

Pavage avec un pavé polygonal convexe ou concave (1)

Il s'agit de paver le plan en utilisant des copies d'une forme polygonale unique.¹ Par pavage, on entend le recouvrement du plan par ces pavés polygonaux, sans aucun chevauchement. On supposera aussi que les pavés sont collés bord à bord : aucun sommet d'un pavé ne peut toucher l'arête d'un pavé adjacent sinon en ses extrémités qui sont aussi des sommets. Le polygone peut être convexe ou concave, selon qu'il n'a que des angles saillants ou non, mais il est supposé simple : ses arêtes ne se recoupent pas.

Tout polygone à n sommets (et n arêtes) est tel que $n \geq 3$, et il a comme propriété que la somme de ses angles est égale à $(n - 2)\pi$, puisque l'on peut toujours découper un polygone en $n - 2$ triangles adjacents ayant tous un sommet du polygone comme sommet commun.

D'autre part, puisque tout polygone convexe a ses angles inférieurs à 180° , l'assemblage de polygones pour former un pavage implique qu'en chaque sommet commun du pavage, il y ait au moins trois polygones collés les uns aux autres.

1. Pavage à partir d'un polygone régulier convexe

Par définition, un polygone est régulier s'il a tous ses côtés égaux (de même longueur) et tous ses angles égaux (*figure 1*).²

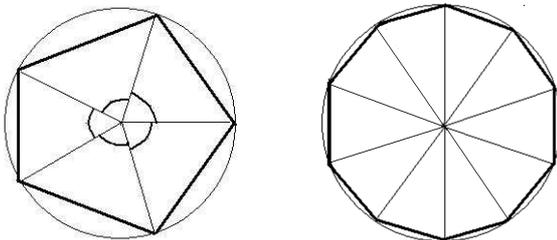


Figure 1 : A gauche, un pentagone régulier convexe avec 5 côtés égaux et 5 angles égaux à $3\pi/5$, les angles au centre valent $2\pi/5$. A droite un décagone régulier.

Pour connaître les polygones réguliers qui pavent le plan, appelons n leur nombre de côtés et k le nombre de polygones collés en un même sommet. L'angle d'un polygone régulier convexe étant $(n - 2)\pi / n$, on doit avoir

$$k(n - 2)\pi / n = 2\pi$$

$$k(n - 2) = 2n$$

$$k(n - 2) = 2n - 4 + 4$$

$$(k - 2)(n - 2) = 4$$

Il y a trois possibilités pour obtenir 4 : 1×4 , 2×2 , 4×1 , d'où $n = 6$, 4 ou 3 (avec $k = 3$, 4 ou 6). Seuls les triangles équilatéraux, les carrés, les hexagones réguliers peuvent paver le plan (*figure 2*). On

¹ Un tel pavage, avec un seul modèle de tuile, est dit monoédrique.

² S'il a seulement ses côtés égaux, il n'a aucune raison d'avoir ses angles égaux et il n'est pas régulier, tel un collier qu'on laisse pendouiller. Une autre définition d'un polygone régulier est d'avoir ses côtés égaux et ses sommets sur un même cercle. Dans ces conditions, le cercle a pour centre le centre de gravité du polygone, et le polygone peut être construit en découpant le disque en n tranches de même angle au centre, soit $2\pi / n$.

constate aisément que le pavage obtenu est bipériodique, c'est-à-dire qu'il existe deux translations de vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 (non parallèles) permettant la répétition infinie des pavés à partir d'un pavé initial. Ce qui signifie aussi que l'on peut passer de n'importe quel pavé à n'importe quel autre par une certaine translation de vecteur $k \mathbf{V}_1 + k' \mathbf{V}_2$, ou encore que le pavage du plan reste globalement invariant sous l'effet de translations avec des vecteurs de la forme $k \mathbf{V}_1 + k' \mathbf{V}_2$.

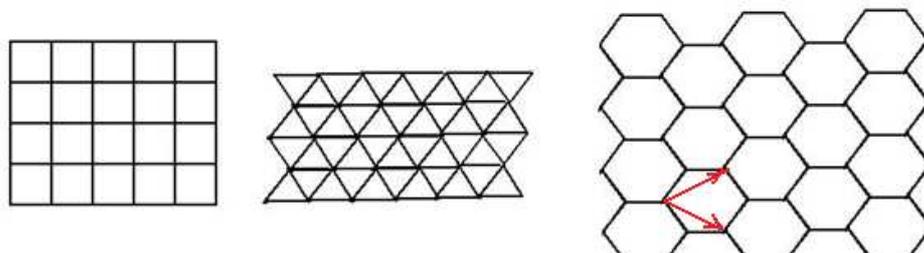


Figure 2 : Les trois seuls pavages possibles à partir d'un polygone régulier. Sur le dessin de droite sont indiqués les vecteurs des deux translations qui laissent le pavage invariant.

2. Pavages à partir d'un triangle quelconque

Prenons un triangle quelconque, et faisons lui subir un demi-tour autour du milieu d'un côté. Le triangle et son symétrique forment un parallélogramme, et un parallélogramme pave le plan. Finalement un triangle quelconque pave le plan et le pavage obtenu est bi-périodique. Les vecteurs des deux translations qui reproduisent le parallélogramme sont portés par deux côtés du triangle ou du parallélogramme (figure 3)

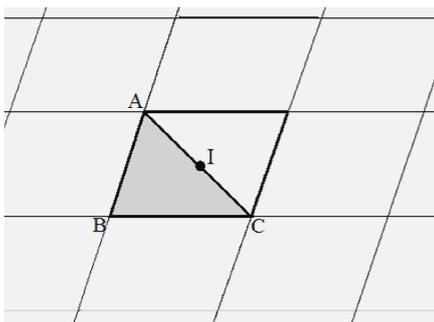


Figure 3 : Un triangle quelconque ABC , avec son symétrique par rapport au milieu I de $[AC]$, ce qui donne un parallélogramme qui pave le plan grâce aux translations de vecteurs \mathbf{BA} et \mathbf{BC} .

2.1. Le miracle des pavages périodiques

Conservons l'exemple précédent. Chaque pavé parallélogramme présente à son échelle une symétrie de demi-tour, c'est-à-dire qu'il reste invariant sous l'effet de ce demi-tour. Le miracle, c'est que ce phénomène local, et indéfiniment reproduit dans chaque pavé, devient global, en ce sens que le pavage infini est à son tour invariant par demi-tour. Vérifions-le :

Choisissons un pavé parallélogramme P_O de centre O , puis prenons un pavé quelconque P_K de centre K . On passe de l'un à l'autre par la translation t_{OK} de vecteur \mathbf{OK} , combinaison des deux vecteurs des translation ($\mathbf{OK} = k \mathbf{V}_1 + k' \mathbf{V}_2$). Il s'agit de prouver que le demi-tour R_O de centre O envoie le parallélogramme de centre K sur un parallélogramme P' du pavage (figure 4 à gauche).

$$P_K = t_{OK}(P_O) = R_K t_{OK}(P_O) \text{ puisque } P_K \text{ est invariant par demi-tour } R_K \text{ autour de } K.$$

Puis faisons subir à P_K le demi-tour de centre O , ce qui donne un parallélogramme P'

$P' = R_O(P_K) = R_O R_K t_{OK}(P_O)$. Mais le produit des deux demi-tours est la translation de vecteur $2 \mathbf{KO}$.

$$P' = t_{2\mathbf{KO}} t_{OK}(P_O) = t_{\mathbf{KO}}(P_O), \text{ et cette translation donne bien un parallélogramme du pavage.}$$

Ainsi le centre de chaque parallégramme du pavage est le centre d'un demi-tour qui laisse globalement invariant le pavage. Cela étant fait, en combinant les translations et les demi-tours, on constate qu'il existe d'autres centres de demi-tours, situés aux sommets des parallégrammes ainsi qu'aux milieux des côtés, laissant aussi invariant le pavage. Le pavage est alors dit du type $p2$ (figure 4 à droite). Signalons que les transformations laissant invariant le pavage sont appelées les symétries du pavage.

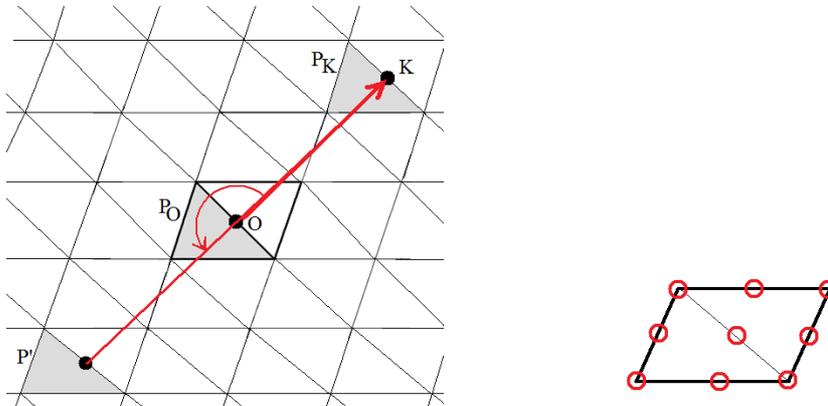


Figure 4 : A gauche, pavage à partir d'un triangle, ce pavage restant invariant par demi-tour autour de O . A droite, le parallégramme de base, et les demi-tours laissant invariant le pavage, leurs centres étant représentés par un rond.

Exercice : Pavage périodique par des hexagones particuliers

Il s'agit d'un exercice pour s'entraîner à fabriquer des pavages périodiques à partir de cas simples. Cela nous amènera à construire le parallégramme générateur dont les côtés sont les vecteurs des deux translations. On aura intérêt à positionner celui-ci de façon que son motif intérieur présente les symétries éventuelles du pavage autres que les translations. On pourra alors dégager la cellule primitive avec son motif intérieur. Il s'agit de la surface minimale à partir de laquelle on peut construire le pavage, en faisant d'abord jouer les symétries autres que les translations, puis les translations.

1) Prendre un parallégramme $ACDF$, remplacer $[AC]$ par deux traits adjacents ABC avec B à l'intérieur du parallégramme, puis remplacer $[FD]$ par deux traits FED parallèles à ABC , avec $[EF]$ parallèle et de même longueur que $[AB]$ tout comme $[ED]$ et $[BC]$. On obtient l'hexagone $ABCDEF$ (figure 5 à gauche). Vérifier que cet hexagone pave le plan de façon périodique.

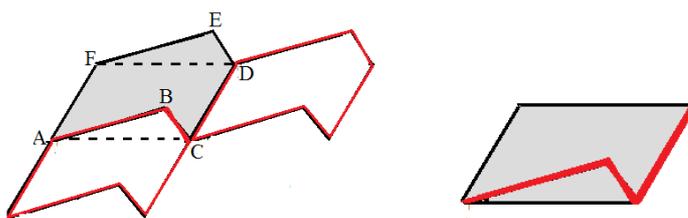


Figure 5 : Hexagone pavant le plan, à gauche. A droite la cellule génératrice avec son motif en rouge.

La figure 5 à gauche montre que le pavé initial peut être reproduit indéfiniment par des translations de vecteur \mathbf{AC} et \mathbf{AF} , ce qui donne un pavage du plan. Le motif de la cellule primitive qui permet de fabriquer ce pavage est indiqué sur la figure 3 à droite. Le groupe de transformations laissant le pavage invariant est engendré par les seules translations, on dit qu'il s'agit d'un pavage de type $p1$. Remarquons que l'on pourrait faire de même sur les côtés $[DC]$ et $[AF]$ en les remplaçant par deux traits, et l'on aurait un octogone qui pave aussi le plan.

2) Prendre maintenant l'hexagone obtenu en mettant à l'envers FED par rapport à ABC , comme sur la figure 6 à gauche. Vérifier que l'hexagone obtenu pave le plan. Puis traiter le cas particulier où le parallégramme $ACDF$ est un rectangle, ce qui ajoute des symétries à préciser.

Comment accoler un deuxième hexagone en dessous de l'hexagone initial $ABCDEF$? Il est nécessaire de retourner l'hexagone par une réflexion d'axe vertical, puis d'effectuer une translation qui permet d'encastrer le nouvel hexagone $A'B'C'D'E'F'$ dans le premier (figure 6 au centre). La figure obtenue peut ensuite être reproduite par des translations de vecteurs \mathbf{ED} et $\mathbf{C'F}$, car le parallélogramme générateur $C'A'DF$, en fait un rectangle, est surmonté d'une excroissance EFD en haut elle-même compensée en bas par une encoche identique $C'B'A'$, tout comme l'excroissance $C'AF$ à gauche est compensée à droite par $A'CD$.

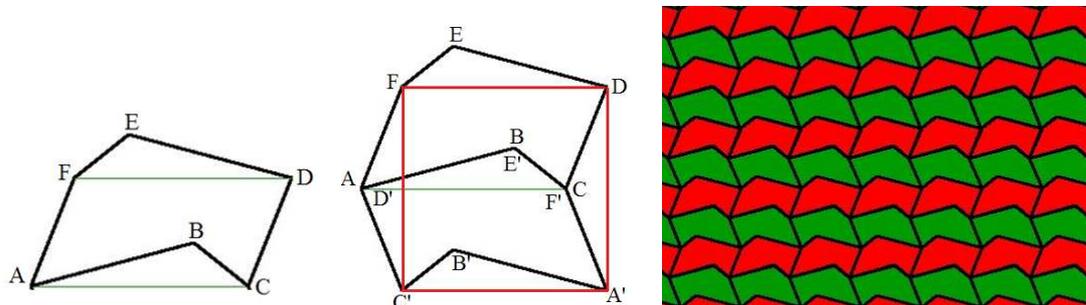


Figure 6 : A gauche l'hexagone. Au centre deux hexagones accolés, puis le parallélogramme en rouge est reproduit par translations pour aboutir au pavage final, à droite.

Lorsque le parallélogramme $ACDF$ de l'hexagone initial devient un rectangle, le motif intérieur au parallélogramme rectangle générateur $C'A'DF$ présente une réflexion glissée, c'est-à-dire le produit d'une réflexion d'axe vertical suivie d'une translation de vecteur vertical égal à $\mathbf{DA'}/2$. Composée avec les translations, les réflexions glissées se répètent à l'infini, et l'on obtient un pavage de type pg , avec un groupe de transformations engendrées par les 2 translations et une réflexion glissée.

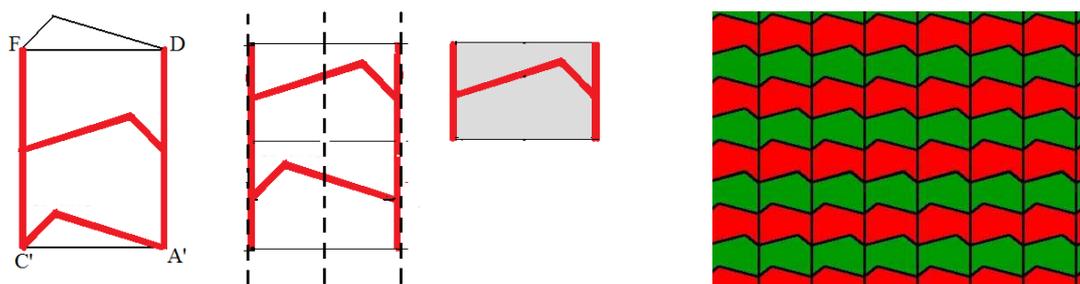


Figure 7 : A gauche, le rectangle générateur du pavage par translations, suivi d'un autre rectangle générateur décalé verticalement par rapport au précédent. Les réflexions glissées sont indiquées en traits pointillés. La moitié de ce rectangle constitue la cellule primitive à partir de laquelle peut être construit le pavage, tel qu'on le voit à droite.

Si l'on revient au cas général, en se reportant à la figure 6, le parallélogramme rectangle générateur du pavage, en rouge sur le dessin, ne faisait pas voir la présence d'une réflexion glissée. Mais tout parallélogramme ayant pour côtés les vecteurs des translations peut être générateurs. Il suffit de modifier sa position, comme sur la figure 8, pour que l'on s'aperçoive que dans le cas général aussi le pavage est du type pg .

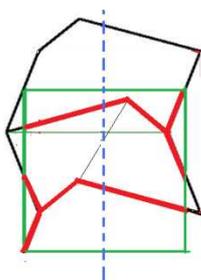


Figure 8 : Le nouveau parallélogramme générateur du pavage de type pg en vert, avec son motif en rouge. La réflexion glissée est indiquée en pointillés bleus.

3) A partir du parallélogramme $ACDE$, prendre E et F tels que $[AB]$ parallèle et de même longueur que $[DE]$, ainsi que $[BC]$ et $[EF]$. On obtient ainsi un hexagone $ABCDEF$ dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. Montrer qu'il permet de construire un pavage.

A partir du premier hexagone, on peut en construire d'autres qui lui sont accolés en faisant des demi-tours autour des milieux de ses côtés. En effet, l'hexagone a ses trois angles \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} dont la somme vaut 360° , et ces trois angles se retrouvent en chaque sommet commun à trois hexagones. Le pavage en découle (*figure 9*). Le parallélogramme générateur comporte des symétries de demi-tour, et la cellule primitive se réduit à un triangle. Avec son groupe de transformations engendré par les deux translations et un demi-tour, le pavage est de type $p2$.

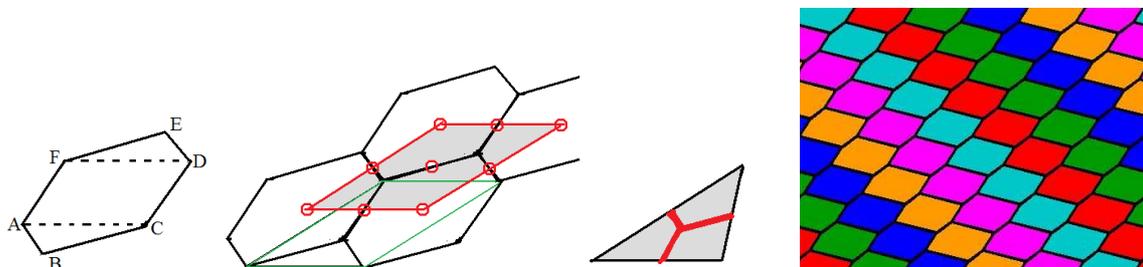


Figure 9 : De gauche à droite, l'hexagone paveur, le parallélogramme générateur du pavage en vert puis en rouge pour le centrer sur les demi-tours, puis la cellule primitive réduite à un triangle avec le motif en rouge, et le pavage final.

4) On met à l'envers ABC et DEF par rapport au cas précédent, soit $[AB]$ et $[EF]$ parallèles et de même longueur, tout comme $[BC]$ et $[DE]$. Montrer que l'hexagone obtenu pave le plan. Dans le cas particulier où le parallélogramme initial $ACDF$ est un rectangle, quelles sont les symétries supplémentaires du pavage ?

Construisons l'hexagone $A'B'C'D'E'F'$ se déduisant de $ABCDEF$ par demi-tour autour du milieu de $[EF]$. Ces deux hexagones accolés peuvent être ensuite reproduits pour donner le pavage. Le parallélogramme générateur a pour côtés les vecteurs des deux translations, soit \vec{AC} et $\vec{AB'}$. A cause des demi-tours s'ajoutant aux translations, le pavage est de type $p2$ (*figure 10*).

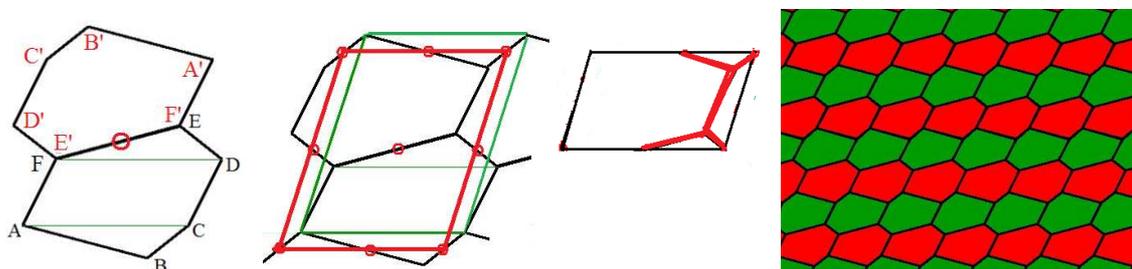


Figure 10 : De gauche à droite, l'hexagone initial et son symétrique par demi-tour, puis des parallélogrammes générateurs en vert et en rouge, celui en rouge étant centré sur le centre d'un demi-tour, puis la cellule primitive avec son motif en rouge, et finalement le pavage.

En partant maintenant d'un rectangle $ACDE$, on constate la présence supplémentaire de réflexions d'axe horizontal (*figure 11*). Le groupe des transformations est engendré par un demi-tour, une réflexion et deux translations, il s'agit d'un pavage dit de type pmg .

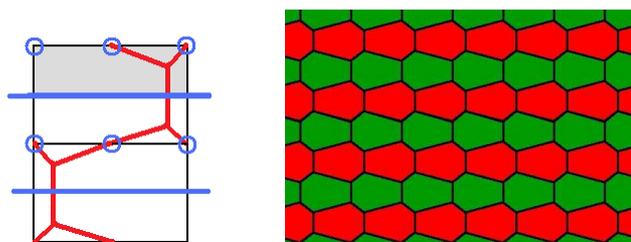


Figure 11 : A gauche le parallélogramme générateur, avec la cellule primitive en gris avec son motif en rouge. A partir d'elle on prend sa symétrique par réflexion, puis la symétrique par demi-tour, ce qui donne le parallélogramme générateur, que l'on reproduit ensuite par translations, d'où le pavage final à droite.

2.2. Pavages non périodiques avec un triangle

Des triangles particuliers ont aussi la capacité de donner des pavages non périodiques, comme le triangle rectangle ou certains triangles isocèles.

2.2.1. Cas du triangle rectangle

Le triangle et son symétrique par demi-tour forment maintenant un rectangle. Et il existe deux façons de remplir ce rectangle avec deux triangles selon la diagonale choisie (*figure 12 à gauche*). Il suffit alors de prendre au hasard un des deux rectangles lors de la construction progressive du pavage, et le résultat obtenu n'est pas périodique (*figure 12 à droite*).

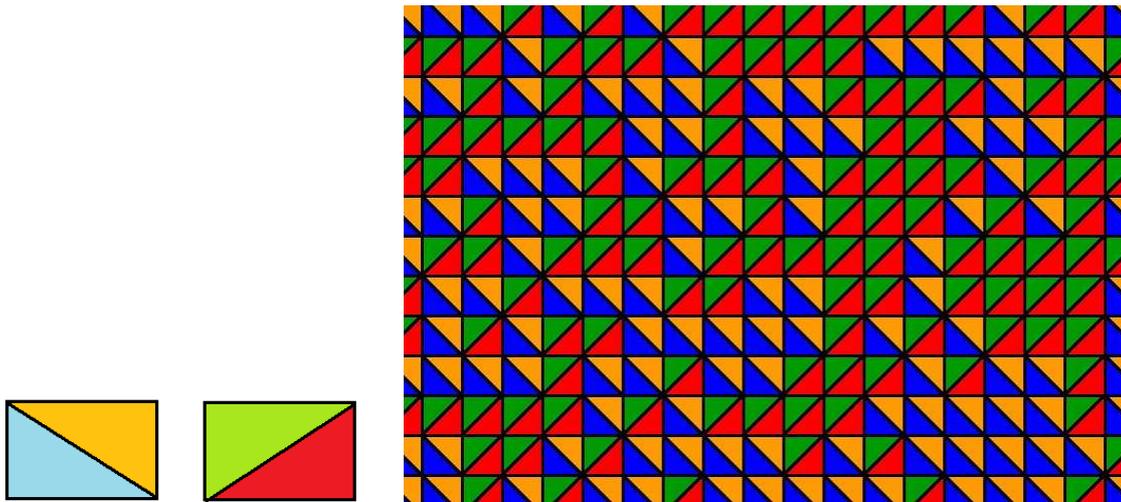


Figure 12 : A gauche les deux types de rectangles qui contiennent le triangle rectangle. A droite, le pavage obtenu en prenant au hasard l'un des deux rectangles (ici un carré) lors de la construction du pavage.

2.2.2. Cas de certains triangles isocèles

Prenons un triangle isocèle dont l'angle au sommet est de la forme $2\pi/p$ avec p entier, de façon que p triangles fassent un tour complet autour d'un sommet commun O . Il suffit de dessiner des triangles identiques dans une tranche d'angle $2\pi/p$, comme sur la *figure 13*, puis l'on fera des rotations d'angle $2\pi/p$ et de centre O afin de remplir le plan. Pour ce faire, nous allons partir d'un grand triangle et le découper en petits triangles de façon récursive. Les sommets du triangle initial sont

- 0 $(\cos(2\pi/p), \sin(2\pi/p))$
- 1 $(0, 0)$ -il s'agit du point O
- 2 $(1, 0)$

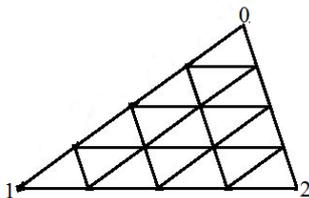


Figure 13 : REMPLISSAGE D'UNE TRANCHE PAR LES TRIANGLES, le point O étant numéroté 1. Ici la variable de récursion $nbpas$ vaut 2, chaque côté étant coupé en $2^2 = 4$.

Pour la programmation, l'essentiel consiste à fabriquer une fonction récursive *triangle()* qui prend comme variables les coordonnées de ses trois sommets, et cette fonction va se rappeler sur les quatre

triangles qu'elle contient. En répétant ce processus n fois, la longueur initiale du grand triangle est divisée 2^n fois pour donner la figure finale avec tous les triangles. Il ne restera plus qu'à répéter ce dessin par rotations.

```

void triangle(float x0,float y0, float x1,float y1, float x2,float y2, int n)
{
    float mx0,my0,mx1,my1,mx2,my2;
    float x[p],y[p],xx[p],yy[p],xxx[p],yyy[p]; int i;
    if (n==0) /* dessin d'un triangle lorsque le découpage est terminé */
    { linewidth(xorig+zoom*x0,yorig-zoom*y0,xorig+zoom*x1,yorig-zoom*y1,1,black);
      linewidth(xorig+zoom*x1,yorig-zoom*y1,xorig+zoom*x2,yorig-zoom*y2,1,black);
      linewidth(xorig+zoom*x2,yorig-zoom*y2,xorig+zoom*x0,yorig-zoom*y0,1,black);
      for(i=1;i<p;i++) /* dessin des points (x,y), (xx, yy), (xxx, yyy) se déduisant par rotations */
      { x[i]=x0*cos(i*2.*M_PI/p) - y0*sin(i*2.*M_PI/p);
        y[i]=x0*sin(i*2.*M_PI/p) + y0*cos(i*2.*M_PI/p);
        xx[i]=x1*cos(i*2.*M_PI/p) - y1*sin(i*2.*M_PI/p);
        yy[i]=x1*sin(i*2.*M_PI/p) + y1*cos(i*2.*M_PI/p);
        xxx[i]=x2*cos(i*2.*M_PI/p) - y2*sin(i*2.*M_PI/p);
        yyy[i]=x2*sin(i*2.*M_PI/p) + y2*cos(i*2.*M_PI/p);
        linewidth(xorig+zoom*x[i],yorig-zoom*y[i], xorig+zoom*xx[i],yorig-zoom*yy[i],1,black);
        linewidth(xorig+zoom*xx[i],yorig-zoom*yy[i], xorig+zoom*xxx[i],yorig-zoom*yyy[i],1,black);
        linewidth(xorig+zoom*xxx[i],yorig-zoom*yyy[i], xorig+zoom*x[i],yorig-zoom*y[i],1,black);
      }
    }
    else /* rappel de la fonction triangle sur les quatre triangles intérieur au triangle */
    { mx0=0.5*(x1+x2); my0=0.5*(y1+y2); /* milieux qui sont des sommets de nouveaux triangles */
      mx1=0.5*(x2+x0); my1=0.5*(y2+y0);
      mx2=0.5*(x0+x1); my2=0.5*(y0+y1);
      triangle(x0,y0,mx2, my2,mx1,my1,n-1); /* quatre rappels avec l'indice de récursion qui diminue de 1 */
      triangle(mx2,my2,x1, y1,mx0,my0,n-1);
      triangle(mx1,my1,mx0, my0,x2,y2,n-1);
      triangle(mx0,my0,mx1, my1,mx2,my2,n-1);
    }
}

```

Le programme principal se réduit à l'appel de la fonction *triangle()*, pour un nombre de pas récursifs *nbpas* donné :

```

nbpas=3.;
triangle(cos(2.*M_PI/p),sin(2.*M_PI/p),0,0,1,0, nbpas);

```

Cela donne finalement un pavage non-périodique, mais néanmoins bien ordonné à cause des rotations centrales d'ordre p qui le laissent invariant (*figure 14 à gauche*). Lorsque le nombre p est pair, la figure est symétrique par rapport au diamètre horizontal. On peut alors décaler d'un cran le dessin situé au-dessous de ce diamètre, et l'on obtient un autre pavage non-périodique, avec une forme en spirale (*figure 14 à droite*).

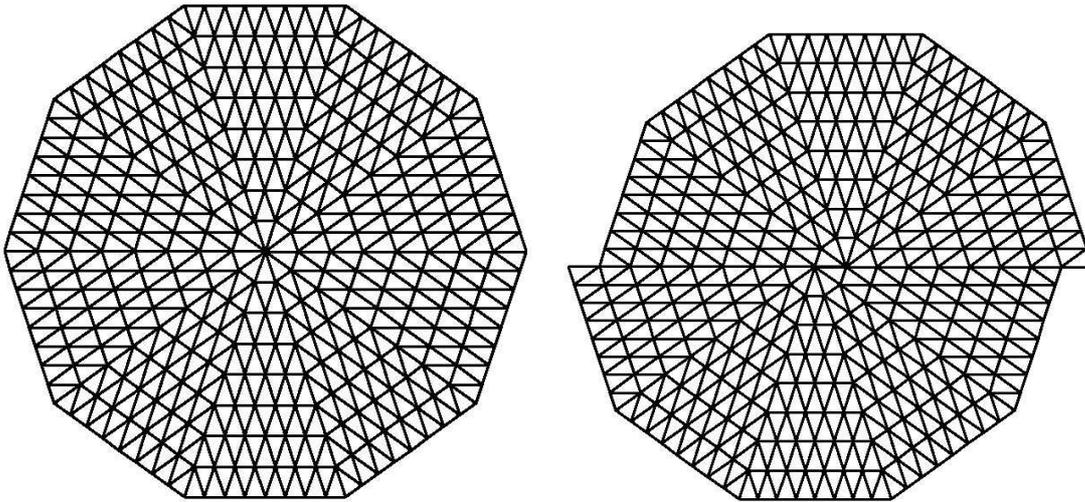


Figure 14 : A gauche, le pavage non périodique obtenu à partir d'un triangle isocèle d'angle $2\pi / 10$, mais avec une symétrie de rotation. A droite, une autre variante non périodique, en spirale.

2.2.3. Le pavage moulinet

Partons d'un triangle ABC rectangle en A avec $AB = 2 AC$. Traçons la hauteur $[AH]$, puis à partir du milieu I de $[AB]$, menons $[IJ]$ perpendiculaire à $[BC]$ et $[IK]$ perpendiculaire à $[AH]$. Le triangle ABC est ainsi découpé en cinq triangles qui sont non seulement semblables car ils ont les mêmes angles, ceux de ABC , mais aussi isométriques de façon directe ou indirecte selon les cas (figure 15). Remarquons que l'angle \hat{B} est tel que $\tan \hat{B} = 1/2$, ce qui entraîne que l'angle \hat{B} est un multiple irrationnel de 2π .³

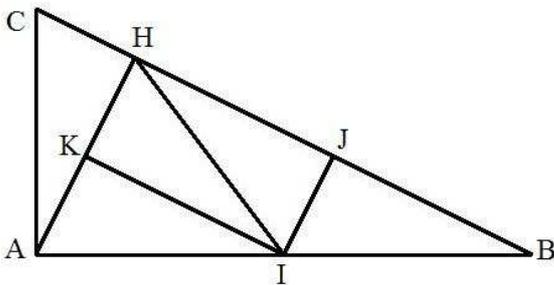


Figure 15 : Découpage du triangle ABC en cinq triangles isométriques, et semblables à ABC .

Le passage de ABC aux cinq triangles qu'il contient peut être reproduit pour chacun des cinq triangles, et cela autant de fois qu'on le désire. A partir d'un grand triangle ABC , on arrive à une multitude de petits triangles devenant infiniment petits (figure 16). Cela revient exactement à partir d'un petit triangle comme IHK et à lui accoler quatre triangles tout autour, puis à recommencer, ce qui tend à faire grossir la figure globale à l'infini. Autrement dit, le phénomène récursif de découpage du triangle ABC forme un pavage du plan par des triangles tous isométriques. Au fil des découpages, les triangles subissent une multitude de rotations avec des angles égaux à \hat{B} , ce qui interdit que des tours complets soient faits et que les côtés de certains triangles se retrouvent parallèles à d'autres. D'où le nom de pavage moulinet (*pinwheel* en anglais). Ce pavage n'a pas les caractéristiques d'un cristal avec son pavage périodique ni d'un quasi-cristal comme le pavage de Penrose. Cela se vérifie sur son diagramme de diffraction qui ne présente aucune symétrie de rotation (figure 17) à la différence des diagrammes de diffraction des cristaux et quasi-cristaux.⁴

³ Pour une preuve de cette irrationalité, on peut consulter [TAN2010].

⁴ Pour plus de détails et d'exemples, voir [AUD2013].

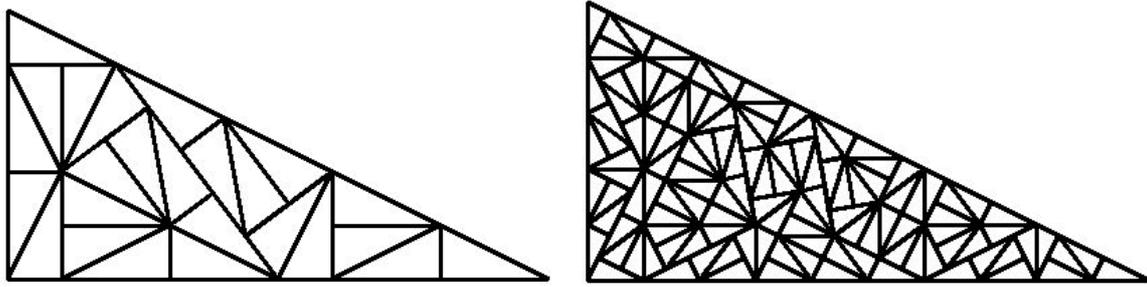


Figure 16 : Le pavage moulinet, par découpages successifs d'un triangles en cinq triangles.

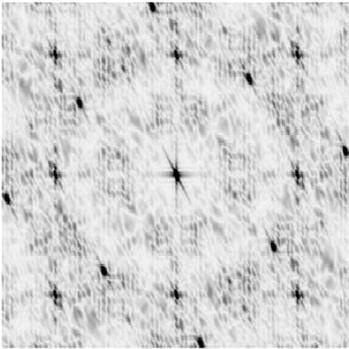


Figure 17 : Le diagramme de diffraction du pavage moulinet.

3. Pavage à partir d'un quadrilatère

On a vu qu'un parallélogramme, *a fortiori* un rectangle, losange ou carré, pave le plan. Mais un quadrilatère quelconque ? Lui aussi, qu'il soit convexe ou concave, va paver le plan.

Pour le vérifier, prenons un quadrilatère quelconque 0123 (*figure 18 à gauche*) et faisons-lui subir un demi-tour de centre K milieu du côté [1 2]. Sachant qu'un demi-tour (aussi appelé symétrie centrale) transforme un segment en un segment de même longueur et parallèle, les deux quadrilatères accolés forment un hexagone 014523 dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux et de même longueur, ce qui signifie aussi qu'il possède une symétrie centrale. Comme un tel hexagone pave le plan (*figure 8 au centre*), il en est de même pour le quadrilatère.

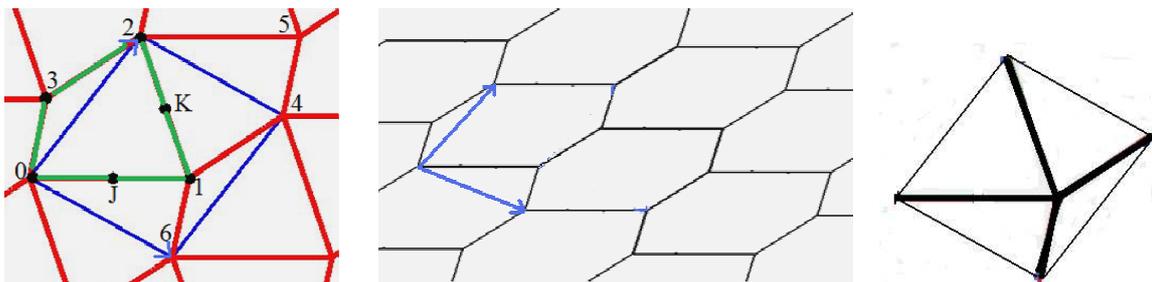


Figure 18 : A gauche, le quadrilatère 0123 en vert et son symétrique 1452 par rapport à K forment un hexagone 014523. Au centre, ce genre d'hexagone à symétrie centrale pave le plan. A droite, le parallélogramme générateur avec son motif permettant le pavage du plan par translations.

Le pavage obtenu est périodique, les deux translations ayant pour vecteurs 06 et 02 , qui sont aussi les diagonales du quadrilatère. Au lieu de reproduire l'hexagone avec ces translations, on peut aussi bien reproduire le parallélogramme 0642 avec la figure qu'il contient, à savoir les 4 traits issus du point 1 : 16, 14, 12, 10 (*figure 18 à droite*). Le pavage obtenu est donné sur la *figure 19*, et cela vaut aussi bien pour un quadrilatère convexe que pour un quadrilatère concave.

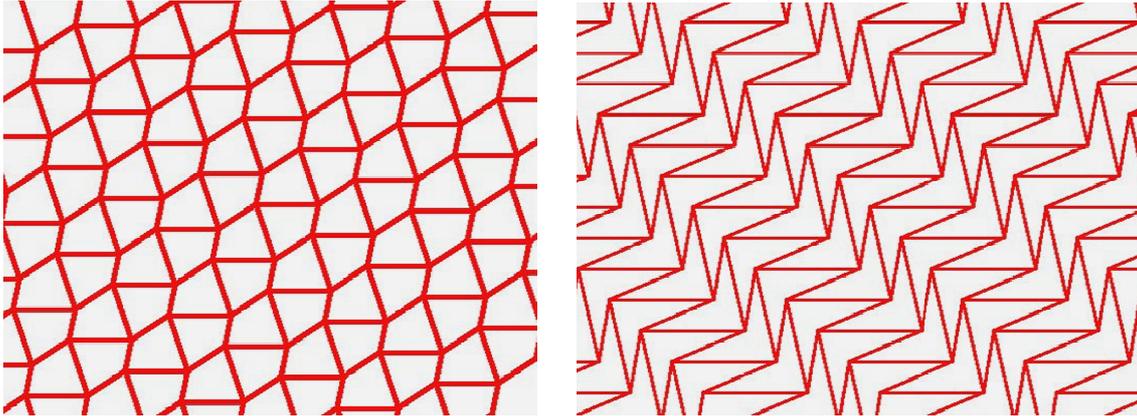


Figure 19 : Pavage à partir d'un quadrilatère, convexe ou concave.

Au stade où nous en sommes, il reste à étudier le cas des polygones ayant plus de quatre côtés. Nous allons d'abord voir qu'au delà de six côtés pour un polygone convexe, aucun pavage n'est possible. Par contre on peut toujours trouver des polygones concaves ayant un nombre n quelconque de côtés, susceptibles de paver le plan.

4. Pavages à partir d'un polygone ayant au moins sept côtés

Nous allons donner deux propriétés, l'une pour les polygones convexes, l'autre pour les polygones concaves.

4.1. Propriété 1 : Un polygone convexe ayant sept sommets ou plus ne peut pas paver le plan.⁵

Supposons que l'on ait un pavage à partir d'un polygone convexe à n sommets avec $n \geq 7$ et montrons que c'est impossible. Donnons au périmètre d'un tel polygone un périmètre égal à 1. Dans ces conditions la longueur du côté le plus long est $< 1/2$.⁶ Prenons maintenant un grand cercle de rayon R , et appelons $N(R)$ le nombre de polygones qui lui sont intérieurs ou qui sont traversés ou touchés par ce cercle. Puis prenons le cercle de même centre que le précédent et de rayon $R + 1$ (figure 20). Comme la longueur des côtés d'un polygone est $< 1/2$, il est sûr que les $N(R)$ polygones sont tous strictement intérieurs à ce cercle. Avec A qui est l'aire d'un polygone, on obtient l'encadrement des aires :

$$\pi R^2 \leq N(R) A < \pi (R + 1)^2$$

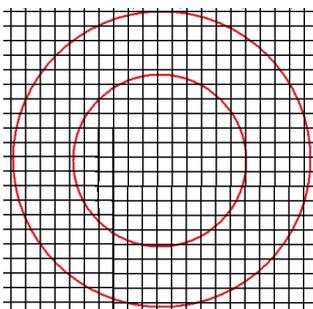


Figure 20 : Le contexte de la démonstration, où l'on a pris un pavage de carrés.

⁵ Cette propriété est démontrée dans [NIV1978], et elle est reprise dans [TAN2010].

⁶ Si cette longueur était $\geq 1/2$, les $n - 1$ autres côtés auraient la somme de leurs longueurs $\leq 1/2$, et le polygone serait au mieux aplati et sinon inexistant.

On sait que la somme des angles d'un polygone est $(n - 2) \pi$. La somme des angles des $N(R)$ polygones est $N(R) (n - 2) \pi$. Appelons S le nombre de sommets du pavage qui sont soit à l'intérieur du cercle de rayon R soit juste à l'extérieur pour les polygones traversés par le cercle de rayon R . La somme des angles faisant un tour complet autour des S sommets est $2 \pi S$. Comme les polygones entourent chaque sommet du pavage en faisant un tour complet autour de lui, $2 \pi S$ est aussi la somme des angles des $N(R)$ polygones augmentée des angles des polygones qui bordent les $N(R)$ polygones à l'extérieur, sans faire partie des $N(R)$ polygones, soit :

$$N(R) (n - 2) \pi \leq 2 \pi S \text{ ou } S \geq \frac{(n - 2) N(R)}{2}$$

Enfin, puisque le polygone est convexe, chacun des S sommets du pavage est le sommet d'au moins 3 sommets de polygones⁷, ce qui fait $3 S$, ou $4 S$, etc. sommets de polygones. Quelques-uns de ces polygones débordent en dehors des $N(R)$ polygones, mais ils sont tous parmi les $N(R + 1)$ polygones intérieurs ou traversés par le cercle de rayon $R + 1$, qui comptent $n N(R + 1)$ sommets. Ainsi :

$$3 S < n N(R + 1) \text{ ou } S \leq \frac{n N(R + 1)}{3}$$

Les deux inégalités précédentes conduisent à l'encadrement : $\frac{(n - 2) N(R)}{2} \leq S \leq \frac{n N(R + 1)}{3}$,

d'où : $\frac{(n - 2) N(R)}{2} \leq \frac{n N(R + 1)}{3}$. En multipliant par A et en appliquant la première inégalité sur les

aires : $\frac{(n - 2) N(R) A}{2} \leq \frac{n N(R + 1) A}{3}$ avec $\pi R^2 \leq N(R) A$ et $N(R + 1) A < \pi (R + 2)^2$

$$\frac{n - 2}{2} \pi R^2 \leq \frac{(n - 2) N(R) A}{2} \leq \frac{n N(R + 1) A}{3} < \frac{n}{3} \pi (R + 2)^2 \text{ et l'on en déduit :}$$

$$\frac{n - 2}{2} R^2 < \frac{n}{3} (R + 2)^2$$

$$\left(\frac{R}{R + 2}\right)^2 < \frac{2n}{3(n - 2)}$$

Lorsque $n \geq 7$, la fonction $f(n) = 2n / (3(n - 2))$ est décroissante, et l'on a $f(n) < f(7)$, soit $f(n) < 14 / 15$. Finalement pour $n \geq 7$,⁸

$$\left(\frac{R}{R + 2}\right)^2 < \frac{14}{15}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre R vers l'infini, puisque le pavage est censé être infini, et $(R / (R + 2))^2$ tend vers 1, donc finira toujours par dépasser $14 / 15$. On tombe sur une contradiction. Aucun pavage n'est possible avec un polygone convexe ayant au moins 7 sommets.

4.2. Propriété 2 : On peut toujours trouver une forme polygonale concave à n sommets qui pave le plan.

⁷ On a vu qu'en chaque sommet d'un pavage, il y a au moins trois polygones convexes accolés.

⁸ Par contre, si l'on fait $n = 6$ ou $n = 5$, on tombe sur $f(n) \geq 1$, et il n'y a plus de contradiction.

Il est aisé de trouver des formes polygonales concaves pavant le plan de façon périodique, voire non périodique. On trouve par exemple dans [TAN2010] un découpage d'un carré en deux polygones à nombre impair de côtés (*figure 21*), ce qui permet un pavage périodique, ou non périodique en jouant au hasard sur les rotations de 90° du carré.⁹

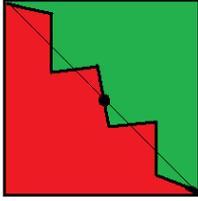


Figure 21 : Un carré découpé en deux polygones symétriques par rapport au milieu de la diagonale.

Une autre façon consiste à partir d'un polygone régulier à n côtés ($n > 4$) puis à retourner un groupe de côtés successifs en le rendant concave (*figure 22*). On distingue deux cas selon que n est pair ou impair. Dans tous les cas, l'angle entre deux côtés successifs du polygone régulier vaut $\alpha = \pi - 2\pi/n$.

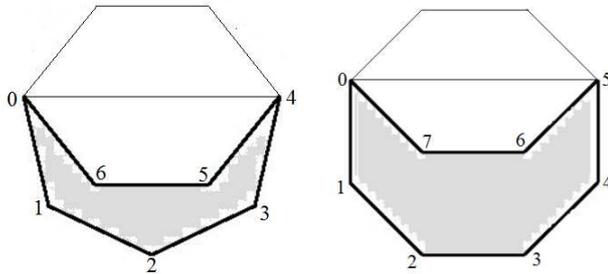


Figure 22 : Polygone régulier rendu concave pour $n = 7$ à gauche et $n = 8$ à droite.

a) n impair

Le polygone régulier est coupé par le segment allant du point 0 au point $[n/2] + 1$ (*figure 23*), et sa partie supérieure est retroumée par réflexion autour de ce segment.

- Lorsque n ramené modulo 4 vaut 3, comme pour $n = 11$, le côté le plus haut du polygone est horizontal. En partant de là, pour arriver au point 0, on tourne chaque fois d'un angle $\pi - \alpha = 2\pi/n$, et pour arriver au sommet 0, on fait cela $[n/4]$ fois. On en déduit que l'angle β vaut $[n/4] 2\pi/n$ (*voir figure 23*). Le côté 01 fait un angle de $\beta - \alpha$ avec l'horizontale. Et quand on avance de sommet en sommet jusqu'au sommet $n/2 + 1$, on tourne chaque fois de l'angle $2\pi/n$, ce qui permet de tracer cette portion du polygone. Ensuite, on constate que le dernier côté du polygone concave, 0 $(n-1)$, fait l'angle $-\beta$ avec l'horizontale. On part de là en marche arrière pour atteindre le sommet $[n/2 + 1]$, en tournant chaque fois de $2\pi/n$.

- Lorsque n ramené modulo 4 vaut 1, comme pour $n = 9$, le côté haut du polygone, formant le côté droit de la pointe, fait un angle $-\gamma = -\pi/n$ avec l'horizontale. On en déduit que l'angle β vaut $[n/4] 2\pi/n - \gamma$. Puis on fait comme précédemment. D'où le programme de construction du polygone concave.

⁹ Si l'on veut un polygone à nombre pair de côtés, il suffit de joindre les milieux de deux côtés opposés du carré par un ligne brisée présentant une symétrie centrale.

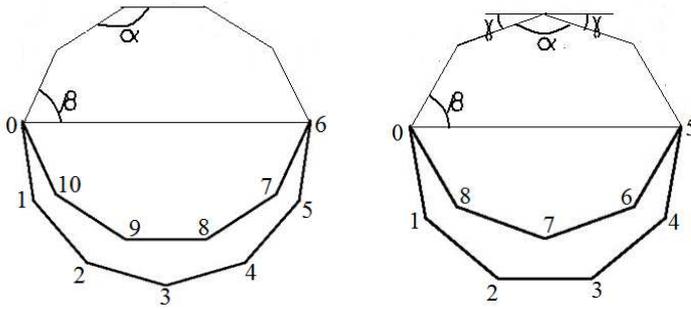


Figure 23 : Polygones pour $n = 11$ et pour $n = 9$.

```

alpha=(N-2)*M_PI/(float)N;
gamma= M_PI/(float)N ;
if (N%4==3) beta=(N/4)*2.*M_PI/(float)N;
else if (N%4==1) beta=(N/4)*2.*M_PI/(float)N-gamma;

x[0]=0.;y[0]=0.;
for(i=1;i<=N/2+1;i++) /* points de 0 à [N/2]+1 */
{ x[i]=x[i-1]+cos(beta-alpha+2.*(i-1)*M_PI/(float)N); /* les côtés sont pour longueur 1 */
  y[i]=y[i-1]+sin(beta-alpha+2.*(i-1)*M_PI/(float)N);
}
j=0;
for(i=N-1;i>N/2+1;i--) /* points de N-1 à [N/2]+1 */
{ x[i]=x[(i+1)%N]+cos(-beta+2.*j*M_PI/(float)N);
  y[i]=y[(i+1)%N]+sin(-beta+2.*j*M_PI/(float)N);
  j++;
}

```

On constate que l'angle en 0 du polygone concave est dans tous les cas $\gamma = \pi / n$. Ce premier polygone étant construit, on lui accole alors un deuxième polygone par rotation de centre 0 et d'angle γ . D'où ce morceau de programme :

```

for(i=0;i<N;i++) /* points du deuxième polygone concave, numérotés de N à 2N-1 */
{ x[i+N]=x[i]*cos(gamma)-y[i]*sin(gamma);
  y[i+N]=x[i]*sin(gamma)+y[i]*cos(gamma);
}

```

Ces deux polygones forment à leur tour un polygone ayant des côtés opposés parallèles deux à deux, ce qui permet un pavage du plan, les vecteurs des translations étant $\mathbf{10}$ et $\mathbf{1(n/2 + 1)}$ (figure 24).

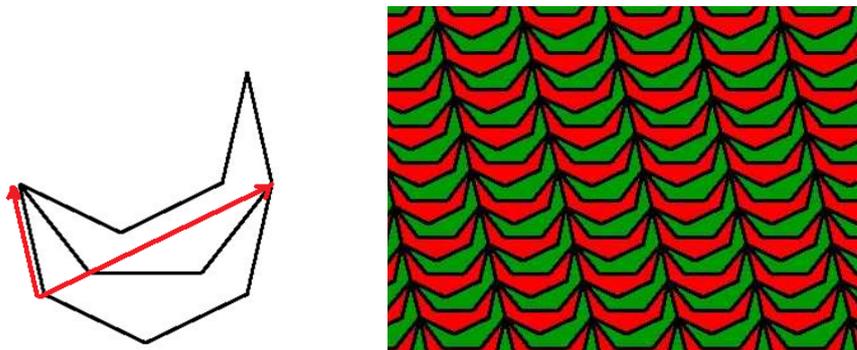


Figure 24 : A gauche, les deux polygones concaves accolés, avec les vecteurs de translation en rouge. A droite, le pavage obtenu pour $n = 7$.

b) n pair

Ici encore, le polygone régulier de sommets $0 \ 1 \ \dots \ (n - 1)$ est coupé suivant la droite $(0 \ (n / 2 + 1))$ (figure 25). On passe d'un côté au suivant en tournant de $\beta = 2 \pi / n$, et le côté 01 est vertical, dirigé

vers le bas. D'autre part, le dernier côté 0 ($n - 1$) est parallèle au côté 12. On en déduit le programme de construction du polygone.

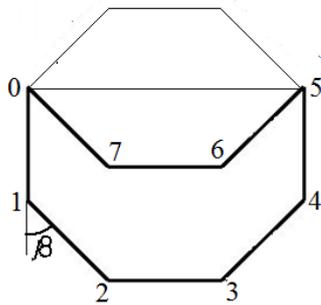


Figure 25 : Le polygone concave pour $n = 8$.

```
x[0]=0.;y[0]=0.;
for(i=1;i<=N/2+1;i++)
{ x[i]=x[i-1]+cos(-M_PI/2.+(i-1)*beta);
  y[i]=y[i-1]+sin(-M_PI/2.+(i-1)*beta);
}
j=0;
for(i=N-1;i>N/2+1;i--)
{ x[i]=x[(i+1)%N]+cos(-M_PI/2+beta+j*beta);
  y[i]=y[(i+1)%N]+sin(-M_PI/2+beta+j*beta);
  j++;
}
```

Les côtés opposés du polygone concave sont parallèles, ce qui permet un pavage en utilisant les translations de vecteurs 01 et 0 ($n / 2$). On peut aussi faire comme dans le cas n impair en accolant deux polygones (figure 26).

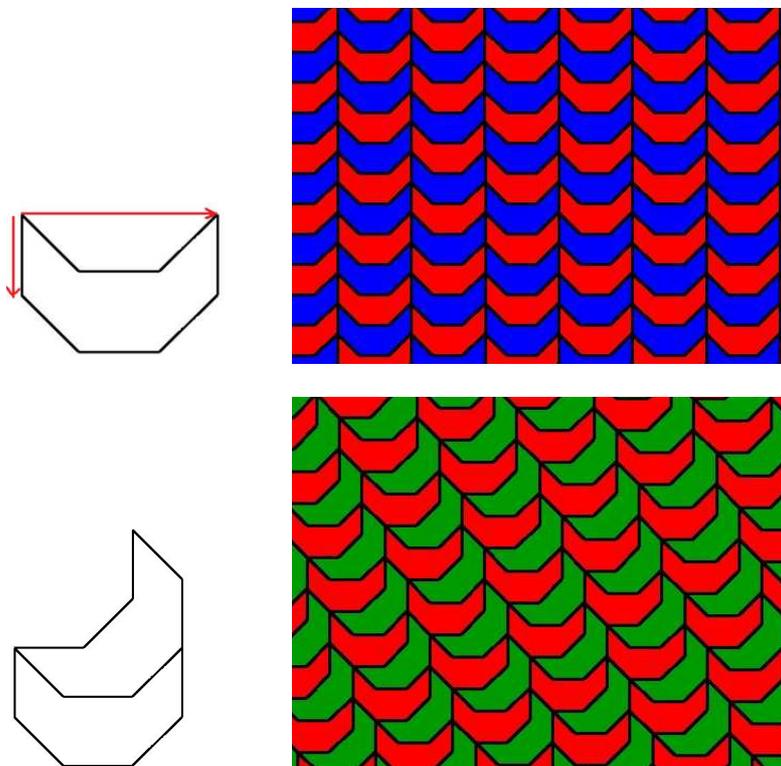


Figure 26 : Deux pavages possibles avec un polygone concave à nombre pair de côtés, ici $n = 8$.

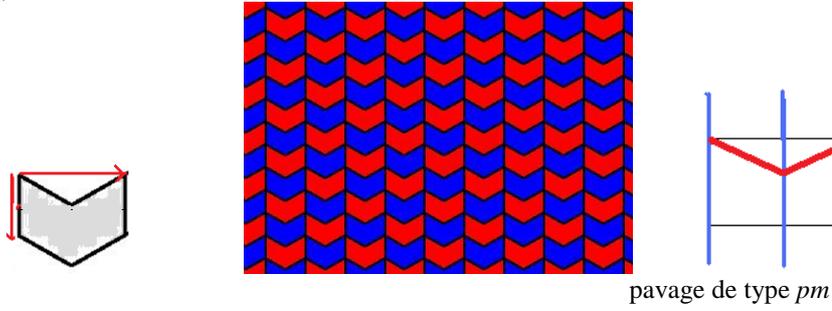
Exercice : Hexagones en forme de chevrons

Prendre le polygone concave pour $n = 6$, en forme de chevron, selon la méthode indiquée ci-dessus.

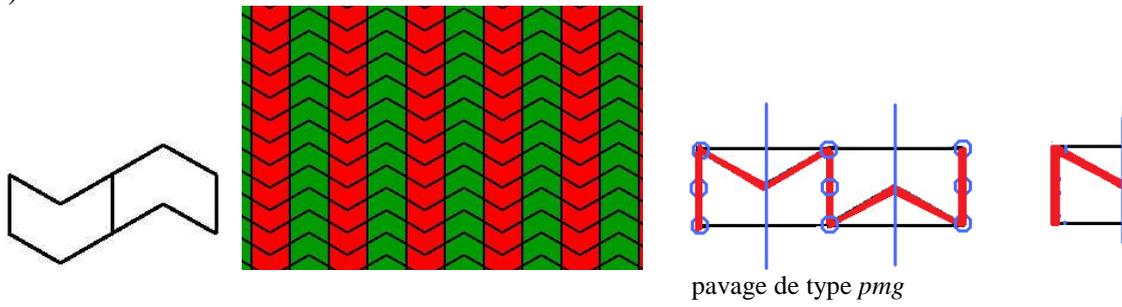
1) Trouver plusieurs façons de paver le plan avec ce polygone.

Nous donnons-ci dessous plusieurs pavages possibles (figure 27).

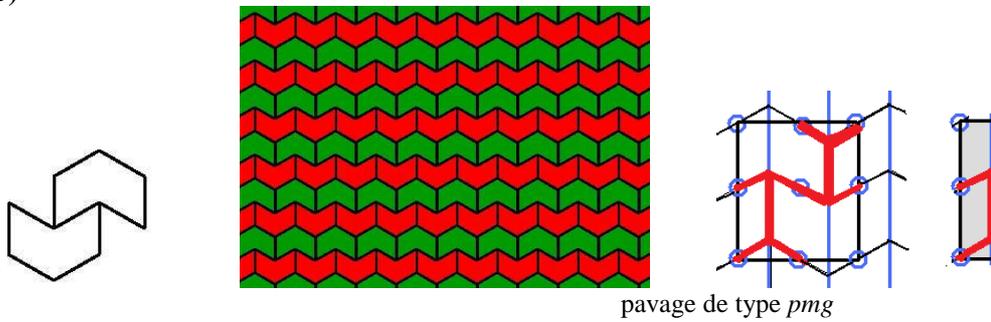
1)



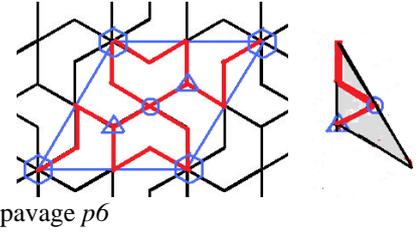
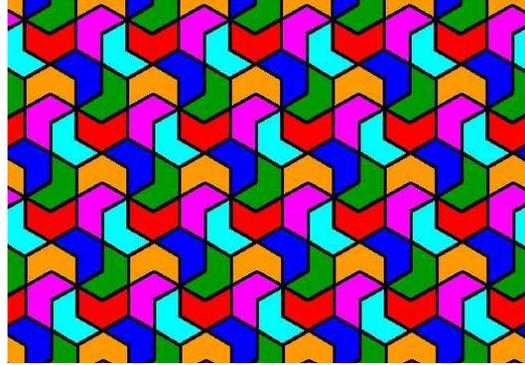
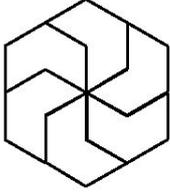
2)



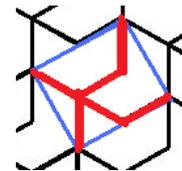
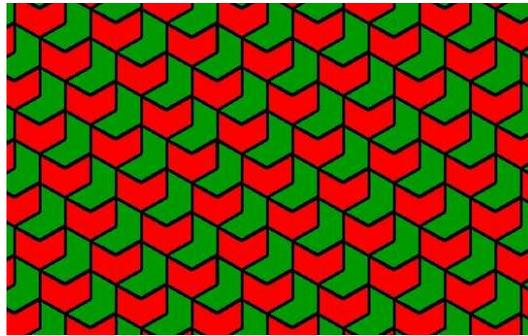
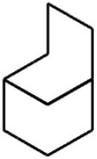
3)



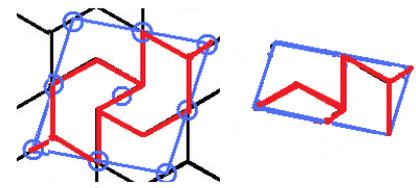
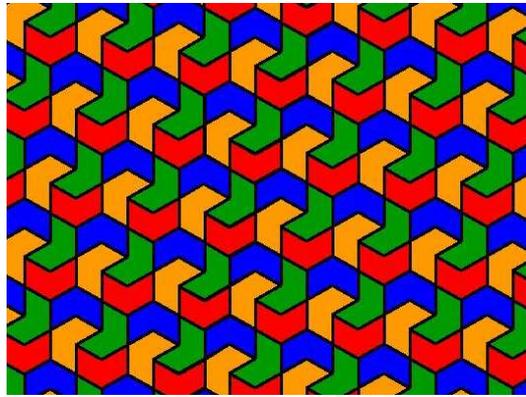
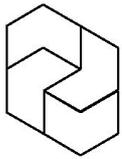
4)

pavage $p6$

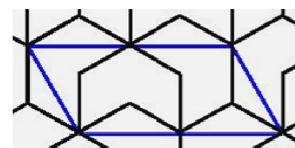
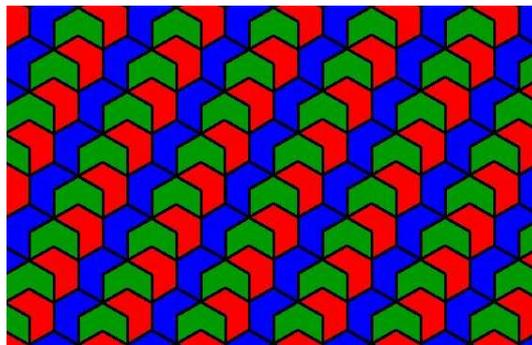
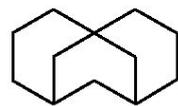
5)

pavage $p1$

6)

pavage $p2$

7)

pavage $p1$

8)

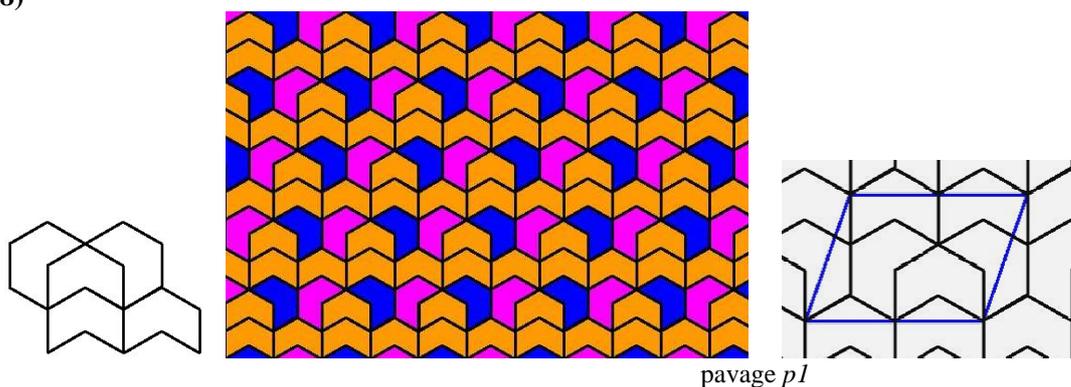


Figure 27 : Plusieurs types de pavages périodiques, avec à gauche le motif initial, au centre le pavage, à droite le parallélogramme générateur, et la cellule primitive en cas de symétries autres que les translations.

2) On dit qu'un pavage est isoédrique lorsqu'on peut passer de n'importe quel pavé à n'importe quel autre par une symétrie du pavage (« symétrie » signifiant transformation laissant invariant le pavage). Si tel n'est pas le cas, on dit par exemple qu'un pavage est 2-isoédrique s'il existe deux classes de pavés : dans chaque classe, on peut passer d'un pavé à un autre par une symétrie du pavage, mais on ne peut pas passer d'un pavé d'une classe à un pavé de l'autre classe par aucune symétrie. Cela se généralise à un pavage n -isoédrique. En reprenant les exemples trouvés au 1°, donner leurs caractéristiques en matière d'isoédrie.

Pavages 1, 2, 3, 4 : isoédriques

Pavage 5 et 6 : 2-isoédriques

Pavage 7 : 3-isoédrique

Pavage 8 : 5-isoédrique

5. Pavage à partir d'un pentagone convexe

On a vu qu'un pentagone régulier ne peut pas paver le plan. Il reste à trouver d'autres formes de pentagones convexes qui, elles, peuvent paver le plan. Ce problème a fait l'objet de nombreuses études, de K. Reinhardt en 1918 qui a trouvé cinq types de pentagones convexes, à M. Rao qui a montré en 2017 qu'il n'en existe pas d'autres que les 15 découverts jusque-là.¹⁰ (figure 28). Parmi eux, seuls huit peuvent avoir leurs arêtes bord à bord.¹¹

En fait, l'histoire débute en Egypte avec le pavage dit du Caire, même si ce type de pavage n'a été redécouvert que très récemment. C'est par là que nous allons commencer, avant de généraliser ce pavage à trois types de pavages (de types 2, 4, 5) découverts depuis.

¹⁰ Cette histoire assez rocambolesque, faites de découvertes et d'erreurs, est largement racontée sur Internet, notamment dans l'article *Pentagonal Tilings* en anglais sur *Wikipedia*, ou dans le remarquable blog de ELJdx, *j'ai toujours rêvé d'être pentocarreur*.

¹¹ Cela a été démontré par O. Bagina (2011) et T.O. Sugimoto (2012).

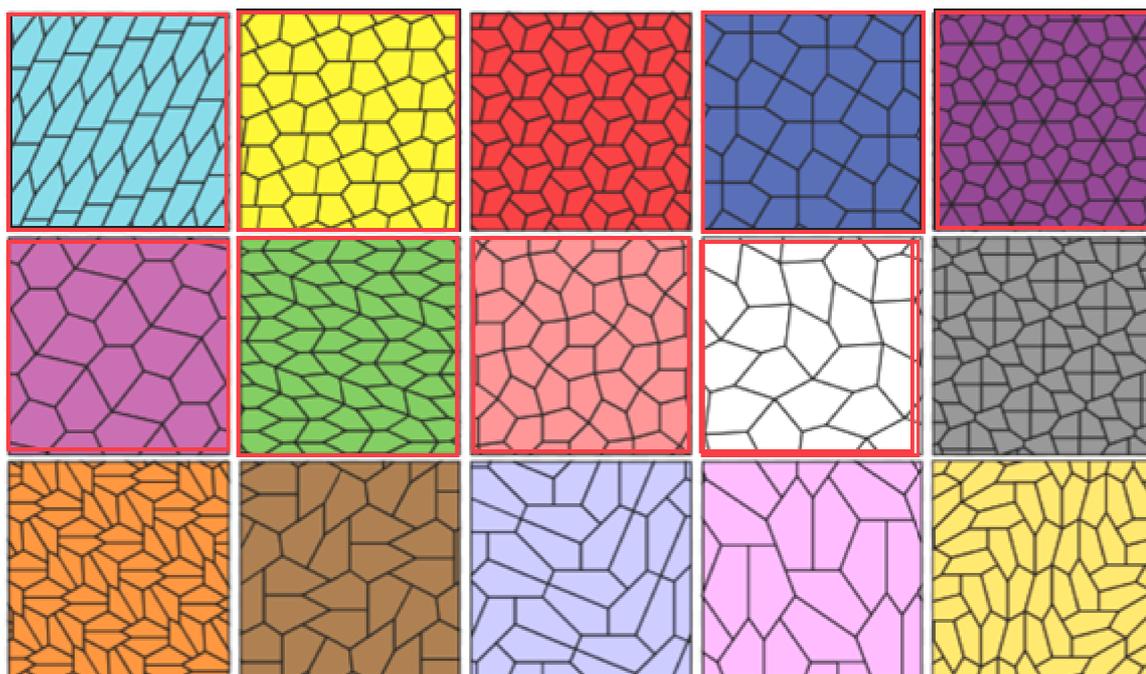


Figure 28 : Les 15 pavages pentagonaux convexes possibles. Ils sont numérotés de 1 à 15 de gauche à droite et de haut en bas. Parmi eux, seuls les pavages 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 peuvent avoir leurs arêtes bord à bord.

6.1. Le pavage du Caire

On ne sait pas trop depuis quand quelques rues du Caire ont été agrémentées de pavés pentagonaux, mais il s'agit vraisemblablement d'une connaissance ancienne, même si ces pavages sont relativement récents, et redécouverts très récemment. C'est la raison pour laquelle on parle aujourd'hui de pavage du Caire (*figure 29 à gauche*). Le type de pentagone choisi a quatre côtés égaux et deux angles droits, plus précisément

$$AB = BC = CD = DE, \text{ et } \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ.$$

Il possède donc un axe de symétrie passant par C et le milieu I de $[EA]$ (*figure 29 à droite*). Pour le construire, donnons une longueur unité aux quatre côtés égaux, et choisissons un angle $\alpha = \hat{B}$, qui doit être compris entre 90° et 180° . Cet angle α étant donné, la longueur du cinquième côté EA est alors déterminée, ainsi que l'angle β en E et A .

$$\beta = \pi - \alpha / 2, \text{ en utilisant le fait que la somme des angles du pentagone vaut } 3\pi.$$

D'autre part, dans le triangle CEA avec $CE^2 = CA^2 = 2$ et son angle $\hat{C} = \alpha - \pi / 2$, on obtient $EA^2 = 4 - 4 \sin \alpha$ grâce à la formule d'Al Kashi, d'où $EA = 2\sqrt{1 - \sin \alpha}$.¹²

¹² Le pentagone est équilatéral lorsque $EA = 1$, ce qui donne $\sin \alpha = 3 / 4$, soit (avec α obtus) $\alpha \approx 131,4^\circ$.

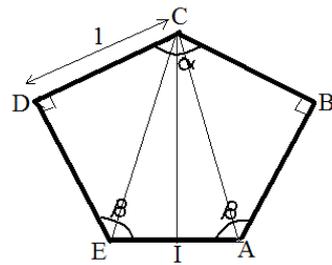


Figure 29 : A gauche, pavage dans une rue du Caire.¹³ A droite, le pentagone de base.

En prenant un repère orthonormé d'origine E avec un axe des x horizontal, on en déduit les coordonnées des sommets qui sont des fonctions du seul paramètre α :

$$\begin{aligned} E & (0, 0), A (2\sqrt{1-\sin\alpha}, 0) \\ B & (x_A - \cos\beta, \sin\beta) \\ C & (\sqrt{1-\sin\alpha}, \sqrt{1+\sin\alpha}) \\ D & (\cos\beta, \sin\beta) \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que ce pentagone permet un pavage du plan. Pour cela, à partir du pentagone précédent, faisons trois rotations successives d'angle 90° autour du point D . On trouve ainsi quatre pentagones collés les uns aux autres. Pour les besoins du programme de tracé du pavage, nous avons numérotés tous les points de 0 à 19, à partir des 5 points $EABCD$ numérotés 0 1 2 3 4 (figure 30 à gauche). On constate que les segments 12-2 et 17-7 sont perpendiculaires (l'un horizontal, l'autre vertical) et qu'ils ont même demi-longueur. La figure 17-2-7-12 est un carré, et les morceaux qui dépassent d'un bord sont compensés par les morceaux du bord opposé qui lui est parallèle. Le pavage est donc assuré, et les vecteurs des deux translations vont de 17 à 2 et de 2 à 7. Sur la figure 30 à droite, on peut voir le carré centré au point D , le centre des rotations.

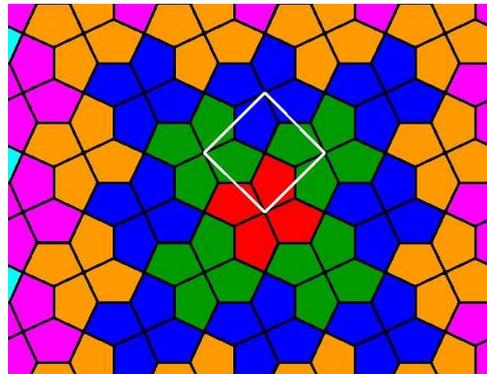
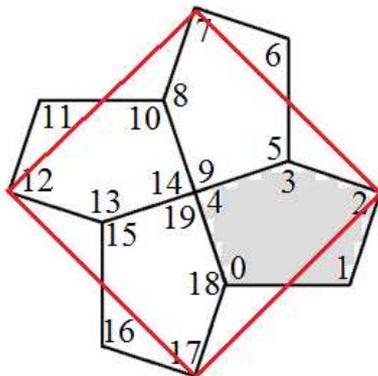


Figure 30 : A gauche, rosace à quatre branches pentagonales, avec en rouge le carré générateur. A droite, sa reproduction par translations donne le pavage (le carré générateur est en blanc).

On obtient ainsi le pavage de la figure 31, grâce au programme suivant :

```

/***** Pentagone initial EABCD, ces points étant numérotés 0 1 2 3 4 *****/
alpha=143.*M_PI/180.;
beta=M_PI-alpha/2.;
x[0]=0.; y[0]=0.;
x[1]=2.*sqrt(1.-sin(alpha)); y[1]=0.;
x[2]=x[1]-cos(beta); y[2]=y[1]+sin(beta);
x[3]=sqrt(1.-sin(alpha)); y[3]=sqrt(1+sin(alpha));
x[4]=cos(beta); y[4]=sin(beta);

```

¹³ Cette photo a été prise par H. Donnelly vers 2010. Il s'agit de la principale référence dans ce domaine.

```

for(i=0;i<5;i++)
  { xe[i]=xorig+zoom*x[i]; ye[i] = yorig-zoom*y[i];
  }
for(i=0;i<5;i++) linewidthwidth(xe[i],ye[i], xe[(i+1)%5],ye[(i+1)%5],1,black);
SDL_Flip(screen); pause();

/***** Bloc des quatre pentagones obtenus par rotations *****/
for(j=1;j<=3;j++) for(i=0;i<5;i++)
  { x[i+5*j]= (x[i]-x[4])*cos((float)j*M_PI/2.)-(y[i]-y[4])*sin((float)j*M_PI/2.)+x[4];
  y[i+5*j]= (x[i]-x[4])*sin((float)j*M_PI/2.)+(y[i]-y[4])*cos((float)j*M_PI/2.)+y[4];
  xe[i+5*j]=xorig+zoom*x[i+5*j];
  ye[i+5*j] = yorig-zoom*y[i+5*j];
  }
for(j=0;j<4;j++) for(i=0;i<5;i++)
  linewidthwidth(xe[i+5*j],ye[i+5*j], xe[(i+1)%5+5*j],ye[(i+1)%5+5*j],1,black);
SDL_Flip(screen); pause();SDL_FillRect(screen,0,white);

/***** Pavage par reproduction du bloc des quatre pentagones *****/
zoom=40.;
xV1=x[7]-x[2]; yV1=y[7]-y[2]; /* les deux vecteurs de translations */
xV2=x[2]-x[17]; yV2=y[2]-y[17];
for(k=-10;k<10;k++) for(kk=-10;kk<10;kk++)
  { for(i=0;i<20;i++)
    { xe[i]=xorig+zoom*(x[i]+k*xV1+kk*xV2);
    ye[i] = yorig-zoom*(y[i]+k*yV1+kk*yV2);
    }
  for(j=0;j<4;j++) for(i=0;i<5;i++)
    if (xe[i+5*j]>0 && xe[i+5*j]<800 && ye[i+5*j]>0 && ye[i+5*j]<600 /* pour rester dans les limites d'écran */
    && xe[(i+1)%5+5*j]>0 && xe[(i+1)%5+5*j]<800
    && ye[(i+1)%5+5*j]>0 && ye[(i+1)%5+5*j]<600 )
      linewidthwidth(xe[i+5*j],ye[i+5*j], xe[(i+1)%5+5*j],ye[(i+1)%5+5*j],1,black);
  }
  SDL_Flip(screen); pause();

/***** Coloriage des pavés avec quatre couleurs c[] *****/
for(i=0;i<4;i++)
  { xI[i]=0.5*(x[5*i]+x[5*i+3]);yI[i]=0.5*(y[5*i]+y[5*i+3]);
  for(k=-20;k<21;k++) for(kk=-20;kk<21;kk++)
    { xei=xorig+zoom*(xI[i]+k*xV1+kk*xV2); /* points I à l'intérieur de chaque pavé */
    yei=yorig -zoom*(yI[i]+k*yV1+kk*yV2);
    if (xei>10 && yei>10 && xei<790 && yei<590)
      floodfill(xei,yei,c[i],black);
    }
  }
}
SDL_Flip(screen); pause();

```

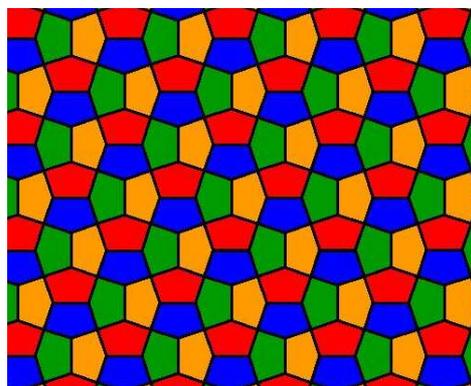
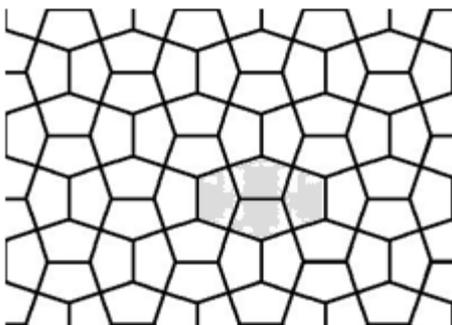


Figure 31 : Le pavage du Caire. *A gauche* on a fait ressortir l'hexagone à côtés opposés parallèles qui pave le plan tout en contenant quatre pentagones. *A droite*, les pavés sont coloriés de quatre couleurs suivant leur orientation. On a pris un angle α de l'ordre de 140-145°.

Le dessin obtenu permet aussi de constater que les pentagones sont englobés par groupes de quatre, dans un hexagone à côtés opposés parallèles deux à deux, ce qui donnerait un autre moyen de construction, un peu plus complexe. Mais il y a mieux.

Reprenons le carré de la *figure 30*, dont la reproduction produit le pavage du plan. Avec un sommet en D , il est colorié en bleu sur la *figure 32*. Translatons-le de façon qu'il ait un sommet en E (*en rouge sur la figure 32*). Sa reproduction donnerait aussi le même pavage. A partir de là construisons le pavé de côtés $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$, \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 étant les vecteurs des translations précédentes. On obtient encore un carré avec un sommet en E , plus grand que le précédent, mais avec des côtés horizontaux et verticaux. Translatons-le horizontalement pour qu'il ait un sommet en I . Il est *en vert* sur la *figure 32*. A partir de lui, sa reproduction donne encore le pavage du plan. Et c'est justement la méthode des paveurs du Caire, qui ont utilisé ce genre de carreau possédant des symétries d'axe vertical et horizontal.

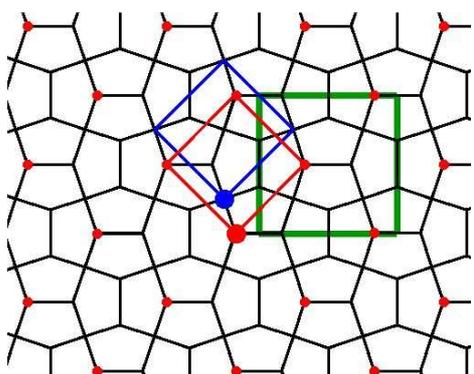


Figure 32 : Le carré générateur en bleu, ou en rouge. Puis le carré du Caire en vert.

A son tour, ce carré peut être divisé en quatre carrés. En partant d'un de ces petits carrés, et en effectuant les symétries d'axe vertical et d'axe horizontal, on retrouve le grand carré. Et un petit carré est particulièrement facile à construire. Appelons-le $ABCD$, avec son centre noté O , et une longueur unité pour ses côtés (*figure 33*). Puis prenons un point E sur $[AB]$, avec x compris entre 0 et 0,5. Par rotations de 90° autour de O , on trouve les points F , G et H avec $BF = CG = DH = x$, et $[EG]$ perpendiculaire à $[FH]$ et de même longueur. Le paramètre x est lié au paramètre α de notre construction initiale. On a en effet $\tan(\alpha/2) = 0,5 / (0,5 - x)$, soit

$$x = \frac{\tan(\alpha/2) - 1}{2 \tan(\alpha/2)}, \text{ et } 2x \text{ est la longueur du côté horizontal du pentagone.}$$

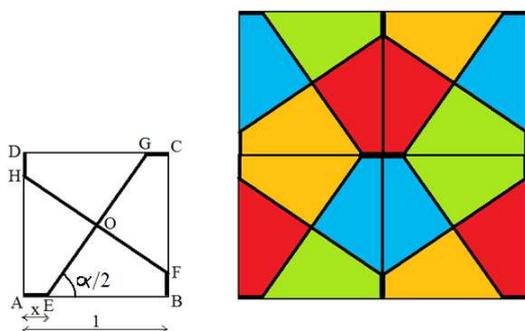


Figure 33 : A gauche le petit carré avec son paramètre x , donnant par symétries axiales le grand carré des paveurs du Caire à droite.

Finalement, en faisant varier x entre ses valeurs extrêmes, de 0 à 0,5, ou α de 90° à 180° , on trouve ce genre de pavages illustré sur la *figure 34*.

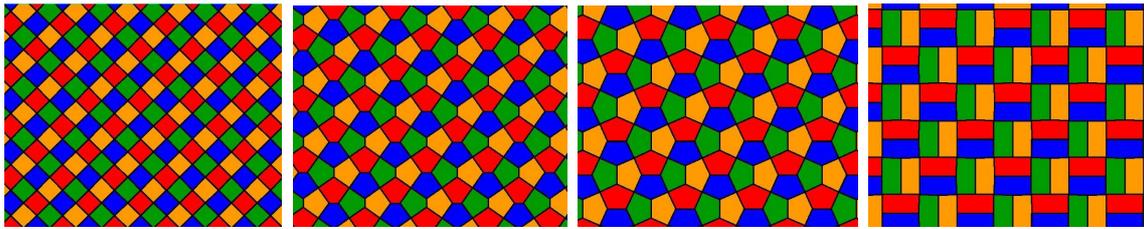


Figure 34 : De gauche à droite, évolution du pavage du Caire pour $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 110^\circ$, $\alpha = 131^\circ$, et $\alpha = 180^\circ$.

Sur un plan plus théorique, reprenons le carré générateur du pavage de la *figure 30*, défini par les vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 des translations. Son centre est aussi le centre des rotations de quarts de tour. Nous savons que le pavage présente aussi des symétries axiales, à cause des hexagones à côtés parallèles de la *figure 31*. Leur axe dans le carré est porté par une diagonale. Le groupe des transformations est engendré par une rotation, une réflexion et les deux translations. Le pavage est dit de type $p4g$. Pour sa construction, la cellule de base minimale est un triangle en forme de demi-carré (*figure 35*) avec un motif réduit à deux traits. Puis on pratique la réflexion, ce qui donne un carré. Enfin, on fait les trois quarts de tour de façon à remplir le carré générateur, celui qui par translations va produire le pavage. La combinaison de la rotation centrale et des translations donne de nouveaux centres de quarts de tour, et la combinaison des quarts de tour donne des demi-tours. Ces symétries sont indiquées sur la *figure 35 en bas*.

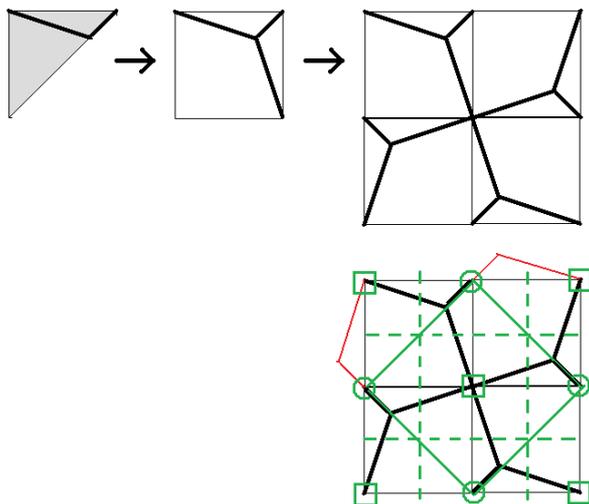


Figure 35 : Construction du pavage à partir de la cellule génératrice minimale. En bas, les symétries laissant le pavage invariant, du type $p4g$. Les carrés indiquent les quarts de tour, les ronds les demi-tours, et les traits en pointillés les symétries glissées (réflexions d'axes les traits en pointillés suivies d'une translation de vecteur moitié dans la même direction).

6.2. Première généralisation : la classe 4 des pavages pentagonaux

Un pavé du Caire avait comme caractéristique de présenter une symétrie d'axe vertical, avec un triangle isocèle central auquel venaient s'accoler deux triangles rectangles isocèles. Une généralisation consiste maintenant à partir d'un triangle quelconque ABD auquel on accole deux triangles rectangles isocèles BCD et ADE (*figure 36*).

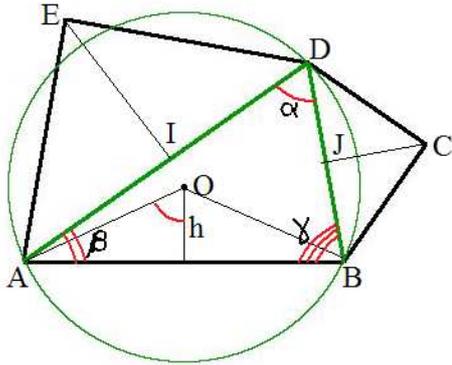


Figure 36 : Construction du pentagone.

En se donnant les points $A(0, 0)$ et $B(1, 0)$, le pavé dépend de deux paramètres, les angles α et γ de la figure 36. Grâce au théorème de l'angle inscrit, celui-ci étant égal à la moitié de l'angle au centre, le point D est sur le cercle de centre $O(1/2, h = 1/(2 \tan \alpha))$. Avec l'angle γ donné, on trouve un seul point D , et il est tel que $AD = \sin \gamma / \sin \alpha$, d'où $D(AD \cos \beta, AD \sin \beta)$ avec $\beta = \pi - \alpha - \gamma$.

A partir du vecteur $\mathbf{OI}(x_D/2, y_D/2)$ on trouve le point $E(0,5(x_D - y_D), 0,5(y_D + x_D))$. On fait de même à partir du milieu J de $[BD]$. Avec $BD = \sin \beta / \sin \alpha$ et $\mathbf{BJ}(-0,5 BD \cos \gamma, 0,5 BD \sin \gamma)$

$J(x_B - 0,5 BD \cos \gamma, y_B + 0,5 BD \sin \gamma)$, d'où
 $C(x_J + 0,5 BD \sin \gamma, y_J + 0,5 BD \cos \gamma)$

Par rotations de 90° , on obtient comme auparavant une rosace de quatre pentagones, qui permet de paver le plan (figure 37).

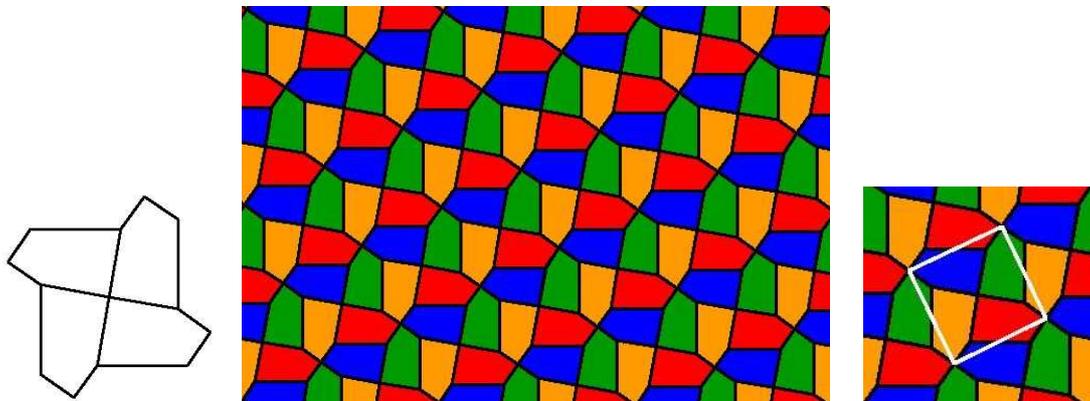


Figure 37 : A gauche, la rosace des quatre pentagones, au centre le pavage obtenu, à droite le carré générateur.

On vient d'obtenir la classe 4 des pavages pentagonaux, définie par les contraintes :

$$\hat{C} = \hat{E} = 90^\circ, CB = CD, ED = EA$$

On peut en voir quelques-uns sur la figure 38, variant en fonction de l'angle α . Si le pavage du Caire était du type $p4g$, dans le cas général, il perd ses symétries axiales, et il est du type $p4$, avec les symétries du groupe de transformations engendré par un quart de tour et deux translations.

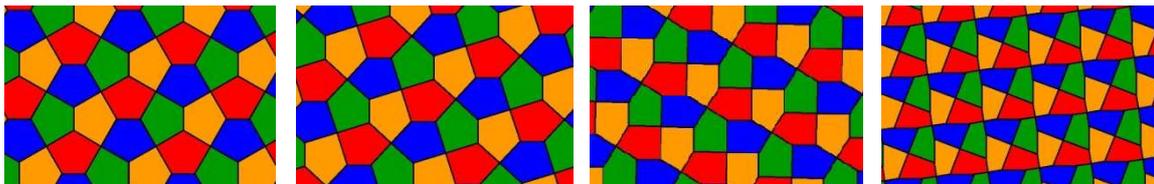


Figure 38 : Evolution du pavage pentagonal de classe 4 avec $\alpha = 30^\circ$ et γ variant de 75° (pavage du Caire) à 130° , proche du moment où le pavé va perdre sa convexité.

6.3. Deuxième généralisation : la classe 2 des pavages pentagonaux

Nous partons encore d'un triangle ABD quelconque, en lui accolant deux triangles BCD et DEA tels que la somme des angles $\hat{C} + \hat{E}$ soit égale à 180° , sans pourtant être égaux à 90° chacun.¹⁴ On doit en plus supposer que $BC = DE$ et $CD = EA$. Comment construire un tel pentagone ?

On commence par prendre le triangle ABD , en se donnant $AB = 1$ ainsi que deux angles, soit l'angle α en D et l'angle γ en B . Cela se fait par la même méthode de l'angle inscrit que dans le cas précédent. On en déduit le troisième angle $\beta = \pi - \alpha - \gamma$, ainsi que les côtés $AD = \sin \gamma / \sin \alpha$ et $BD = \sin \beta / \sin \alpha$.

Puis on se donne b , soit $b = BC$. Tout le reste va s'en déduire. En effet, on sait que les triangles accolés BCD et ADE ont deux côtés de même longueur sans que le troisième côté BD soit égal à AD , et en plus avec des angles \hat{C} et \hat{E} de somme 180° . Prenons un point F dans le prolongement de $[BC]$ tel que $BF = 2b$. Il est sur le cercle de centre B et de rayon $2b$. Faisons en sorte que l'on ait aussi $DF = DA$, F étant alors sur le cercle de centre D et de rayon AD . On trouve un seul point F .¹⁵ (figure 39). On constate alors que le triangle DCF est égal au triangle ADE . On en déduit $DC = AE$ que nous notons a , ainsi que les angles \hat{C} et $\hat{E} = \hat{DCF}$. Le pentagone est obtenu.

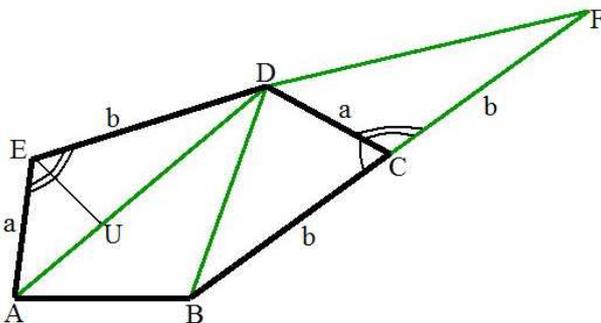


Figure 39 : Construction du pentagone.

Restent à calculer les coordonnées des points C et E . Pour avoir le point C , on cherche d'abord le point F , en appliquant la formule d'Al Kashi, ainsi que l'angle fait par (BF) avec l'axe Ox , comme indiqué dans le morceau de programme ci-dessous. On en déduit les coordonnées de C .

```

/***** triangle ABD *****/
alpha=30.*M_PI/180.; /* on se donne alpha et gamma, ici 30° et 110° */
gamma=110.*M_PI/180.;
h=1./(2.*tan(alpha));
R=h/cos(alpha);
beta=M_PI-alpha-gamma;
x[0]=0.;y[0]=0.; x[1]=1.;y[1]=0; /* les points A et B */
AD=sin(gamma)/sin(alpha);
x[3]=AD*cos(beta); y[3]=AD*sin(beta); /* le point D */
BD=sin(beta)/sin(alpha);
/***** triangle BCD *****/

```

¹⁴ On perd donc les symétries de rotation de quarts de tour.

¹⁵ Sous réserve que l'inégalité triangulaire soit vérifiée, soit $2b < AD + BD$.

```

b=1.4; /* on se donne b, ici 1,4 */
cosb=(BD*BD-AD*AD+4.*b*b)/(4.*b*BD); /* cosb est le cosinus de l'angle DBC */
angleBF=M_PI-gamma-acos(cosb); /* angle de (BF) avec l'axe des x ou (AB).
xF=x[1]+2.*b*cos(angleBF); yF=y[1]+2.*b*sin(angleBF);
x[2]=0.5*(x[1]+xF); y[2]=0.5*(y[1]+yF); /* le point C */
a=sqrt((x[2]-x[3])*(x[2]-x[3])+(y[2]-y[3])*(y[2]-y[3])); /* a */

```

Puis on passe au triangle ADE . Le cosinus de l'angle $\hat{D} = ADE$ se calcule par la formule d'Al Kashi, d'où l'on déduit \hat{D} , puis les coordonnées du point U projection de E sur (AE) . On trouve finalement les coordonnées du point E , comme indiqué dans le morceau de programme qui suit.

```

/***** triangle ADE *****/
cosd=(b*b-a*a+AD*AD)/(2.*b*AD); /* cosinus de l'angle ADE */
d=acos(cosd); /* angle ADE */
sind=sin(d);
DU=b*cosd; UE=b*sind;
xU=DU*(x[0]-x[3])/AD+x[3]; yU=DU*(y[0]-y[3])/AD+y[3]; /* le point U */
x[4]=UE*(-y[3])/AD+xU; y[4]=UE*(x[3])/AD+yU; /* le point E */

```

Il s'agit maintenant de montrer que ce pentagone pave le plan. Pour cela commençons par construire un deuxième pentagone $A'B'C'D'E'$ de la façon suivante : on prend C' en E et B' dans le prolongement de $[DE)$, avec $B'C' = DE = b$ (figure 40 en haut). Par la même occasion, avec $\hat{C}' = \hat{C}$, D' vient se coller en A , arête contre arête, avec $C'D' = EA = a$. Notons que le nouveau pentagone se fabrique en tournant dans le sens inverse par rapport au premier : il se déduit par une isométrie indirecte. Comme $(B'C')$ et $(D'E')$ font entre elles le même angle que (BC) et (DE) , le segment $[D'E']$ est parallèle à $[BC]$, et il a pour longueur b , ce qui permet d'avoir E' . A leur tour, les droites $(A'E')$ et $(C'D')$ font le même angle que (AE) et (CD) . Comme $(C'D') = (AE)$, le segment $[AE']$ est parallèle à $[BC]$. Avec $A'E' = a$, on peut construire le point A' .

Ces deux pentagones accolés étant obtenus, on en obtient deux autres par demi-tour autour du milieu I de $[AB]$, et ceux-ci vont s'accoler aux précédents. Prenons par exemple celui qui est le symétrique de $ABCD$: son sommet B'' vient en A et A'' en B , alors l'arête $[B''C'']$ vient se coller sur $[D'A']$ puisque la somme des trois angles $\hat{A}, \hat{D}', \hat{B}''$ est égale à 360° . A leur tour, $A', E' = C''$ et D'' son alignés. De même pour le quatrième pentagone. Les quatre pentagones forment ainsi un hexagone à côtés opposés parallèles deux à deux, dont on sait qu'il pave le plan (figure 40).

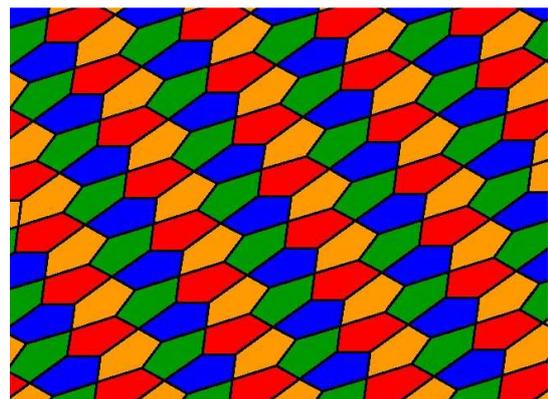
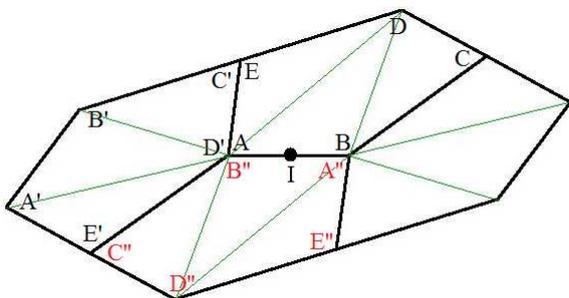


Figure 40 : En haut, l'hexagone à côtés opposés parallèles et égaux, contenant 4 pentagones. En bas, le pavage obtenu.

Ce type de pavage appartient à la classe 2 des pavages pentagonaux. Celle-ci, sous sa forme générale, suppose seulement que $\hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$ et $CD = EA$. Ce qui donne les quatre pentagones de base de la figure 41. On constate qu'ils ne sont pas bord à bord en général. Pour pouvoir l'être, il est nécessaire d'ajouter la condition $BC = DE$, et c'est ce que nous avons fait.

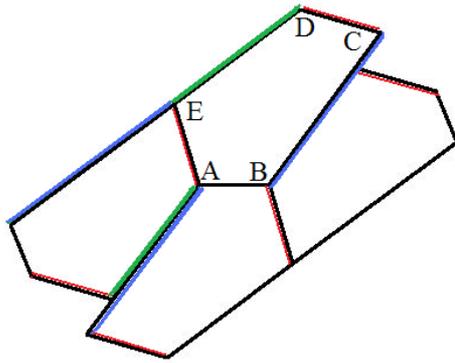


Figure 41 : Pavage du type 2. En ne prenant pas $BC = DE$, le pavage n'est pas bord à bord.

6.4. Troisième généralisation : la classe 5 des pavages pentagonaux

Partons encore d'un triangle quelconque ABD , et accolons lui un triangle équilatéral BCD , ainsi qu'un triangle isocèle DEA avec l'angle \hat{E} égal à 120° (figure 42 à gauche). On a encore $\hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$, mais il ne s'agit pas pour autant d'un pentagone de la classe 2 précédente car on n'a pas $CD = EA$ sauf cas exceptionnel, mais même si cela arrivait, le pavage serait différent.

On va en effet profiter des angles de 60° et 120° pour donner au pavage des symétries de rotation d'ordre 6. Par des rotations successives d'angle 60° autour de C , on trouve une rosace hexagonale formée de six pentagones (figure 42 à droite). Cette rosace peut ensuite être reproduite par translations, pour donner un pavage de type $p6$ (figure 43).

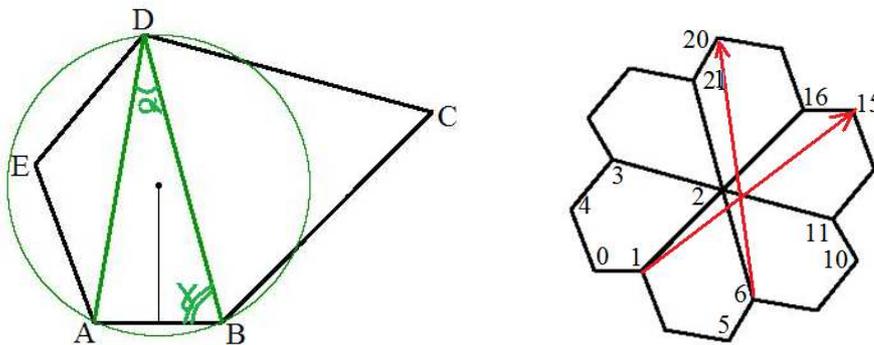


Figure 42 : A gauche, construction du pentagone. A droite, la rosace constituée par six pentagones, avec les deux vecteurs des translations en rouge.

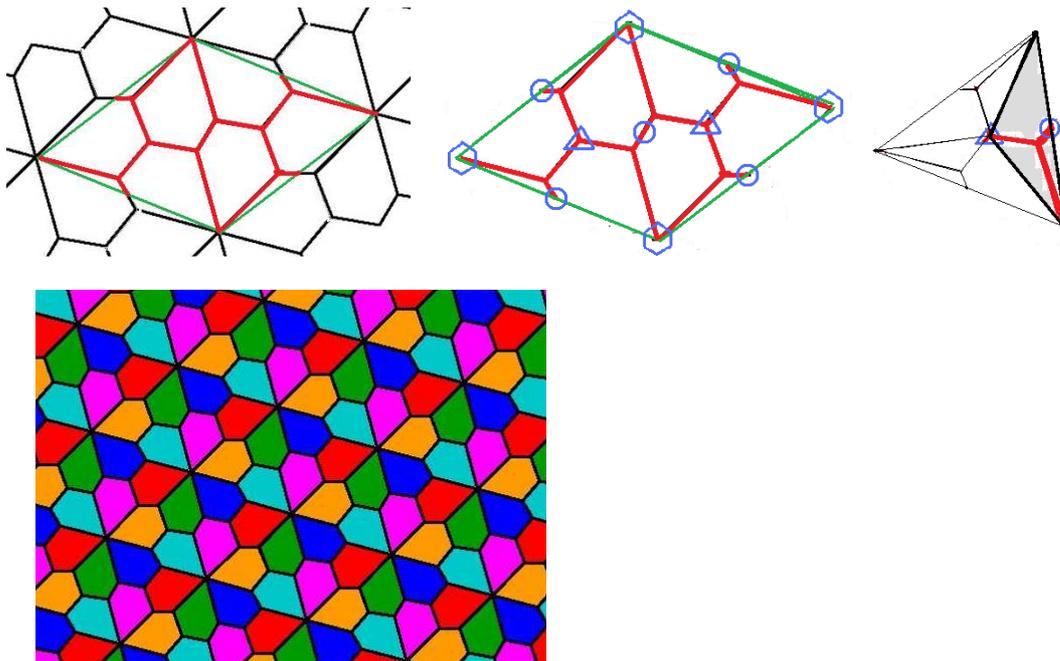


Figure 43 : En haut, le parallélogramme générateur et ses symétries, avec à droite la cellule minimale génératrice. En bas, le pavage pentagonal de type 5.

A ce stade, nous connaissons trois types de pavages par pentagones. Si l'on exclut le pavage de type 3 qui n'est pas bord à bord, et que l'on ajoute le pavage de type 1 que nous allons voir, nous avons là les cinq types de pentagones qu'avait donnés K. Reinhard en 1918, comme étant les seuls à pouvoir paver le plan. Même si cela n'était pas exact, il n'en reste pas moins qu'il était logique d'avoir trouvé en premiers ces cinq types de pentagones, car les autres types qui sont apparus depuis, et pas avant 1968, sont plus complexes.

6.5. Le pavage maison et sa généralisation pentagonale du type 1

Le pavage pentagonal le plus simple est celui obtenu par un pentagone en forme de maison , et on peut le généraliser en modifiant les longueurs et les angles, pour obtenir le pentagone de la figure 44. Notons que le parallélogramme générateur est obtenu à partir de deux pentagones, le deuxième se déduisant par demi-tour du premier.

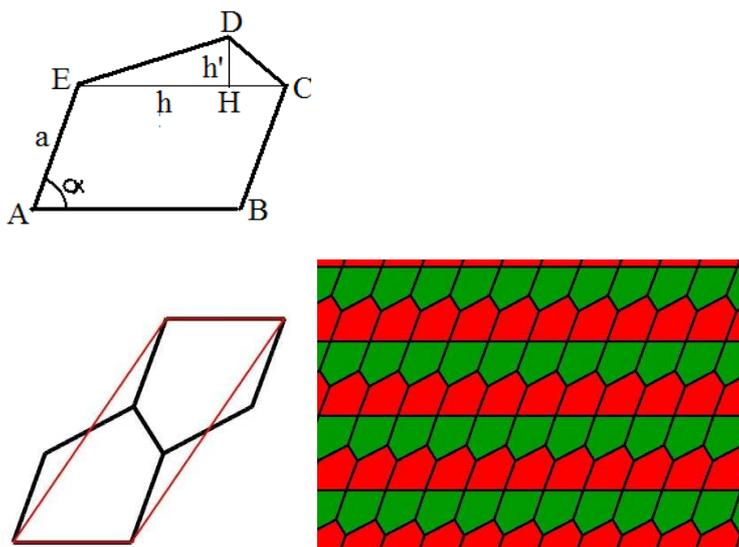


Figure 44 : Le pavage pentagonal de type 1. Le pentagone originel est défini par quatre paramètres : a , α , h et h' , comme indiqué sur la figure du haut.

Programme

```

alpha=70.*M_PI/180.; a=0.8; h=0.75; hh=0.4; /* les quatre paramètres */
x[0]=0.;y[0]=0.; x[1]=1.; y[1]=0.; x[4]=a*cos(alpha);y[4]=a*sin(alpha); /* les cinq sommets */
x[2]=x[1]+x[4]; y[2]=y[1]+y[4]; x[3]=x[4]+h;y[3]=y[4]+hh;
for(i=0;i<5;i++)
  { xe[i]=xorig+zoom*x[i]; ye[i] = yorig-zoom*y[i]; /* coordonnées écran des cinq sommets */
  }
for(i=0;i<5;i++) linewidth(xe[i],ye[i], xe[(i+1)%5],ye[(i+1)%5],3,black); /* dessin du pentagone */
for(i=0;i<5;i++)
  { x[i+5]=x[2]+x[3]-x[i]; y[i+5]=y[2]+y[3]-y[i]; /* le deuxième pentagone déduit par demi-tour */
  xe[i+5]=xorig+zoom*x[i+5]; ye[i+5] = yorig-zoom*y[i+5];
  }
for(i=0;i<5;i++) linewidth(xe[i+5],ye[i+5], xe[(i+1)%5+5],ye[(i+1)%5+5],3,black);
SDL_Flip(screen); pause(); SDL_FillRect(screen,0,white);
/***** pavage *****/
xV1=x[1];yV1=y[1]; xV2=x[6];yV2=y[6]; /* les deux vecteurs de translation */
zoom=50.;
for(k=-10;k<11;k++) for(kk=-10;kk<11;kk++) /* reproduction des deux pentagones de base par translations */
  { for(i=0;i<10;i++)
    { xe[i]=xorig+zoom*(x[i]+k*xV1+kk*xV2); ye[i]=yorig-zoom*(y[i]+k*yV1+kk*yV2);
    }
    for (j=0;j<2;j++) for(i=0;i<5;i++)
      { if (xe[i+5*j]>0 && xe[i+5*j]<800 && ye[i+5*j]>0 && ye[i+5*j]<600 /* pour rester dans les limites d'écran */
        && xe[(i+1)%5+5*j]>0 && xe[(i+1)%5+5*j]<800
        && ye[(i+1)%5+5*j]>0 && ye[(i+1)%5+5*j]<600 )
          linewidth(xe[i+5*j],ye[i+5*j], xe[(i+1)%5+5*j],ye[(i+1)%5+5*j],1,black);
        }
      }
    SDL_Flip(screen); pause();
  /***** coloriage *****/
  xI[0]=0.5*x[2];yI[0]=0.5*y[2]; /* points intérieurs dans chacun des deux pentagones de base */
  xI[1]=0.5*(x[2]+xV1+xV2);yI[1]=0.5*(y[2]+yV1+yV2);
  for(i=0;i<2;i++)
    for(k=-10;k<11;k++) for(kk=-10;kk<11;kk++) /* reproduction de ces deux points par translations */
      { xeI[i]=xorig+zoom*(xI[i]+k*xV1+kk*xV2); yeI[i]=yorig-zoom*(yI[i]+k*yV1+kk*yV2);
        if (xeI[i]>10 && xeI[i]<790 && yeI[i]>10 && yeI[i]<590)
          floodfill(xeI[i],yeI[i],c[i],black); /* remplissage des pentagones avec c[] qui est une couleur prédéfinie*/
        }
      }

```

Il reste quatre autres types de pentagones convexe pavant le plan (types 6 à 9), mais nous ne les étudierons pas ici.

6. Pavage à partir d'un hexagone convexe

Rappelons que la somme des angles d'un hexagone est 4π . En considérant que chaque sommet d'un pavage par hexagones est toujours le sommet de trois hexagones accolés, on aboutit à trois possibilités sur les angles : $\hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 2\pi$, $\hat{B} + \hat{C} + \hat{E} = 2\pi$, $\hat{B} + \hat{D} + \hat{F} = 2\pi$.¹⁶ Et à chacune de ces conditions

¹⁶ Dans chaque cas, il y a deux groupes de 3 angles qui valent 2π . En numérotant les angles de 0 à 5, et en privilégiant le groupe contenant 0, cela fait $C_5^2 = 10$ groupes, ce qui donne les 10 cas : (012)(345), (013)(245), (014)(235), (015)(234), (023)(145), (024)(135), (025)(134), (034)(125), (035)(124), (045)(123). Ou encore, en écrivant ces cas selon la distance entre deux numéros successifs des angles :

1) (11)(11) 2) (12)(21) 3) (13)(12) 4) (14)(11) 5) (21)(31) 6) (22)(22) 7) (23)(21)
 8) (31)(13) 9) (22)(12) 10) (41)(11)

Comme les numéros sont à un décalage cyclique près et à l'ordre près, les cas 4 et 10 se ramènent au cas 1, les cas 3, 5, 7, 8 et 9 se ramènent au cas 2. Il reste trois cas distincts : (012)(345), (013)(245), (024)(135).

Cela n'est pas pour autant une démonstration complète qu'il existe trois types d'hexagones. Une démonstration est faite dans [REI1918]

nécessaires s'ajoutent des contraintes sur les longueurs des côtés. On distingue ainsi trois types d'hexagones convexes pavant le plan, de types 1 à 3.

6.1. Pavage de type 1

L'hexagone est tel que la somme de trois angles successifs soit égale à 360° et que les deux côtés bordant le groupe des trois angles aient même longueur, soit :

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 2\pi$$

$$AB = DE$$

Lorsque l'on va de $[AB]$ à $[DE]$, on tourne d'abord de $\pi - \hat{B}$, puis de $\pi - \hat{C}$ et enfin de $\pi - \hat{D}$, soit au total de $3\pi - (\hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) = 3\pi - 2\pi = \pi$. Il s'ensuit que $[AB]$ est parallèle à $[DE]$. Avec en plus $AB = DE$, le quadrilatère $ABDE$ est un parallélogramme (*figure 45*).

Par demi-tour autour du milieu de $[BC]$ (ou de celui de $[CD]$), on obtient un deuxième hexagone collé au premier, et l'on constate que le bloc ainsi obtenu permet de paver le plan, avec un pavage périodique de type $p2$, à cause des symétries de demi-tour.

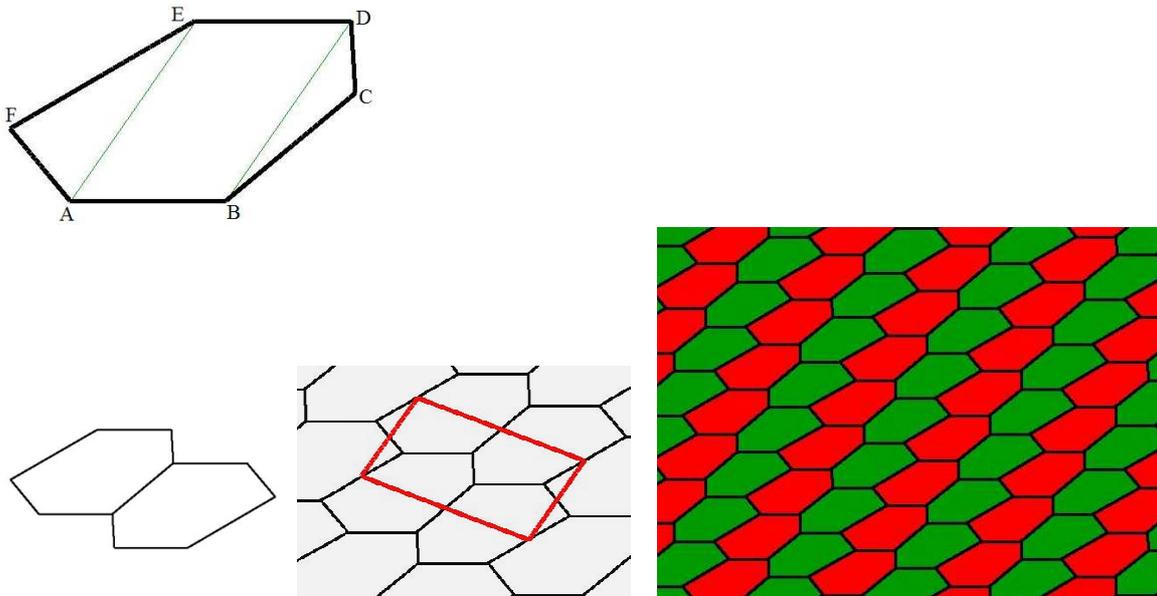


Figure 45 : Pavage par hexagone de type 1. *En haut* le pavé de base. *En bas*, les deux hexagones se déduisant par demi-tour à gauche, donnant le parallélogramme générateur au centre, et un exemple de pavage à droite.

6.2. Pavage de type 2

Les contraintes sont les suivantes :

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{E} = 2\pi$$

$$AB = DE$$

$$CD = EF$$

Comment construire un tel hexagone (*figure 46*) ? Donnons-nous $AB = DE = a$, et $CD = EF = b$. Cela permet de construire le triangle DEF , en prenant $FD = 1$, ce qui impose que $a + b < 1$. Dès lors, l'angle \hat{E} est déterminé, ainsi que les deux autres angles du triangle. Le triangle DEF peut ainsi être construit (on a pris $[FD]$ horizontal avec $x_F = y_F = 0$ et $x_D = 1, y_D = 0$). Dans un deuxième temps,

construisons le triangle $DC'A'$ avec $C'D = b$, $C'A' = a$, et $\hat{C}' = \pi - \hat{E}$ (triangle vert sur la *figure 46*), en choisissant de prendre $[DC']$ vertical. Puis tournons ce triangle d'un angle quelconque α autour de D , ce qui nous donne le point C , ainsi que le point A'' image de A' par cette rotation (triangle rouge sur la *figure 46*). Pour que l'hexagone reste convexe, il convient de prendre $\alpha < \pi/2 - \text{angle}(EDF)$. Il reste à faire une translation de vecteur $\mathbf{V} = \mathbf{A}''\mathbf{A} = \mathbf{CB}$, ce vecteur étant choisi arbitrairement, sous réserve qu'il soit dans le secteur angulaire défini par $[DC)$ et $[CA'')$ pour préserver la convexité. On a alors le parallélogramme $CA''AB$, d'où les points A et B déduits par la translation. On constate que $\hat{B} + \text{angle}(BCA') = \pi$ dans le parallélogramme. Avec en plus $\text{angle}(DCA'') = \pi - \hat{E}$ on a bien $\hat{B} + \hat{C} + \hat{E} = 2\pi$, ce qui permet de comprendre a posteriori la construction du triangle $DC'A'$. Finalement la forme de l'hexagone dépend de quatre paramètres, les longueurs a et b , l'angle α et le vecteur \mathbf{V} .

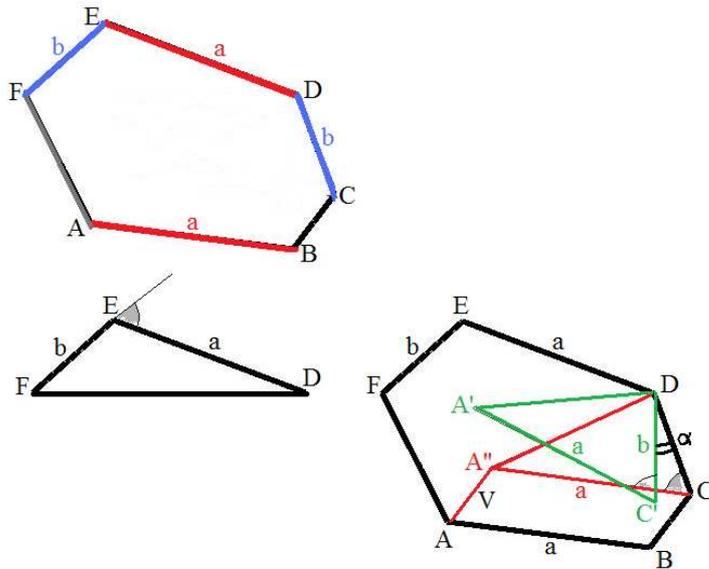


Figure 46 : En haut, l'hexagone du type 2. En bas, les étapes de sa construction.

On en déduit la partie du programme construisant l'hexagone :

```

a=0.75; b=0.4; alpha=20.*M_PI/180.; xVA=-0.15; yVA=-0.2; /* les paramètres */
cosE=(a*a+b*b-1.)/(2.*a*b); E=acos(cosE); sinF=a*sin(E); F=asin(sinF);
x[5]=0.; y[5]=0.; /* le point F */
x[3]=1.; y[3]=0.; /* le point D */
x[4]=b*cos(F); y[4]=b*sin(F); /* le point E */
xCC=x[3]; yCC=-b; /* le point C' */
CC=M_PI-E;
xAA=xCC-a*sin(CC); yAA=yCC+a*cos(CC); /* le point A' */
x[2]=(xCC-x[3])*cos(alpha) - (yCC-y[3])*sin(alpha)+x[3]; /* rotation d'angle alpha pour passer de C' à C */
y[2]=(xCC-x[3])*sin(alpha) + (yCC-y[3])*cos(alpha)+y[3];
xAAA=(xAA-x[3])*cos(alpha) - (yAA-y[3])*sin(alpha)+x[3]; /* le point A'' */
yAAA=(xAA-x[3])*sin(alpha) + (yAA-y[3])*cos(alpha)+y[3];
x[0]=xAAA+xVA; y[0]=yAAA+yVA; /* le point A */
x[1]=x[2]+xVA; y[1]=y[2]+yVA; /* le point B */

```

Passons au pavage. A partir de notre hexagone noté 0 1 2 3 4 5 (*figure 47*), commençons par tracer son symétrique par demi-tour autour du milieu du segment $[1\ 2]$, ce qui donne l'hexagone numéroté de 12 à 17. On s'aperçoit alors que le triangle 345 (ou 15 16 17) peut être plaqué sur l'encoche 3 7 12, mais à l'envers. Cela permet de placer l'hexagone numéroté 6 7 8 9 10 11 de sens indirect. Il reste à pratiquer un demi-tour autour du milieu du segment $[6\ 11]$ pour obtenir le quatrième hexagone numéroté de 18 à 23. Ces quatre hexagones accolés présentent une bordure gauche qui peut s'encaster dans la bordure droite, et de même en haut et en bas. On en déduit les deux vecteurs de translation, soit $\mathbf{5\ 12}$ et $\mathbf{0\ 21}$. Et le pavage peut être effectué. La présence de demi-tours et de symétries glissées font que le pavage périodique est du type *pgg* (*figure 48 en haut*).

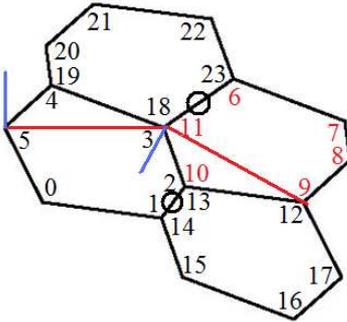


Figure 47 : Les quatre hexagones accolés, permettant d'engendrer le pavage périodique.

La seule difficulté réside dans la symétrie glissée faisant passer de l'hexagone initial (de 0 à 5) à l'hexagone retourné (de 6 à 11). On s'aperçoit que le vecteur unitaire **53** du repère initial est transformé en vecteur unitaire **11 9**, et que le vecteur de l'axe vertical du repère (*en bleu sur la figure 47*) devient un vecteur porté par la perpendiculaire à **11 9** et dirigé vers le bas (*en bleu aussi*). Cela revient à faire intervenir la matrice vectorielle $\begin{pmatrix} ax & ay \\ ay & -ax \end{pmatrix}$ avec ax et ay coordonnées du vecteur **3 12**, puis à faire une translation de 3 vers 12. Tout cela aboutit au programme de construction des 4 hexagones :

```
xi=0.5*(x[1]+x[2]); yi=0.5*(y[1]+y[2]); /* milieu de [1 2] */
for(i=0;i<6;i++) { x[i+12]=2.*xi-x[i]; y[i+12]=2.*yi-y[i]; } /* deuxième hexagone par demi-tour */
ax=x[12]-x[3]; ay=y[12]-y[3]; /* coefficients de la matrice de la symétrie glissée */
for(i=0;i<6;i++) { x[i+6]=x[3]+ax*x[i]+ay*y[i]; y[i+6]=y[3]+ay*x[i]-ax*y[i]; } /* troisième hexagone */
xii=0.5*(x[11]+x[6]); yii=0.5*(y[11]+y[6]); /* milieu de [6 11] */
for(i=0;i<6;i++) { x[i+18]=2.*xii-x[i+6]; y[i+18]=2.*yii-y[i+6]; } /* quatrième hexagone par demi-tour */
xV1=x[12]-x[5]; yV1=y[12]-y[5]; /* les deux vecteurs de translations */
xV2=x[21]-x[0]; yV2=y[21]-y[0];
```

Il ne reste plus qu'à pratiquer les translations pour avoir le pavage (*figure 48*).

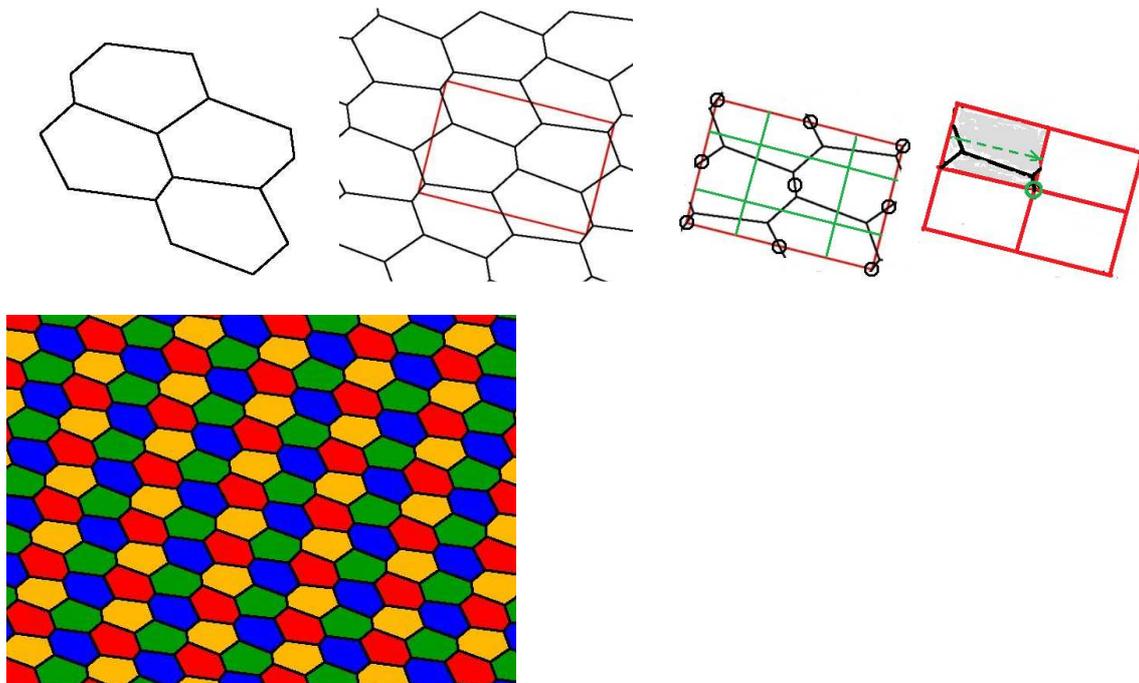


Figure 48 : En haut, les quatre hexagones se déduisant par symétrie glissée et demi-tours, ce qui donne le motif générateur, puis le parallélogramme générateur, avec ses symétries (*en vert* pour indiquer la direction de la symétrie glissée, et enfin le motif de la cellule minimale génératrice, qui

subit une symétrie glissée puis un demi-tour pour remplir le parallélogramme. *En bas*, un exemple du pavage par hexagone du type 2.

6.3. Pavage de type 3

Les contraintes sont :

$$\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = 120^\circ$$

$$BA = BC, DC = DE, FE = FA$$

Pour construire cet hexagone, le plus simple est de partir d'un triangle ACE quelconque, et d'accoler sur chacun de ses côtés un triangle isocèle dont un angle est de 120° . Puis, par rotations de centre B et d'angle $2\pi/3$, on obtient deux nouveaux hexagones. Ce bloc de trois hexagones peut ensuite être reproduit par translations de vecteurs **10 12** et **6 4** (*figure 49 en haut à droite*). Remarquons que le triangle BDF est équilatéral, grâce au théorème dit de Napoléon.¹⁷ Le pavage régulier obtenu par ces triangles équilatéraux explique aussi le pavage par le modèle hexagonal du type 3 (*figure 49*).

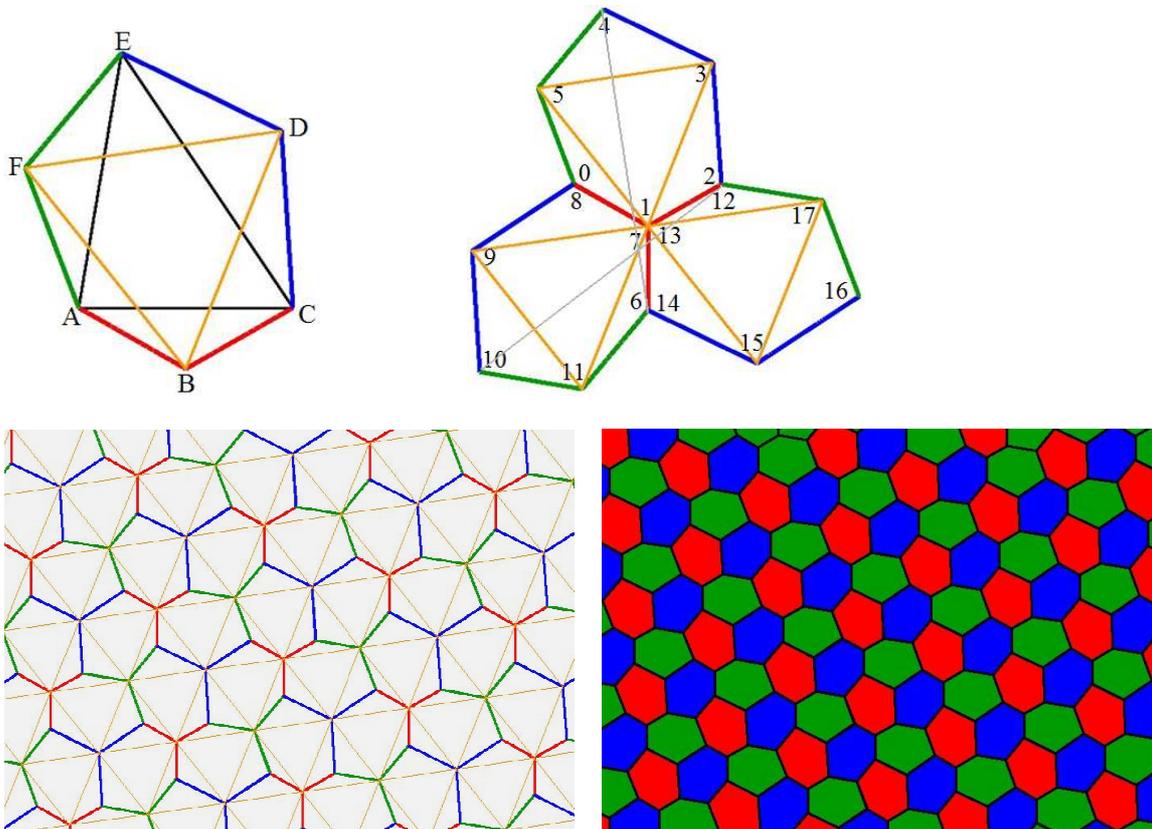


Figure 49 : *En haut* l'hexagone du type 3, et le formation du bloc de trois hexagones permettant le pavage. *En bas à gauche* le pavage avec les triangles équilatéraux sous-jacents, et *à droite* le coloriage des pavés hexagonaux.

¹⁷ Pour plus de détails, voir sur mon site *théorème d'Escher et théorème de Napoléon, pavage par hexagones*.

Bibliographie

{AUD 2013] P. Audibert, *Géométrie des pavages*, Hermès-Lavoisier, 2013.

[DEL2013] J.-P. Delahaye, Les pavages pentagonaux, une classification qui s'améliore, *Pour la Science*, n° 432, 2013.

[DEL2017] J.-P. Delahaye, Paver le plan avec un pentagone convexe, *Pour la Science* n° 482, 2017.

[NIV1978] I. Niven, *Convex polygons that cannot tile the plane*, *American Mathematical Monthly*, 54, 1978.

[REI1918] K. Reinhardt, *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*, Dissertation, Frankfurt am Main, 1918.

[SCH1978] D. Schattschneider, *The Plane Symmetry Groups : Their Recognition and Notation*, AMS 1978.

[TAN2010] J. Tanton, *Tessellations*, *National Association of Math Circles*, 2010.

Articles sur Internet :

drking.org.uk, *Hexagon tessellation*.

[ELJ2015] ELJdx, J'ai toujours rêvé d'être un pentocarreleur, 2015

Pentagonal tiling, wikipedia.