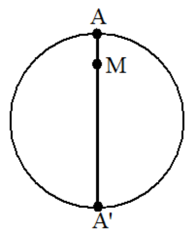
Un problème d'Alhazen
Trajectoires lumineuses dans un cercle

Lorsque l'on parle de problème d'Alhazen[1], il s'agit de trajectoires lumineuses reliant un point à un autre après réflexion sur un miroir circulaire, ou aussi bien de rebonds d'une boule sur un billard circulaire. Le problème particulier que nous traitons ici consiste à lancer un rayon lumineux (ou une boule de billard) à partir d'un point M situé à l'intérieur d'un cercle, en faisant en sorte que la trajectoire lumineuse repasse en ce même point après réflexions sur le cercle. Quand on impose le nombre de ces réflexions, le problème peut avoir des solutions ou pas. Nous allons étudier les cas les plus simples selon le nombre de ces réflexions, en les traitant sous forme d'exercice.

1) Quelles sont les trajectoires partant de M pour revenir en M après un rebond ? Constater que ces trajectoires sont encore valables si l'on a un nombre quelconque de rebonds, mais que dans ce cas, la trajectoire va bien de M à M mais elle repasse par M entretemps.

En appelant A le point de rebond, on aura une trajectoire MAM si et seulement si (MA) et (AM) sont confondues, ce qui signifie que l'angle d'incidence est nul. La trajectoire est donc une partie du diamètre du cercle passant par M.

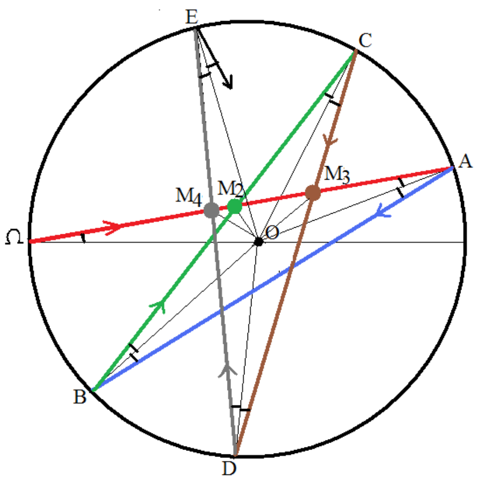


On obtient ainsi les deux trajectoires MAM et $MA'M$ (*voir dessin*). Remarquons aussi qu'après plusieurs rebonds en A et A', la trajectoire va toujours de M à M, quitte à repasser en M entretemps.

2) On ne s'intéresse plus désormais aux trajectoires trouvées précédemment, qui acceptent un nombre quelconque de rebonds. Autrement dit, on ne s'intéresse qu'aux trajectoires partant de M pour revenir en M sans repasser en M entretemps.

Faisons l'expérience suivante : Un rayon lumineux est lancé à partir d'un point Ω sur le cercle, avec un angle d'incidence a non nul. Il ne cesse de se réfléchir sur le cercle, en A, B, C, etc.

a) Montrer qu'en chaque point de rebond l'angle entre le rayon incident et le rayon réfléchi est égal à 2a. Faire un dessin en prenant un angle a petit. Puis en prenant l'intersection du rayon [ΩA] initial avec les rayons suivants, trouver les points M qui correspondent aux trajectoires partant de M pour revenir en M après deux, ou trois, ou quatre rebonds.



Le triangle $O\Omega A$ étant isocèle, l'angle a en Ω se retrouve en A. Et comme l'angle du rayon d'incidence est égal à l'angle du rayon réfléchi, on a aussi les angles ΩAO et OAB égaux à a. A son tour, le triangle OAB est isocèle, l'angle a se retrouve en B, et le processus se produit indéfiniment. Cela signifie que les angles des rayons lumineux aux points de rebonds A, B, C, etc. sont tous égaux à $2a$.

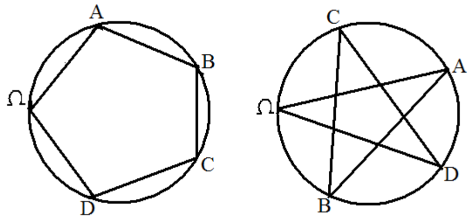
Sur le dessin, avec un angle a petit, on constate que le rayon initial [ΩA] est coupé par le rayon [BC] en un point M_2. Si l'on part de ce point, et que l'on fait deux

[1] Alhazen, également connu sous le nom d'Ibn El-Haytham, est un savant « irakien » des années 1000, réputé notamment pour ses travaux dans le domaine de l'optique.

rebonds, on se retrouve en ce point. Continuons : en prenant l'intersection de [ΩA] avec [CD], puis avec [DE], on trouve les points M_3 et M_4 à partir desquels la trajectoire revient en ces points après trois ou quatre rebonds.

b) Dans quels cas la trajectoire partant de Ω revient en Ω ? Traiter les cas avec deux, trois et quatre rebonds. Que se passe-t-il si l'on part d'un point M situé sur un des segments de la trajectoire autre qu'un point de rebond ?

Dans ces cas exceptionnels, le polygone de sommets $\Omega ABC\ldots\Omega$ a tous ses sommets situés sur le cercle, ainsi que tous ses angles égaux (à $2a$). Il s'agit d'un polygone régulier. Notamment avec deux rebonds en A et B, on a le triangle équilatéral ΩAB, et le point Ω est un point de type M_2, en position limite sur le cercle. Avec trois rebonds en A, B, C, le quadrilatère ΩABC est un carré.

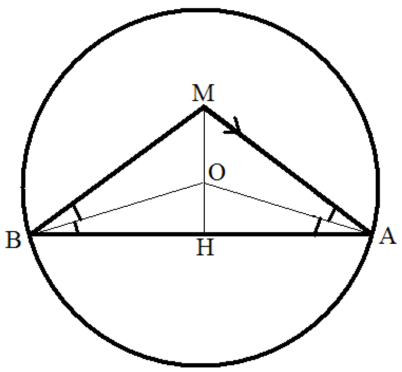


Avec quatre rebonds en A, B, C, D, on obtient deux types de pentagone régulier, convexe ou étoilé.

Lorsque l'on prend un polygone régulier à n sommets ($n \geq 3$), la trajectoire issue de Ω revient en Ω après $n - 1$ rebonds, et c'est un point du type M_{n-1}. Prenons maintenant un point M situé sur une des arêtes, et pas en un sommet. On obtient alors une trajectoire partant de M pour revenir en M après n rebonds, et l'on obtient ainsi des points du type M_n. Autrement dit, une trajectoire exceptionnelle avec $n - 1$ rebonds donne naissance à une infinité de trajectoires avec n rebonds.

3) Cas d'une trajectoire partant de M pour revenir en M après deux rebonds.

a) Prendre un point M à une distance y du centre du cercle.[2] *S'il existe une trajectoire partant de M, se réfléchissant en un point A sur le cercle, puis se réfléchissant à nouveau en B sur le cercle, pour repasser finalement en M, montrer que cette trajectoire présente une symétrie que l'on précisera.*



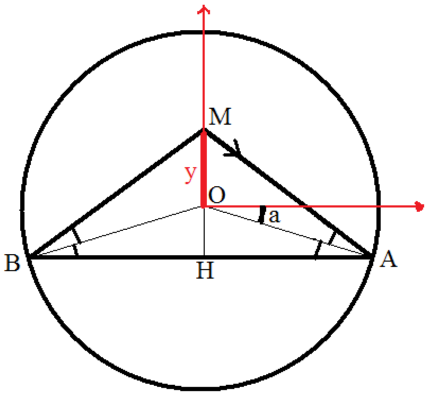
On sait que dans un cercle, toute tangente au cercle est perpendiculaire au rayon correspondant. Les réflexions en A et B imposent que les angles MAO et OAB soient égaux, ainsi que les angles ABO et OBM. Comme le triangle OAB est isocèle, les angles OAB et ABO sont égaux. On obtient quatre angles égaux (*voir dessin*).

A son tour, le triangle MAB possède deux angles égaux en A et B, il est isocèle, et sa hauteur (MH) qui est aussi la médiatrice de [AB] passe par O puisque ce point est équidistant de A et B. On en déduit que (OM) est perpendiculaire à (AB), et la trajectoire MAB présente un axe de symétrie qui est (OM).

b) Donner au cercle un rayon unité, et prendre un repère orthonormé d'origine O tel que le point M ait pour coordonnées (0, y) avec y ≥ 0. Constater que les points A et B ont nécessairement une ordonnée ≤ 0. Sans perte de généralité, on supposera que le point A a une abscisse positive, et l'on considérera les trajectoires MAB et MBA comme étant les mêmes (elles sont les mêmes au sens près). En appelant a l'angle (non orienté) entre l'axe des x et OA, trouver une relation entre y et x = sin a.

---

[2] Grâce aux symétries du cercle par rapport à tout diamètre, la distance $OM = y$ est le seul paramètre qui caractérise les trajectoires.



L'angle a est égal aux quatre angles des réflexions en A et B. La droite (AB) est nécessairement horizontale (parallèle à l'axe des x). Si elle était au-dessus de l'axe des x, la droite (OA) serait extérieure à l'angle MAB, alors qu'elle doit être la bissectrice de cet angle. Les points A et B ont nécessairement une ordonnée ≤ 0.

Dans le triangle rectangle OAH, on a
$OH = \sin a$ et $AH = \cos a$.

Puis, dans le triangle rectangle MAH, on a
$MH / AH = \tan 2a$, ou $(MO + OH) / AH = \tan 2a$.

Finalement $(y + \sin a) / \cos a = \tan 2a$. Sachant que $\tan 2a = 2 \tan a / (1 - \tan^2 a)$, on trouve :
$y + \sin a = 2 \tan a \ \cos a / (1 - \tan^2 a) = 2 \sin a / (1 - \tan^2 a)$

$y = 2 \sin a / (1 - \tan^2 a) - \sin a = (2 \sin a - \sin a\,(1 - \tan^2 a)) / (1 - \tan^2 a)$
$\quad = \sin a\,(1 + \tan^2 a) / (1 - \tan^2 a) = \sin a / (\cos^2 a - \sin^2 a)$

$$y = \frac{\sin a}{1 - 2\sin^2 a} = \frac{x}{1 - 2x^2} \qquad \text{(on a aussi } y = \frac{\sin a}{\cos 2a}\text{)}$$

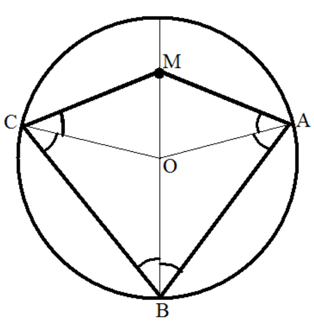
c) Etudier la fonction y(x) et en déduire que pour tout point M à l'intérieur ou sur le cercle, il existe une trajectoire unique.

L'angle a étant compris entre 0 et 90°, son sinus est entre 0 et 1. Avec x dans [0 1], y n'existe pas pour $2x^2 = 1$, soit $x = 1/\sqrt{2}$. La dérivée est $y' = (1 + 2x^2)/(1 - 2x^2)^2$ qui est toujours positive, et la fonction est strictement croissante sur $[0, 1/\sqrt{2}\,]$ et sur $[1/\sqrt{2}\,, 1]$. On a $y = 1$ pour $2x^2 + x - 1 = 0$, et cette équation a pour seule solution positive $x = 1/2$, soit $a = 30°$.

Strictement croissante et continue sur [0, 1/2] puisque $1/2 < 1/\sqrt{2}$, la fonction réalise une bijection de [0, 1/2] sur [0 1] Ainsi, lorsque y décrit [0 1], ce qui signifie que M est à l'intérieur du cercle, $x = \sin a$ décrit [0, 1/2], et a décrit [0, 30°]. Pour chaque point M il existe donc une trajectoire unique, et à la limite, quand M est sur le cercle, la trajectoire est un triangle équilatéral.

4) Cas d'une trajectoire partant de M pour revenir en M après trois rebonds.

a) La trajectoire part d'un point M, se réfléchit en A puis en B puis en C pour revenir en M. Cette trajectoire sera prise au sens près : on considérera que la trajectoire MCBAM est la même que MABCM.[3] *Montrer que si la trajectoire existe, elle possède un axe de symétrie qui est (OB).*



Les réflexions en A, B et C font que les rayons (OA), (OB), (OC) sont les bissectrices des trois angles en A, B et C. Cela donne deux angles égaux en chacun de ces trois points. Comme les triangles OAB et OBC sont isocèles, les six angles obtenus sont égaux (*voir dessin*).

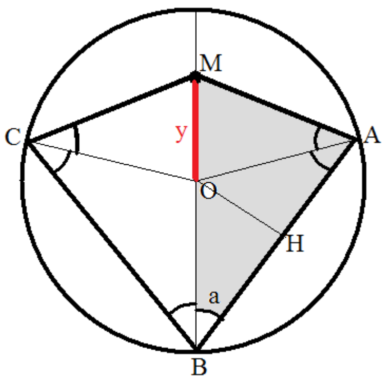
Les droites (BA) et (BC) sont symétriques par rapport à (OB), et comme le cercle admet aussi (OB) comme axe de symétrie, les points A et C sont symétriques par rapport à (OB). Comme les droites (CM) et (AM) font des angles égaux avec (OC) et (OA) qui

[3] Rappelons que l'on suppose que la trajectoire *MABCM* ne repasse pas en *M* entretemps, de façon à ne pas tenir compte de la solution évidente qui consiste en une trajectoire en aller-retour en ligne droite suivant un diamètre du cercle passant par *M*.

sont symétriques, les droites (*CM*) et (*AM*) sont aussi symétriques par rapport à (*OB*) et elles se coupent en *M* qui est aussi sur l'axe de symétrie. Ainsi la trajectoire *MABCM* possède (*OB*) comme axe de symétrie.

b) On donne au cercle un rayon égal à 1, et l'on prend un point M tel que OM = y avec y entre 0 et 1. En privilégiant le triangle MAB, on appelle a l'angle OBA. Déterminer une relation entre y et a, plus précisément y en fonction de a. Puis étudier cette fonction, et en déduire que dans ce contexte, on trouve une solution unique lorsque y est compris entre 1/3 et 1.

Dans le triangle *MAB*, l'angle *B* vaut *a* et l'angle *A* vaut 2*a*, d'où l'angle *M* est égal à 180° – 3*a*. Grâce au triangle isocèle *OAB* avec sa hauteur (*OH*), on a *AH* = cos *a*, et *AB* = 2 cos *a*. Connaissant maintenant le côté *AB* du triangle *MAB* ainsi que ses angles, on en déduit l'égalité :



$$\frac{MB}{\sin 2a}=\frac{AB}{\sin 3a} \quad \text{car } \sin(180-3a)=\sin 3a,$$ [4]

$$\frac{1+y}{\sin 2a}=\frac{2\cos a}{\sin 3a}$$

$$1+y=\frac{2\cos a\,\sin 2a}{\sin 3a}$$

$$y=\frac{2\cos a\,\sin 2a-\sin 3a}{\sin 3a}$$

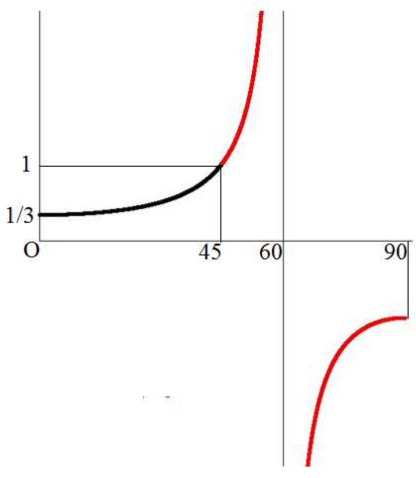
$$=\frac{2\cos a\,\sin 2a-\sin 2a\,\cos a-\sin a\,\cos 2a}{\sin 3a}$$

$$=\frac{\cos a\,\sin 2a-\sin a\,\cos 2a}{\sin 3a}$$

$$=\frac{\sin a}{\sin 3a}$$

Ainsi, en partant d'un angle *a* situé en *B*, on trouve *y* = sin *a* / sin 3*a*.

Etudions cette fonction, en prenant l'angle *a* entre 0 et 90°. Elle n'est pas définie lorsque sin 3*a* = 0, soit 3*a* = *k* × 180°, *a* = *k* × 60°, ce qui donne deux valeurs de *a* : *a* = 0°, *a* = 60° pour lesquels la fonction n'est pas définie. On constate que lorsque *a* tend vers 0, *y* équivaut à *a* / 3*a*, *y* tend vers 1/3. Lorsque *a* tend vers 60°, *y* tend vers l'infini.



Dérivons : *y*' = (sin 3*a* cos *a* – 3 cos3*a* sin *a*)/(sin 3*a*)^2, du signe du numérateur

N = sin 3*a* cos *a* – 3 cos 3*a* sin *a*
= sin 3*a* cos *a* – cos 3*a* sin *a* – 2 cos 3*a* sin *a*
= sin 2*a* – 2 cos 3*a* sin *a*
= 2 sin *a* cos *a* – 2 cos 3*a* sin *a*
= 2 sin *a* (cos *a* – cos 3*a*)
qui est du signe de cos *a* – cos 3*a*

Lorsque *a* est entre 0 et 30°, cos *a* et cos 3*a* sont tous deux positifs, mais cos 3*a* est inférieur à cos *a*, donc *N* est positif.

Lorsque *a* est entre 30° et 90°, cos *a* est positif mais cos 3*a* négatif, donc *N* est encore positif. Finalement la dérivée est positive, et la fonction strictement croissante sur

[4] On utilise ici la relation connue dans un triangle *ABC* avec *a* = *BC*, *b* = *CA*, *c* = *AB* :
a / sin *A* = *b* / sin *B* = *c* / sin *C*.

chacun des deux intervalles.

Le nombre y a pour contrainte d'être entre 0 et 1. On trouve que $y = 1$ pour $\sin a = \sin 3a$, soit $a = 3a$ [360] ou $a = 180 - 3a$ [360]. Avec a dans]0, 90], la seule possibilité est $a = 45°$. Maintenant on peut conclure : sur l'intervalle]0, 45°] la fonction est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de]0, 45] sur]1/3, 1].

Finalement, lorsque y est compris entre 1/3 et 1, il existe un angle a (entre 0 et 45°) et une trajectoire unique, tandis que pour y entre 0 et 1/3 il n'existe aucune trajectoire.

Sur la *figure 1* sont tracées quelques trajectoires. On constate que le cas exceptionnel où M est aligné avec A et C donne lieu à une trajectoire unique en forme de triangle équilatéral ($a = 30°$ et $y = 1/2$). Ce cas constitue la frontière entre les trajectoires convexes et concaves (avec un angle rentrant en M).

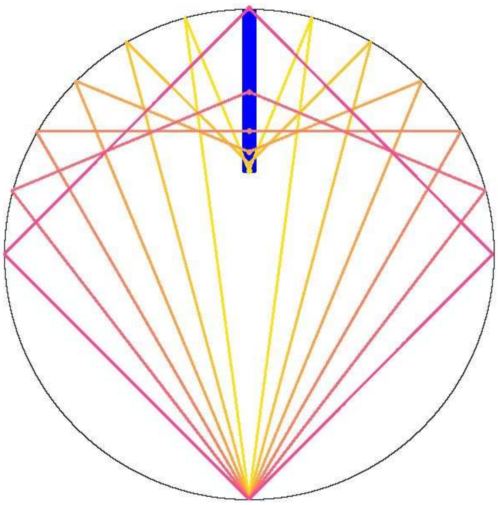
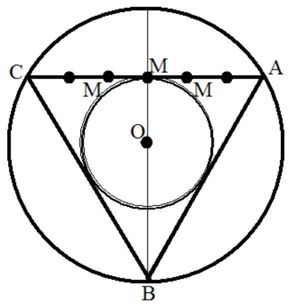
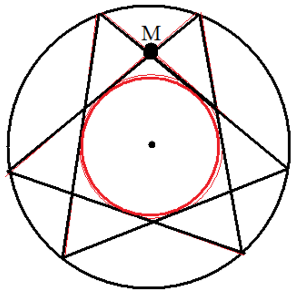


Figure 1 : Quelques trajectoires avec le point M situé dans la zone bleue entre 1/3 et 1

c) Prendre le cas où les droites (M A) et (M C) sont confondues, et indiquer la forme de la trajectoire. Constater que le point M peut être déplacé sur [AB] sans rester aligné avec O et B. En déduire qu'à la trajectoire unique trouvée jusqu'ici s'ajoutent deux autres trajectoires pour des valeurs de y à préciser.





Comme on l'a remarqué précédemment, pour $a = 30°$, $y = 1/2$, la trajectoire devient un triangle équilatéral, avec M, A, C alignés, et M sur (OB). Comme on l'a déjà vu au 1°, on constate qu'en déplaçant le point M sur [AC], la trajectoire reste ce même triangle équilatéral, avec les trois rebonds en A, B, C. Ces points M autres que celui situé sur (OB) sont tels que $y > 1/2$.

Il en découle que lorsque M a son y supérieur à 1/2, deux nouvelles trajectoires s'ajoutent à la trajectoire unique trouvée précédemment. On constate en effet que la trajectoire en forme de triangle équilatéral admet comme cercle inscrit le cercle de centre O et de rayon 1/2.

A partir d'un point M avec $y > 1/2$, on peut toujours construire deux triangles équilatéraux en menant des tangentes à ce cercle.

Conclusion : pour *y* dans]0, 1/3], il n'existe aucune trajectoire, pour *y* dans]1/3, 1/2] il existe une trajectoire, et pour *y* dans]1/2, 1[il existe trois trajectoires.

On trouvera sur la *figure 2* un exemple où il existe trois trajectoires issues de *M*.

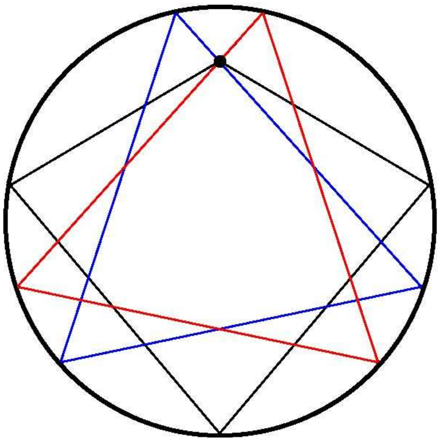


Figure 2 : Les trois trajectoires possibles (*en noir, rouge et bleu*) pour le point *M* avec $y = 3/4$

d) Faire le programme qui permet de visualiser les trajectoires

Nous allons traiter le cas où il existe trois trajectoires ($y > 0{,}5$). Pour cela on commence par se donner le point *M* de coordonnées $(0, y)$ dans le repère orthonormé d'origine *O*. Pour avoir la valeur de l'angle *a* correspondant au *y* de *M*, on prend la fonction donnant *y* en fonction de *a* (dans le programme *yy* en fonction de *aa*) et quand on tombe sur le *y* de *M*, on enregistre l'angle *a* correspondant.

```
y=0.75;  /* on se donne le point M, ici y = 0,75 */
for(aa=0.0001; aa<M_PI/2.;aa+=0.0001)
  { yy =sin(aa)/sin(3.*aa);
    if (fabs(yy-y)<0.0001)
      { a=aa; /* on cherche le a  correspondant à y */
        break ;
      }
  }
```

Passons maintenant au tracé de la trajectoire *MABCM*.

Commençons par [*BA*], avec $B(0, -1)$. La droite (*BA*) fait un angle *a* avec la verticale (*Oy*), soit un angle $\pi/2 - a$ avec l'horizontale. Sa pente est donc $m = \tan(\pi/2 - a) = 1 / \tan a$, et son équation $Y = mX - 1$. Pour avoir le point *A*, sur cette droite et sur le cercle, on résout le système

$Y = mX - 1$

$X^2 + Y^2 = 1$,

ce qui donne l'équation en X : $(m^2 + 1) X^2 - 2 m X = 0$, d'où les coordonnées de *A* :

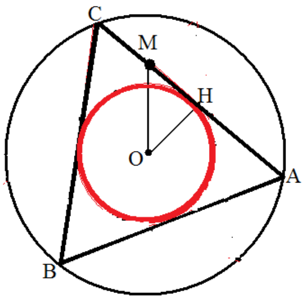
$xa = 2m / (m^2 + 1)$, $ya = m\, xa - 1$.

Cela permet de tracer [*BA*], [*MA*] puis leurs symétriques [*BC*], [*MC*].

```
xorig=400;yorig=300;zoom=290;
filldisc(xorig,yorig-zoom*y,8,black); /*M*/
circle(xorig,yorig,zoom,black); /* cercle */
m=1./tan(a);
xa=2.*m/(1.+m*m);ya=m*xa-1;
linewithwidth(xorig,yorig+zoom,xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,1,black);  /*BA */
 linewithwidth(xorig,yorig-zoom*y,xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,1,black);  /*MA*/
```

```
linewithwidth(xorig,yorig+zoom,xorig-zoom*xa,yorig-zoom*ya,1,black); /*BC*/
linewithwidth(xorig,yorig-zoom*y,xorig-zoom*xa,yorig-zoom*ya,1,black); /*MC*/
```

Passons enfin aux deux trajectoires en forme de triangle équilatéral (quand $y > 0,5$).



Pour avoir le premier, menons à partir de M la tangente au cercle de centre O et de rayon 0,5. Elle fait un angle β avec la verticale : β = angle OMH sur le dessin ci-dessous, avec H point de tangence (on a pris la tangente du côté droit). On a $\sin \beta = OH / OM = 1 / (2y)$, d'où $\beta = \text{Arcsin}(1 / (2y)$. La droite (MA) fait un angle de $90 - \beta$ avec l'horizontale, mais l'angle orienté à partir de l'horizontale est $\beta - \pi/2$, d'où la pente m de (MA) : $m = \tan(\beta - \pi/2)$. L'équation de (MA) est $Y = mX + y$. Pour avoir les points d'intersection A et C de cette droite avec le cercle, résolvons le système :

$Y = mX + y$
$X^2 + Y^2 = 1$
d'où l'équation en X : $(m^2 + 1) X^2 + 2 m y X + y^2 - 1 = 0$. Le discriminant réduit est $\Delta' = m^2 - y^2 + 1$, et les coordonnées des points d'intersection sont :

$X = \dfrac{-my \pm \sqrt{\Delta'}}{1 + m^2}$, $Y = mX + y$, ce qui donne les points $A(X1, Y1)$ et $C(X2, Y2)$.

Pour avoir le dernier point B du triangle, utilisons H qui est le milieu de $[CA]$:
$xh = - m y / (1 + m^2)$, $yh = m\, xh + y$. Grâce au triangle équilatéral, on a en vecteurs **OB** = – 2 **OH**, on en déduit les coordonnées de H $(X3, Y3)$: $X3 = - 2\, xh$, $Y3 = - 2\, yh$. D'où le programme :

```
beta=asin(1./(2.*y)); m=tan(-M_PI/2.+beta);
deltaprime=m*m-y*y+1.;
X1=(-m*y+sqrt(deltaprime))/(1.+m*m); Y1=m*X1+y;
X2=(-m*y-sqrt(deltaprime))/(1.+m*m); Y2=m*X2+y;
X3=-m*y/(1.+m*m); Y3=m*X3+y; /* point H */
X3=-2.*X3;Y3=-2*Y3; /* point B */
linewithwidth(xorig+zoom*X1,yorig-zoom*Y1,xorig+zoom*X2,yorig-zoom*Y2,1,blue);
linewithwidth(xorig+zoom*X2,yorig-zoom*Y2,xorig+zoom*X3,yorig-zoom*Y3,1,blue);
linewithwidth(xorig+zoom*X1,yorig-zoom*Y1,xorig+zoom*X3,yorig-zoom*Y3,1,blue);
```

On fait de même pour le deuxième triangle équilatéral, où l'angle β ne change pas, mais la pente de la droite (AC) est maintenant $m = \tan(\pi/2 - \beta)$. Le reste est inchangé par rapport au premier triangle.

C'est ainsi que l'on a obtenu la *figure 2*.