La géode, polyèdre proche de la sphère

Sous sa forme la plus classique, la géode est un polyèdre convexe inscrit dans une sphère, et dont les faces sont des triangles qui ressemblent à des triangles équilatéraux isométriques. Plus le nombre de faces triangulaires est grand, plus la géode ressemble à la sphère dans laquelle elle s'inscrit. Mais ces triangles ne sont ni équilatéraux ni isométriques : leurs côtés n'ont pas exactement la même longueur, leurs angles ne sont pas exactement les mêmes, et le degré de leurs sommets –nombre de triangles accrochés à eux, n'est pas partout égal à six.[1] Sauf dans trois cas simples mais peu intéressants, ceux où l'on a les trois polyèdres réguliers qui ont comme faces des triangles équilatéraux isométriques, à savoir le tétraèdre avec ses 4 faces, l'octaèdre avec ses 8 faces, et l'icosaèdre avec ses 20 faces[2] (*figure 1*). Au-delà de 20, les faces ne peuvent plus être parfaitement des triangles équilatéraux isométriques.

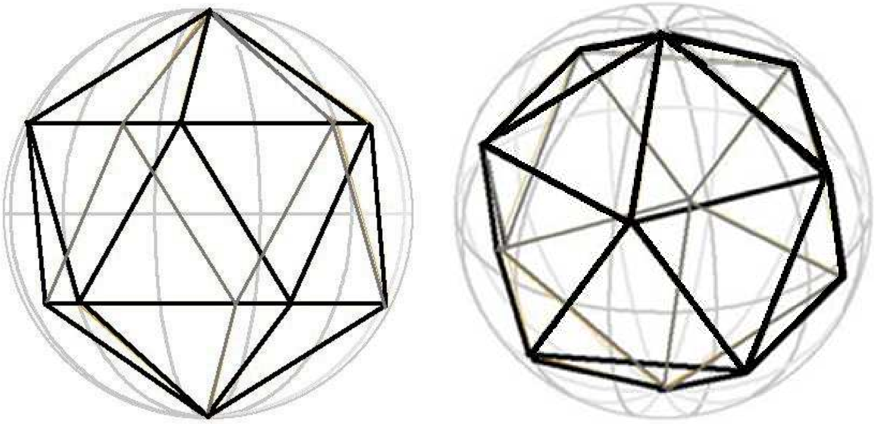


Figure 1 : L'icosaèdre régulier, vu sous deux angles différents.

Pour construire une géode, la méthode la plus simple consiste à partir de l'icosaèdre régulier, le polyèdre qui a le plus de faces triangulaires isométriques et équilatérales, puis à découper chaque face en un nombre quelconque de triangles équilatéraux isométriques. Pour cela, on coupe chaque côté du triangle en a intervalles, et à partir de ces graduations, on mène des parallèles aux côtés correspondants (*figure 2*). Cela donne a^2 petits triangles équilatéraux isométriques. On appelle ce nombre a^2 la densité de la géode. Puis on projette radialement les sommets de ces triangles sur la sphère, et cela pour les 20 faces de l'icosaèdre, ce qui aboutit à la géode. Lors de cette projection, les triangles sont légèrement déformés, ils ne sont plus tous isométriques ni équilatéraux.

---

[1] Si tel était le cas, le polyèdre dual aurait des faces toutes hexagonales, et l'on démontre que cela est impossible.

[2] Pour construire un icosaèdre dans la sphère unité, on place un sommet au pôle nord (0, 0, 1), puis on lui accroche une coupole de cinq triangles équilatéraux, avec cinq sommets formant un pentatgone régulier dans un plan à l'altitude $1/\sqrt{5}$, et tous sur un cercle de rayon $2/\sqrt{5}$. On fait de même au pôle sud en prenant un pentagone régulier à l'altitude $-1/\sqrt{5}$, ce pentagone étant tourné de $\pi/5$ par rapport à l'autre. D'où le programme :

```
r=2./sqrt(5.);
x[0]=0.;y[0]=0.;z[0]=1.;
x[11]=0.;y[11]=0.;z[11]=-1.;
for(k=0;k<5;k++) {x[k+1]=r*cos(k*2.*M_PI/5.);y[k+1]=r*sin(k*2.*M_PI/5.);z[k+1]=0.5*r;}
for(k=0;k<5;k++){ x[k+6]=r*cos(k*2.*M_PI/5.+M_PI/5.);y[k+6]=r*sin(k*2.*M_PI/5.+M_PI/5.);z[k+6]=-0.5*r;}
```

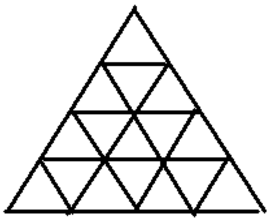


Figure 2 : Une face de l'icosaèdre découpée en petits triangles équilatéraux isométriques, avec ici $a = 4$.

C'est ainsi qu'a été construite la Géode de la Cité des Sciences et de l'Industrie de la Villette à Paris, avec $a = 10$, d'où 100 triangles par face, et un total de 2000 faces miroirs. Sur la *figure 3* est représentée une géode pour $a = 4$, avec ses 320 triangles. Le choix des couleurs fait ressortir les 20 faces de l'icosaèdre sous-jacent. Mais même avec des couleurs aléatoires, le partage de la géode suivant les faces de l'icosaèdre apparaîtraient. Et surout ses 12 sommets sont reconnaissables : ils sont tous de degré 5 (ils ont 5 triangles autour d'eux), tandis que tous les autres sommets de la géode sont de degré 6.[3]

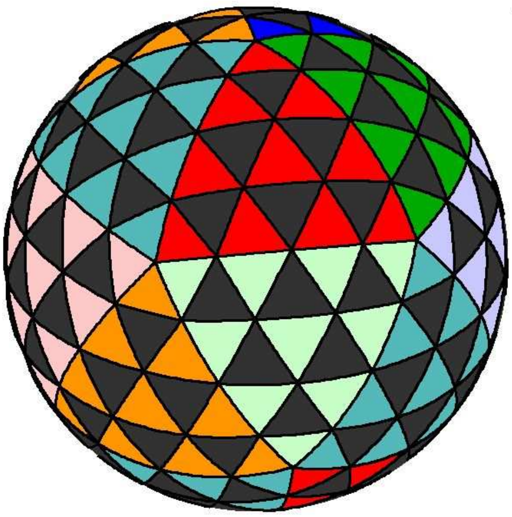


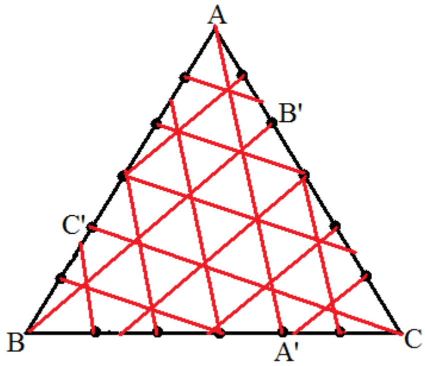
Figure 3 : Géode obtenue pour $a = 4$.

Aussi a-t-on été amené à compliquer la construction des petits triangles pour masquer la présence de l'icosaèdre. Reprenons une face triangulaire *ABC* de l'icosaèdre, et découupons ses côtés en $a + b$ intervalles réguliers, a et b étant des nombres entiers. En appelant *A'*, *B'*, *C'* les points des côtés ayant a intervalles à leur gauche et b à leur droite, traçons les segments [*AA'*], [*BB'*], [*CC'*]. Puis à partir des autres graduations de [*BC*], traçons des parallèles à [*AA'*], et faisons de même sur les deux autres côtés (*figure 4 à gauche*). Les segments régulièrement espacés suivant trois directions donnent un découpage en triangles équilatéraux isométriques, avec seulement des morceaux de ces mêmes triangles aux abords des côtés de *ABC*.

Maintenant, accolons au triangle *ABC* un deuxième triangle équilatréral *ACD*, celui-ci étant censé représenter une autre face de l'icosaèdre, et découpons ce triangle comme on l'avait fait pour *ABC*. On constate alors que les morceaux des bordures se joignent de part et d'autre pour donner des triangles équilatéraux (*figure 4 à droite*). En ne regardant que la division en triangles, le côté [*AC*] de l'icosaèdre n'est plus visible, et c'est l'intérêt de cette méthode par rapport à la précédente où l'on avait en fait $b = 0$. Mais sur l'icosaèdre en trois dimensions, les faces *ABC* et *ACD* sont dans deux

[3] Si l'on prend les triangles sphériques obtenus par projection des faces planes de la géode sur la sphère circonscrite, leurs angles sont soit tous trois égaux à $\pi/3$, soit pour 20 d'entre eux deux angles valent $\pi/3$ et le troisième $2\pi/5$.

plans différents, avec un angle non plat entre elles le long de [AC]. Les triangles de la géode empiétant sur cette bordure ne vont plus être équilatéraux non plus.



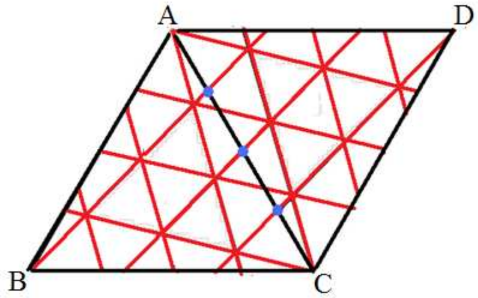


Figure 4 : *A gauche*, découpage d'une face ABC de l'icosaèdre suivant les trois directions (AA'), (BB'), (CC'), ici avec $a = 4$ et $b = 2$. On obtient des petits triangles équilatéraux isométriques, avec des morceaux de ces mêmes triangles le long des bordures. *A droite*, après avoir accolé le triangle ACD au triangle ABC, ici avec $a = 3$ et $b = 1$, les morceaux de triangles de part et d'autre de [AC] se couplent pour former des triangles équilatéraux complets.

Le nombre de petits triangles équilatéraux situés sur une face de l'icosaèdre est la densité D de la géode. On démontre que cette densité est $D = a^2 + ab + b^2$. Connaissant le nombre de faces $f = 20$ de l'icosaèdre, le nombre de faces de la géode est $F = f\,D = 20\,D$. Sachant que chaque face triangulaire de la géode a trois arêtes, cela fait un total de 3 F arêtes, mais celles-ci sont comptées deux fois, d'où le nombre d'arêtes de la géode $A = 3\,F / 2 = 30\,D$.

Connaissant la formule d'Euler liant F, A et le nombre de sommets S d'un polyèdre, soit $F + S - A = 2$, on en déduit le nombre de sommets de la géode $S = A - F + 2 = 30\,D - 20\,D + 2 = 10\,D + 2$. Connaissant aussi le nombre de sommets $s = 12$ de l'icosaèdre, ces sommets étant les seuls de degré 5 sur la géode, la nombre de sommets S_6 de degré 6 de la géode est $S_6 = 10\,D + 2 - 12 = 10\,D - 10 = 10\,(D - 1)$.

A ce stade, nous avons admis que le découpage en triangles équilatéraux de la *figure 4* était valide, et nous avons aussi admis la formule donnant $D = a^2 + ab + b^2$. Dans ce qui suit, nous faisons les démonstrations correspondantes, sous forme d'exercice.

Démonstrations

Considérons un triangle équilatéral ABC de sens direct, dont un côté mesure $a + b$, a et b étant deux nombres entiers avec $a \geq b \geq 0$ et $a > 0$. Posons $k = a\ /\,(a + b)$ et sur chaque côté plaçons les points A', B', C' tels que $\mathbf{BA'} = k\,\mathbf{BC}$, $\mathbf{CB'} = k\,\mathbf{CA}$ et $\mathbf{AC'} = k\,\mathbf{AB}$ (avec en gras les vecteurs). Les droites (AA'), (BB'), (CC') se coupent en I, J, K, comme indiqué sur la *figure 5*. On appelle G le centre de gravité de ABC.

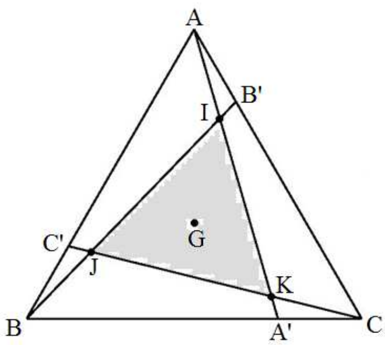


Figure 5 : Le triangle IJK équilatéral, obtenu à partir du triangle équilatéral ABC, avec ici $a = 3$ et $b = 1$.

1) Montrer que *IJK* est un triangle équilatéral de centre *G*.

Le triangle équilatéral *ABC* étant un polygone régulier à trois sommets, la rotation *R* de centre *G* et d'angle $2\pi/3$ le laisse globalement invariant, notamment [*AB*] → [*BC*], et comme *C'* et *A'* sont dans les mêmes proportions sur ces segments, on a aussi *C'* → *A'*. De même *A'* → *B'* et *B'* → C'.

On en déduit que [*AA'*] → [*BB'*] → [*CC'*] → [*AA'*]. Le point d'intersection *I* de [*AA'*] et [*BB'*] est trarnsformé en point d'intersection de [*BB'*] et [*CC'*], soit *J*, et de même *J* → *K* et *K* → *I*. Les segments [*GI*], [*GJ*], [*GK*] ont même longueur et font entre eux un angle de $2\pi/3$. Le triangle *IJK* est un triangle équilatéral de sens direct et *G* est aussi son centre de gravité.

2) Montrer que *I* est le barycentre des points pondérés (A, a^2), (B, b^2), (C, ab). En déduire que *J* et *K* sont aussi des barycentres de *A*, *B*, *C* avec des poids que l'on précisera.

Le barycentre de (B, b^2), (C, ab) est aussi celui de (B, b), (C, a), Or le point *A'* vérifie **BA'** = *k* **BC**, soit $(a + b)$ **BA'** = *a* **BC**, $(a + b)$ **BA'** = *a* (**BA'** + **A'C**), *b* **A'B** + *c* **A'C** = **0**, et *A'* est le barycentre de (B, b), (C, a). Grâce à la règle du barycentre partiel, le barycentre de (A, a^2), (B, b^2), (C, ab) est aussi celui de $(A', a + b)$ et (A, a^2). Il est sur (*AA'*). Pour les mêmes raisons, *B'* est le barycentre de (C, b) et (A, a), ou de (C, ab) et (A, a^2), et le barycentre de (A, a^2), (B, b^2), (C, ab) est sur (*BB'*). Etant à l'intersection de (*AA'*) et (*BB'*), il s'agit du point *I*.

Par permutation circulaire, le point *J* est le barycentre de (A, ab), (B, a^2), (C, b^2), et *K* celui de (A, b^2), (B, ab), (C, a^2).

3) On se place maintenant dans le plan complexe avec le repère d'origine *G* et d'axes parallèles à [*BC*) et [*GA*), où [*BC*] a pour longueur $a + b$ comme précédemment. Déterminer les affixes *z*, *z'* et *z''* de *I*, *J*, *K*. On posera $D = a^2 + a\,b + b^2$, et l'on utilisera le nombre *j* de module 1 et d'argument $2\pi/3$.

Une hauteur de *ABC* a pour longueur $(a + b)\sqrt{3} / 2$, et comme *G* est situé aux 2/3 de la hauteur à partir de *A*, on en déduit que l'affixe de *A* est $z_A = i\,(a + b)\sqrt{3} / 3$. Comme *B* et *C* se déduisent de *A* par rotations de centre *G* et d'angle $2\pi/3$, on obtient les affixes de *B* et *C* :

$z_B = i\,j\,(a + b)\sqrt{3} / 3$ et $z_C = i\,j^2\,(a + b)\sqrt{3} / 3$.

Utilisons le fait que *I*, *J*, *K* sont des barycentres connus de *A*, *B*, *C* :

$$\boxed{\begin{aligned} z &= \frac{a^2 z_A + b^2 z_B + a\,b\,z_C}{D} = i\,\frac{(a+b)\sqrt{3}}{3D}(a^2 + b^2\,j + a\,b\,j^2) \\ z' &= \frac{a\,b\,z_A + a^2 z_B + b^2 z_C}{D} = i\,\frac{(a+b)\sqrt{3}}{3D}(a\,b + a^2 j + b^2 j^2) \\ z'' &= \frac{b^2 z_A + a\,b\,z_B + a^2 z_C}{D} = i\,\frac{(a+b)\sqrt{3}}{3D}(b^2 + a\,b\,j + a^2\,j^2) \end{aligned}}$$

4) Déterminer la longueur d'un côté de *IJK*, et en déduire l'aire du triangle *IJK*.

Le vecteur **IJ** a pour affixe :

$$z' - z = i\,\frac{(a+b)\sqrt{3}}{3D}(ab - a^2 + (a^2 - b^2)\,j + (b^2 - ab)\,j^2)$$
$$= i\,\frac{(a+b)(b-a)\sqrt{3}}{3D}(a - (a+b)\,j + b\,j^2)$$
$$= i\,\frac{(b^2-a^2)\sqrt{3}}{3D}(a - (a+b)\,j + b\,j^2)$$

D'où :

$$IJ^2 = (z'-z)\overline{(z'-z)} = \frac{(a^2-b^2)^2}{3D^2}(a-(a+b)\,j+b\,j^2)(a-(a+b)\,j^2+b\,j)$$
$$= \frac{(a^2-b^2)^2}{3D^2}(2D - D\,j - D\,j^2) = \frac{(a^2-b^2)^2}{3D}(2 - j - j^2) = \frac{(a^2-b^2)^2}{D}$$

L'aire de *IJK* vaut

$$IJ^2\sqrt{3}/4 = \frac{(a^2-b^2)^2\sqrt{3}}{4D}$$

5) Montrer que le rapport de l'aire de *ABC* par celle de *IJK* vaut $D/(a-b)^2$.

L'aire de *ABC* est $AB^2\sqrt{3}/4 = (a+b)^2\sqrt{3}/4$. Le rapport demandé est :

$$\frac{(a+b)^2 D}{(a^2-b^2)^2} = \frac{(a+b)^2 D}{(a-b)^2(a+b)^2} = \frac{D}{(a-b)^2}$$

6) On considère le point *P* à *b* unités de *B* sur [*BC*], soit **BP** = (*b* / (*a* + *b*)) **BC**. Calculer les coordonnées des vecteurs **AA'** et **JP**. En déduire que (*BJ*) est parallèle à (*AA'*).

On connaît les coordonnées de *A* (0, $(a+b)\sqrt{3}/3$).

Celles de *A'* sont :

$x_{A'} = x_B + a = -(a+b)/2 + a = (a-b)/2$

$y_{A'} = y_B = -(a+b)\sqrt{3}/6$

On en déduit **AA'** $\begin{pmatrix} (a-b)/2 \\ -(a+b)\sqrt{3}/6 - (a+b)\sqrt{3}/3 = -(a+b)\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

A son tour, le point *P* a pour coordonnées $x_P = x_B + b$, $y_P = y_B$, soit

P $\begin{pmatrix} (b-a)/2 \\ -(a+b)\sqrt{3}/6 \end{pmatrix}$

On sait que $z_J = z' = i\,\frac{(a+b)\sqrt{3}}{3D}(a\,b + a^2\,j + b^2\,j^2)$. On en déduit que

$x_J = (a+b)\sqrt{3}\,(a^2-b^2)\sqrt{3}/(6D) = (a+b)^2(a-b)/(2D)$

$y_J = (a+b)\sqrt{3}\,(ab - a^2/2 - b^2/2)/(3D) = -(a+b)(a-b)^2\sqrt{3}/(6D)$

On en déduit

JP $\begin{pmatrix} (b-a)/2 - (a+b)^2(a-b)/(2D) = (a-b)(-D+(a+b)^2)/(2D) = \frac{a\,b(a-b)}{2D} \\ -(a+b)\sqrt{3}/6 + (a+b)(a-b)^2\sqrt{3}/(6D) = \frac{(a+b)\sqrt{3}\ (-D+(a-b)^2}{6D} = \frac{-a\,b\sqrt{3}(a+b)}{2D} \end{pmatrix}$

On constate que **JP** = $\frac{ab}{D}$ **AA'**, (*JP*) est parallèle à (*AA'*).

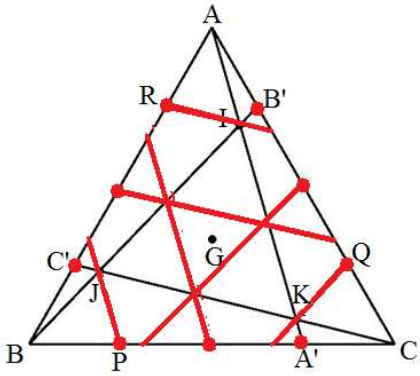
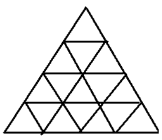


Figure 6 : Formation de triangles équilatéraux par une grille de droites parallèles dans trois directions.

7) Comme avec *P*, prenons le point *Q* à *b* unités sur [*CA*] à partir de *C* et *R* à *b* unités sur [*AB*] (*voir figure 6 ci-dessus*), on a aussi (*KQ*) paralllèle à (*BB'*) et (*IR*) parallèle à (*CC'*). A partir de chaque graduation unité sur [*BC*], menons des parallèles à (*AA'*), et faisons de même en menant des parallèles à (*BB'*) à partir des graduations sur [*CA*], ainsi que des parallèles à (*CC'*) à partir des graduations sur [*AB*]. Ces trois directions de droites font entre elles des angles de 60°, et elles se recoupent à intervalles réguliers. Elles coupent notamment les côtés du triangle *IJK*, en le découpant en triangles équilatéraux. Il en est de même à l'extérieur du triangle *IJK*. Ainsi le triangle *ABC* est découpé en triangles équilatéraux avec éventuellement des morceaux de triangles équilatéraux près de la bordure du triangle *ABC*. Montrer qu'il y a *D* surfaces de petits triangles équilatéraux dans le triangle *ABC*.

Entre *P* et *A'*, il y a $a - b$ intervalles. Chaque côté de *IJK* est découpé suivant $a - b$ intervalles. Le nombre de petits triangles dans *ABC* est égal à 1 + 3 + 5 + ..., cette somme devant comporter $a - b$ termes. On sait que la somme de ces nombres impairs est égale au carré du nombre de ces nombres, soit $1 + 3 + 5 +... = (a - b)^2$.

On a vu que l'aire de *ABC* divisée par celle de *IJK* valait $D / (a - b)^2$. L'aire de *ABC* divisée par celle d'un petit triangle équilatéral est donc $\frac{D}{(a-b)^2}(a-b)^2 = D = a^{2\cdot} + ab + b^2$. Il y a *D* surfaces de petits triangles équilatéraux dans le triangle *ABC*.



Par exemple pour $a = 4$ et $b = 0$ comme sur le dessin ci-contre, on est dans le cas particulier où le triangle *ABC* est découpé intégralement en petits triangles. Ceux-ci sont au nombre de $D = a^2 + ab + b^2 = 16$. Et dans le cas des figures précédentes avec $a = 3$ et $b = 1$, on trouve $D = 13$.

Ajoutons enfin un deuxième triangle équilatéral *ACD* comme sur la *figure 4 à droite*. Il se déduit de *ABC* par symétrie centrale autour du milieu de [*AC*], et la grille des trois directions dans *ABC* se prolonge dans *ACD*, exactement identique. Et cela peut se poursuivre à l'infini. Le pavage du plan par des triangles isométriques avec *ABC* donne un pavage par des petits triangles équilatéraux *D* fois plus nombreux.

Quelques remarques complémentaires

- L'icosaèdre présente 60 rotations qui le laissent globalement invariant, ainsi que 60 isométries négatives (obtenues si l'on veut par composition des rotations avec la symétrie centrale autour du centre de l'icosaèdre). Cela fait 120 symétries pour l'icosaèdre. Ces symétries ne sont pas en général conservées par la géode, sauf dans deux cas particuliers, celui où b est nul, comme sur la *figure 3*, ou lorsque $a = b$ (*figure 7*). Lorsque a est différent de b avec a et b non nuls, des symétries sont perdues, et les deux géodes obtenues en échangeant a et b sont différentes.

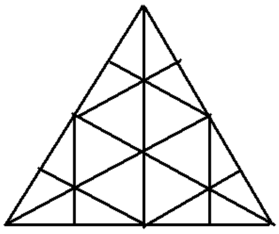


Figure 7 : Découpage d'une face de l'icosaèdre dans le cas où $a = b$, ici $a = b = 2$.

- Si l'on prend la géode duale de celle formée de triangles, on obtient un pavage par des hexagones (qui correspondent à ce qu'étaient les sommets de degré 6) ainsi que 12 pentagones correspondant aux sommets de degré 5.

- La notion de géode est associée à l'idée d'avoir un nombre de triangles aussi grand qu'on le désire pour approcher la sphère, quitte à perdre le fait qu'ils soient équilatéraux ou isométriques. Mais si le pavage d'une sphère par des triangles équlatéraux et isométriques admet au plus les 20 triangles associés à l'icosaèdre, il existe aussi un pavage de la sphère avec 60 triangles tous isométriques et seulement isocèles, mais assez proches de triangles équilatéraux, celui de la *figure 8*. Il est construit à partir d'un dodécaèdre régulier, en découpant chaque face pentagonale en cinq triangles isométriques. Mais on ne fait que retrouver la géode obtenue à partir de l'icosaèdre régulier en faisant $a = 1$ et $b = 1$.

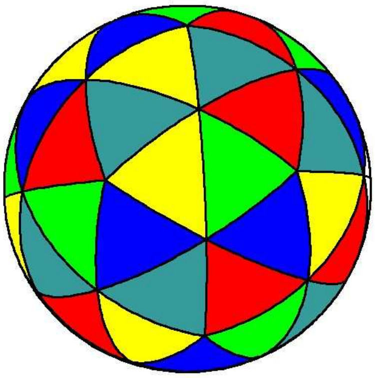


Figure 8 : Pavage de la sphère par des triangles sphériques ayant deux angles égaux à $\pi/3$ et le troisième à $2\pi/5$.