1-r^2)^2 \sin^2 t}{(1-r^2)^2(1+r^2-2r \cos t)^2} \\
&= \frac{r^2((1+r^2) \cos t - 2r)^2 + (1-r^2)^2 \sin^2 t}{(1-r^2)^2(1+r^2-2r \cos t)^2} \\
&= \frac{r^2((1+r^2)^2 \cos^2 t + (1-r^2)^2 \sin^2 t - 4r(1+r^2) \cos t + 4r^2)}{(1-r^2)^2(1+r^2-2r \cos t)^2} \\
&= \frac{r^2((1+r^4 + 2r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2) - 4r \cos t - 4r^3 \cos t)}{(1-r^2)^2(1+r^2-2r \cos t)^2} \\
&= \frac{r^2((1+r^4 + 4r^2 \cos^2 t + 2r^2 - 4r \cos t - 4r^3 \cos t)}{(1-r^2)^2(1+r^2-2r \cos t)^2} \\
&= \frac{r^2((1+r^4 + 4r^2 \cos^2 t + 2r^2 - 4r \cos t - 4r^3 \cos t)}{(1-r^2)^2(1+r^2-2r \cos t)^2} \\
&= \frac{r^2}{(1-r^2)^2} = R^2
\end{aligned}$$

Le point P se trouve bien sur le cercle C de centre Ω et de rayon R . Mais le décrit-il lorsque t décrit $[0, 2\pi]$?

Il suffit de constater que $X(t)$ est une fonction continue sur $[0, \pi]$. Avec $X(0) = 1/(1-r)$ et $X(\pi) = 1/(1+r)$, correspondant aux extrémités A et B du diamètre du cercle, X doit nécessairement parcourir tout l'intervalle $[1/(1-r), 1/(1+r)]$ (sans qu'on ait besoin de démontrer que $X(t)$ est une fonction strictement décroissante), et le point P parcourt bien le demi-cercle sur $[0, \pi]$, et par suite tout le cercle sur $[0, 2\pi]$ (figure 2).

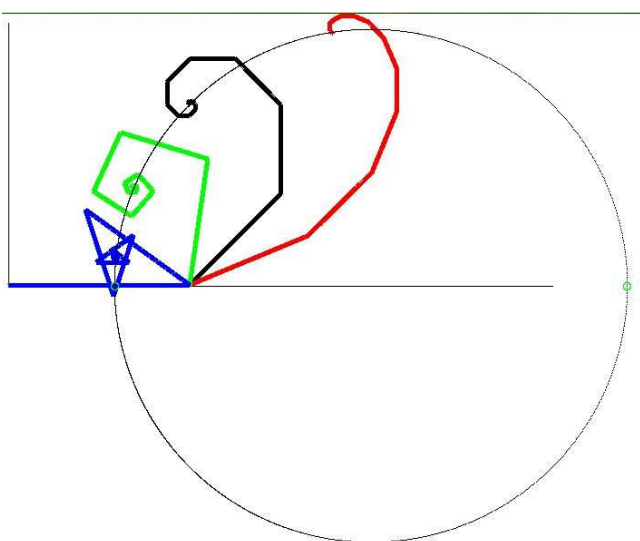


Figure 2 : Cercle décrit par le point P , avec, pour quatre valeurs de t les trajectoires des points M_n menant à leurs points P limites respectifs

10) Déterminer les coordonnées x_n et y_n des points M_n , à partir de leur affixe z_n .

Reprenons z_n :

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1 - r^n e^{int}}{1 - re^{it}} = \frac{1 - r^n (\cos nt + i \sin nt)}{1 - r(\cos t + i \sin t)} = \frac{1 - r^n \cos nt - i r^n \sin nt}{1 - r \cos t - i r \sin t} \\ &= \frac{(1 - r^n \cos nt - i r^n \sin nt)(1 - r \cos t + i r \sin t)}{(1 - r \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} \\ &= \frac{(1 - r^n \cos nt)(1 - r \cos t) + r^{n+1} \sin nt \sin t + i((1 - r^n \cos nt)r \sin t - r^n \sin nt(1 - r \cos t))}{1 + r^2 - 2r \cos t} \\ \left(\begin{array}{l} x_n = \frac{1 - r^n \cos nt - r \cos t + r^{n+1}(\cos nt \cos t + \sin nt \sin t)}{1 + r^2 - 2r \cos t} = \frac{1 - r^n \cos nt - r \cos t + r^{n+1} \cos(n-1)t}{1 + r^2 - 2r \cos t} \\ y_n = \frac{r \sin t - r^n \sin nt + r^{n+1}(\sin nt \cos t - \cos nt \sin t)}{1 + r^2 - 2r \cos t} = \frac{r \sin t - r^n \sin nt + r^{n+1} \sin(n-1)t}{1 + r^2 - 2r \cos t} \end{array} \right. \end{aligned}$$

11) On garde r fixe. Pour chaque valeur de n , on considère la courbe Γ_n décrite par le point M_n lorsque t varie de 0 à 2π . Montrer que les courbes Γ_n sont symétriques par rapport à l'axe des x . Quelles sont les courbes Γ_0 , Γ_1 et Γ_2 ?

A cause des cosinus, le fait de changer t en $2\pi - t$ conserve x_n , et à cause des sinus y_n est transformé en son opposé. Les courbes Γ_n sont symétriques par rapport à l'axe des x . Les courbes Γ_0 et Γ_1 sont respectivement réduites aux points O et $(1,0)$. Comme $M_1 M_2 = r$, le point M_2 décrit le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon r .

12) Prendre la courbe Γ_3 et montrer qu'elle coupe l'axe des x en trois points ou deux points suivant les valeurs de r .

Pour $n = 3$, faisons $y_n = 0$. Cette équation en t s'écrit :

$$\begin{aligned} r \sin t - r^3 \sin 3t + r^4 \sin 2t &= 0 \\ \sin t - r^2 \sin 3t + r^3 \sin 2t &= 0 \\ \sin t - r^2 (3 \sin t - 4 \sin^3 t) + 2 r^3 \sin t \cos t &= 0 \\ \sin t (1 - 3 r^2 + 4 r^2 \sin^2 t + 2 r^3 \cos t) &= 0 \end{aligned}$$

Lorsque $\sin t = 0$, on obtient deux points pour $t = 0$ et $t = \pi$.

Reste l'équation $1 - 3 r^2 + 4 r^2 \sin^2 t + 2 r^3 \cos t = 0$, ou $1 + r^2 - 4 r^2 \cos^2 t + 2 r^3 \cos t = 0$, $4 r^2 \cos^2 t - 2 r \cos t - 1 - r^2 = 0$, équation du second degré en $\cos t$.

Le trinôme $4 r^2 X^2 - 2 r^3 X - r^2 - 1$ admet comme discriminant réduit $r^6 + 4 r^2 (1 + r^2) = r^6 + 4 r^4 + 4 r^2 = r^2 (r^4 + 4 r^2 + 4) = r^2 (r^2 + 2)^2 > 0$, et par suite deux racines $\frac{r^3 \pm r(r^2 + 2)}{4 r^2} = -\frac{1}{2r}$ ou $\frac{r^2 + 1}{2r}$.

Puisque X doit être un cosinus, cela impose que $-1 \leq X \leq 1$.

Prenons la racine $(r^2 + 1) / (2r)$ qui est > 0 , elle doit vérifier $(r^2 + 1) / (2r) \leq 1$, $(r - 1)^2 \leq 0$, ce qui n'est jamais possible avec $0 < r < 1$. Prenons l'autre racine $-1 / (2r)$ qui est négative. Elle doit vérifier $-1 / (2r) \geq -1$, ou $1 / (2r) \leq 1$, $r \geq 1/2$.

Finalement, on trouve, outre les deux points correspondant à $t = 0$ et $t = \pi$, un troisième point d'intersection de la courbe avec l'axe des x , pour $t = \arccos(-1 / (2r))$, lorsque $r \geq 1/2$. Sinon il n'y a que deux points.

13) Faire un programme permettant de dessiner les courbes Γ_3 pour diverses valeurs de r .

```
for(r=0.1;r<1.;r+=0.1) /* valeurs prises par r */
{ for(t=0.;t<2.*M_PI;t+=0.00001) /* t va de 0 à 2π */
  { den=1.+r*r-2.*r*cos(t); /* formules permettant de calculer xn et yn pour n = 3 */
    rn=pow(r,3);
    xn=(1.-rn*cos(n*t)-r*cos(t)+r*rn*cos((n-1)*t))/den;
    yn=(r*sin(t)-rn*sin(n*t)+r*rn*sin((n-1)*t))/den;
    putpixel(xorig+zoom*xn,yorig-zoom*yn,noir); /* dessin de la courbe */
  }
  SDL_Flip(screen);pause();SDL_FillRect(screen,NULL,blanc);
}
```

Les résultats sont donnés sur la *figure 3*. Pour r supérieur à 0,5, la courbe présente une boucle, avec un point double, comme cela était prévisible avec la présence de trois points d'intersection avec l'axe des x . Pour le cas frontière $r = 0,5$, on constate que la courbe a un point de rebroussement.

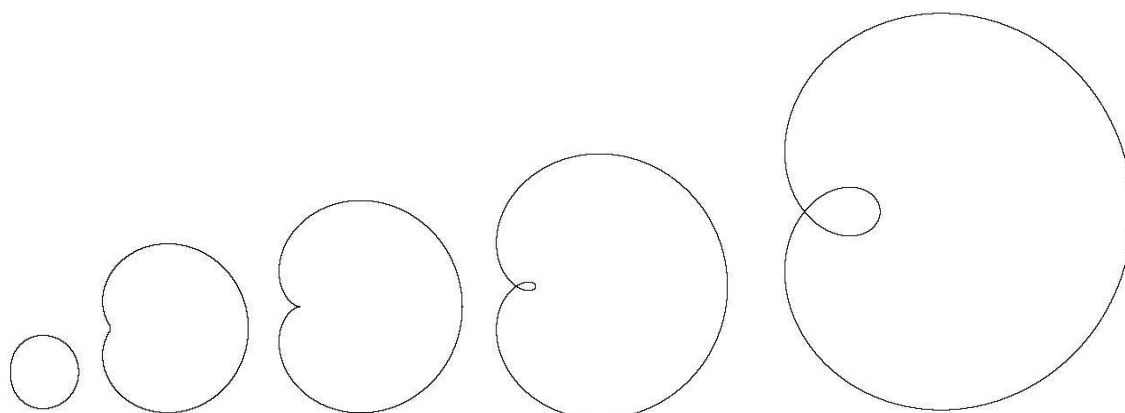


Figure 3 : Courbes Γ_3 pour $r = 0,2$, $r = 0,4$, $r = 0,5$, $r = 0,6$, $r = 0,8$

14) Prendre une valeur assez élevée de r , par exemple $r = 0,8$, et tracer par programme les courbes Γ_3 , Γ_4 , Γ_5 , ... en constatant leur convergence progressive vers le cercle C .

On a pris $r = 0,8$. La courbe Γ_3 présente une boucle, la courbe Γ_4 en compte deux, et quand n augmente, il y a une boucle de plus à chaque fois. Mais ces boucles diminuent peu à peu en dimension. Pour $n = 11$ environ, elles laissent place à des points de rebroussement, puis au-delà on obtient des oscillations qui se font de plus en plus douces, pour aboutir quasiment, vers $n = 30$, au cercle limite C (*figure 4*).

On remarque qu'en prenant des valeurs supérieures de r , plus proches de 1, les boucles sont de plus en plus nombreuses avant de disparaître.

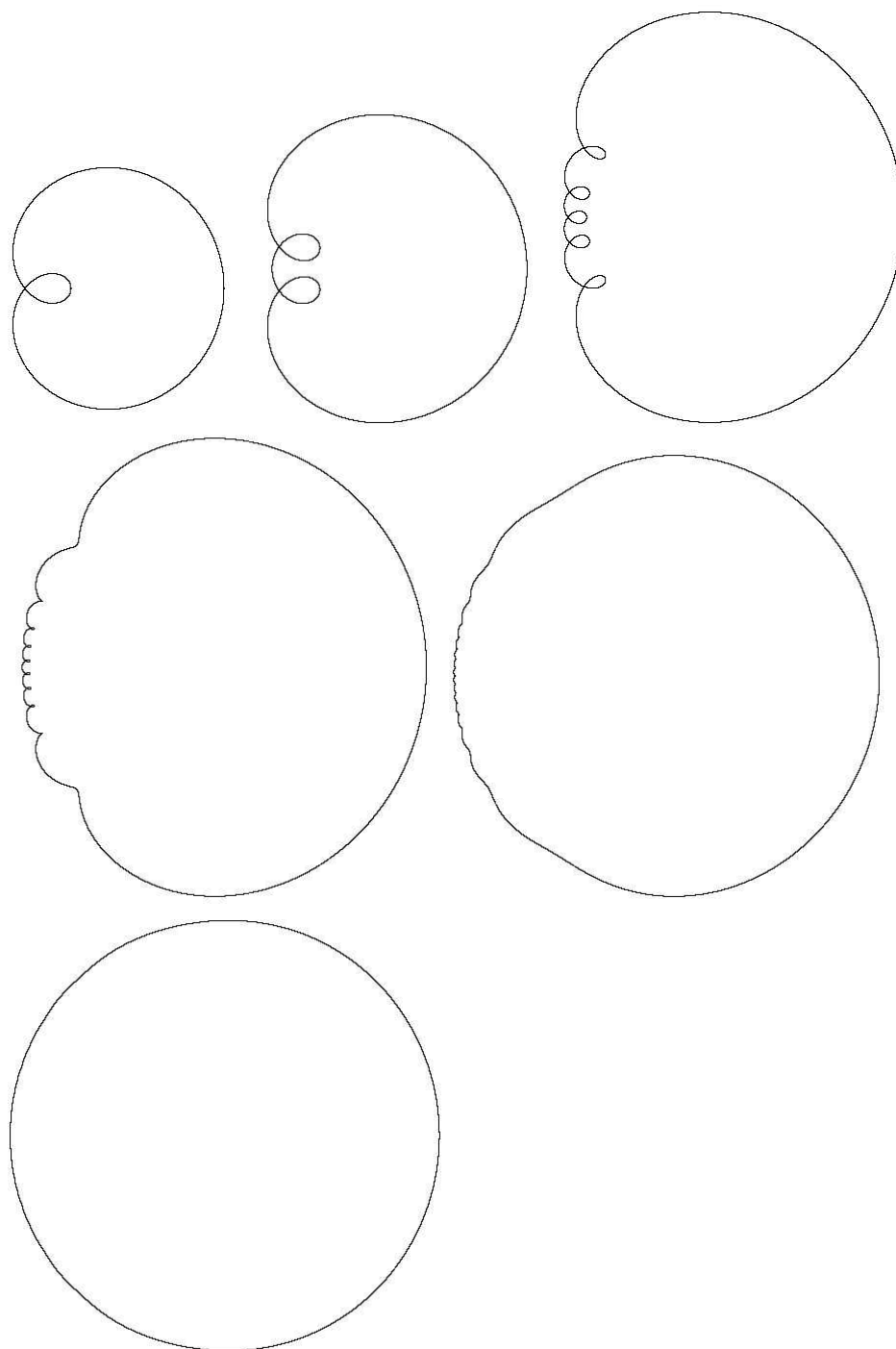


Figure 4 : Les courbes $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_6, \Gamma_{11}, \Gamma_{20}, \Gamma_{29}$