Droites et géométrie discrète (1) Mots associés aux droites, et phénomènes de moirures

On distingue deux types de droites, celles ayant une pente rationnelle et celles ayant une pente irrationnelle. Dans les deux cas, on peut associer à une droite un mot à base de deux lettres, notées *a* et *b*, ou 0 et 1. Nous traitons d'abord le cas où la pente est rationnelle (quotient de deux nombres entiers). L'objectif est d'expliquer les phénomènes de moirures qui apparaissent à cause de la discrétisation nécessaire pour tracer une droite sur un écran d'ordinateur.

1) Cas où la pente est rationnelle

Commençons par rappeler comment associer un mot binaire à une droite. Dans un repère *Oxy* où s'inscrit un quadrillage de points à coordonnée entières, considérons le segment [*OA*] avec *A* (*D*, *N*) à coordonnées entières. On suppose que *N* et *D* sont premiers entre eux.[1] La pente est la fraction irréductible *N* / *D* (*N* / *D* est un nombre rationnel), et on suppose ici qu'elle est strictement comprise entre 0 et 1, ce qui permet de l'approcher par des traits → et ↗.

1-a) Suite arithmétique modulaire associée

Dans ces conditions, on sait que le segment est approché au plus près par en dessous par des points du quadrillage joints par des traits unitaires horizontaux notés *a* ou diagonaux notés *b*, ceux-ci correspondant aux montées et descentes dans la progression arithmétique modulaire (u_n) avec la récurrence $u_{n+1} = u_n + N$ ramenée modulo *D* (entre 0 et *D* – 1) [2], en partant de $u_0 = 0$, et cela jusqu'au premier retour à 0.

Exemples

1) Pente 5 / 11 : la suite arithmétique de raison 5 modulo 11 s'écrit :
0 5 10 4 9 3 8 2 7 1 6 0,
a a b a b a b a b a b ,
ce qui donne le chemin rasant où *a* correspond à un trait horizontal et *b* à un trait vertical :

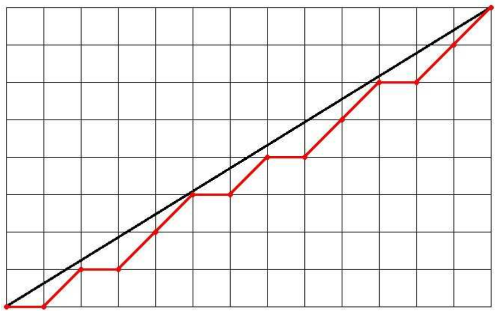
chemin rasant sous la droite de pente 5 / 11

[1] Le segment ne contient aucun point à coordonnées entières, à part ses extrémités.
[2] Ramener modulo *D* signifie que chaque fois qu'un terme de la suite dépasse *D*, on lui enlève *D* de façon à rester toujours placé entre 0 et *D* – 1. On notera la récurrence modulaire $u_{n+1} = u_n + N \; [D]$

2) Pente 8 / 13 : on a la suite 0 8 3 11 6 1 9 4 12 7 2 10 5 0

a b a b b a b a b b a b b

et le chemin rasant correspondant :



Remarques

- Si l'on prend maintenant la droite de pente rationnelle N / D, le mot infini qui lui correspond est formé de la répétition infinie du résultat obtenu ci-dessus (de 0 au premier retour à 0 pour la suite (u_n)). Le mot est périodique. Par exemple pour la droite de pente 8 / 13, la période du mot est $ab\ ab^2\ ab\ (ab^2)^2$.

- Reprenons le bloc périodique de la suite (u_n). Si on le lit à l'envers, on a une suite arithmétique modulo D de raison $-N$ (ou si l'on veut $D - N$). La lecture à l'envers transforme *a* en *b* et vice-versa. On appelle miroir inversé la suite lue de droite à gauche avec interversion des *a* et des *b*. En faisant cela, on obtient le mot associé à la droite (ou au segment) de pente « complémentaire » (D – N) / D. Quand deux pentes sont complémentaires, elles sont l'une inférieure et l'autre supérieure à 1/2. La connaissance du mot de l'une permet d'avoir celui de l'autre. Par exemple, le mot associé à la pente 8 /21 est $((a^2b)^2ab)^2a^2bab$. Celui associé à 13 / 21 est donc $abab^2(ab(ab^2)^2)^2$.

- Pour passer du mot associé à N / D au mot associé à N / (D + N) il suffit de remplacer chaque lettre *b* par *ab*. Et ce processus est réversible. En effet, chaque fois que l'on a une descente entre deux termes successifs de la suite associée à N /D, cela signifie qu'en ajoutant N on a dépassé D et qu'alors on enlève D. Par contre dans la suite associée à N /(D + N) qui est modulo D + N, il y a encore une montée, et c'est seulement au coup suivant que se produit une descente. Ce sont les seuls changements entre les deux suites, la première se retrouvant dans la deuxième. Ainsi seul chaque *b* est remplacé par *ab*.

Exemples

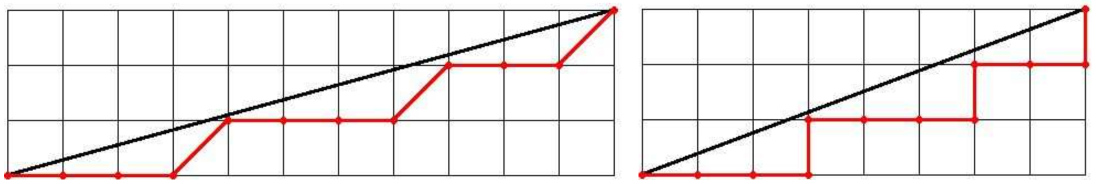
◦ Pour 11 /16, la suite commence ainsi : 0 11 6 1 12 7 2 13 ...

Celle associée à 11 / (16 + 11) = 11 / 27 est : 0 11 22 6 17 1 12 23 7 18 2 ...

◦ Inversement, prenons la fraction 17 / 74. La division de 75 par 17 a pour quotient $q = 4$ et pour reste $D\%N = 6$. [3]Prenons maintenant la fraction 17 / (74 – 3 . 17) = 17 / 23. Celle-ci donne le mot $ab^2\,(ab^3)^5$. On en déduit le mot associé à 17 /74 : il suffit de remplacer chaque b par a^3b , ce qui donne : $a(a^3b)^2(a(a^3b)^3)^5$.

Dans le cas général, la fraction $N\,/D$ peut être remplacée par la fraction $N\,/\,(D-(q-1)\,N) = N\,/\,(N + D\%N)$, puis on passe du mot associée à cette dernière fraction à celui de la première en faisant la substitution $b \rightarrow a^{q-1}b$.

- **Mots de Christoffel** : au lieu de tracer un chemin rasant à base de traits horizontaux *a* et diagonaux *b*, on peut remplacer chaque trait diagonal par un trait horizontal suivi d'un trait vertical. On obtient ainsi un chemin rasant par en-dessous à base de traits horizontaux, notés *a*, et de traits verticaux notés aussi *b*. Cela revient à transformer le *b* diagonal du chemin rasant horizontal - diagonal par *ab*. Or on vient de voir que la substitution $a \rightarrow ab$ faisait passer de la droite de pente $D\,/\,N$ à la droite de pente $D\,/\,(D + N)$ pour les chemins rasants horizontal-diagonal. Le mot associé à la pente $D\,/\,(D + N)$ s'obtient en pratiquant la récurrence $u_{n+1} = u_n + D + N\ \ [D]$ où l'on note ses montées et ses descentes. Maintenant le même mot peut être associé au chemin rasant horizontal - vertical correspondant à la droite de pente $D\,/N$. Un tel mot est appelé mot de Christoffel. On a ainsi la possibilité de deux types de chemins rasants, le passage de l'un à l'autre étant simple, et ils obéissent aux mêmes types de récurrences.



Les deux types de chemins rasants. Le chemin rasant horizontal-diagonal pour la pente 3 /11 (*à gauche*) et le chemin rasant horizontal-vertical pour la pente 3 / 8 (*à droite*) donnent le même mot *aaabaaabaab*, *b* étant un pas diagonal dans le premier cas, et un pas vertical dans le second.

1-b) Découpage du mot en blocs

Reprenons le bloc périodique formé des termes successifs de (u_n) , de $u_0 = 0$ jusqu'au premier retour à 0. Ce dernier terme est u_D, et les termes de u_0 à u_{D-1} forment une permutation des nombres de $\boldsymbol{Z}_D$, soit $\{0, 1, \ldots, D-1\}$, puisque N est supposé premier avec D.[4] A chaque droite est ainsi associée une permutation.

Faisons maintenant la récurrence en partant de 0 et an allant jusqu'à 1 ou – 1 (soit $D-1$) en s'arrêtant à celui des deux trouvé en premier. On distingue deux cas :

---

[3] Le reste d'une division est notée avec le symbole %. Le reste $D\ \%\ N$ est toujours compris entre 0 et $N-1$. Le reste est aussi le nombre D auquel on enlève un certain nombre de fois N de façon à obtenir un résultat entre 0 et $D-1$.

[4] La suite arithmétique modulaire s'écrit sous forme explicite : $u_k = k\,N\,[D]$. On retombe sur 0 lorsque $k\,N = 0\,[D]$, soit $k\,N = qD$, et comme D est premier avec N et qu'il divise $k\,N$ (pour q autre que 0), il divise k. La plus petite valeur de k (autre que 0) est D. Les termes compris entre u_0 et u_{D-1} sont tous différents car si l'on avait $u_i = u_j$ avec $0 \leq i < j \leq D - 1$, on aurait $u_{j-i} = 0$, ce qui est impossible. On obtient bien une permutation de Z_D.

- Premier cas : on tombe sur 1 en premier. Considérons le premier bloc de nombres allant de 0 à 1 compris. Sa longueur T est telle que $N\ T = 1\ [D]$, soit $T = N^{-1}$ inverse de N modulo D (il existe puisque N est premier avec D). Sauf dans le cas exceptionnel des fractions de la forme $1 / D$, [5] on obtient une succession de blocs de même longueur, le premier commençant par 0, le deuxième par 1, etc., avec à la fin seulement un bloc résiduel plus court.

Par exemple, pour 16 / 35, on a la disposition suivante :

$$\underbrace{0\ 16\ \overset{M}{32}\ \ldots\ 20}\ \underbrace{1\ 17\ \overset{M+1}{33}\ \ldots\ 21}\ \underbrace{2\ 18\ \overset{D-1}{34}\ \ldots\ 22}\ \underline{3\ 19\ 0}$$

Soit M le plus grand élément du premier bloc (32 dans l'exemple ci-dessus). Comme on passe d'un bloc au suivant en ajoutant 1 terme à terme, on peut continuer ainsi jusqu'au bloc où le maximum est $D - 1$, ce maximum étant dans la même position que M dans le premier bloc. Il reste après un bloc résiduel plus court qui se termine par 0, et la position de ce 0 final est la même que celle de M dans le premier bloc.

Il en est de même pour le mot à base de a et de b. Il est formé de la répétition du même bloc A, avec à la fin un bloc résiduel formé d'un début du bloc A sauf que son a final est transformé en b. En appelant dA ce début de bloc A modifié, le mot est de la forme $dA\ A^q$. Ainsi le mot associé à la fraction 16 / 35 s'écrit avec le même bloc A répété trois fois et son bloc résiduel de longueur 2 :

$(a^2b(ab)^4)^3\ ab$, le bloc résiduel étant le début du bloc initial aa (de u_0 à u_2) avec son dernier a transformé en b (puisqu'on redescend à 0).

- Deuxième cas : on tombe sur – 1 (ou $D - 1$) en premier. Dans ce cas on pratique un miroir inversé pour se retrouver dans le cas précédent, ce qui correspond à la fraction complémentaire $(D - N) / N$. On a des blocs de longueur $T = (- N)^{-1}$. Par exemple avec 13 / 21, on a :

$$0\ 13\ 5\ 18\ 10\ 2\ \underbrace{15\ 7\ 20\ 12\ 4\ 17\ 9\ 1}_{A}\ \underbrace{14\ 6\ 19\ 11\ 3\ 16\ 8\ 0}_{A}$$

La lecture de droite à gauche donne deux blocs A de longueur $T = (- 13)^{-1}\ [21] = 8^{-1} = 8$. Puis en revenant à la lecture dans le sens normal, de gauche à droite, on a un mot de la forme $fA\ A^q$, commençant par le bloc résiduel fA (une fin de A dont le b qui est en premier est remplacé par a) suivi d'une répétition de blocs A. Par exemple, pour 13 / 21, on obtient le bloc résiduel $abab^2$ suivi de $(ab\ (ab^2)^2)^2$. Remarquons que les deux fractions complémentaires N / D et $(D - N) / D$ ont les mêmes longueurs de blocs A, soit $(- N)^{-1}$, et que la position de -1 dans la récurrence est aussi $(- N)^{-1}$, celle de 1 étant N^{-1}. On est dans le cas où l'inverse de $- N$ modulo D est inférieur à l'inverse de N.

La distinction entre les deux cas précédents se fait suivant que l'inverse de N modulo D est inférieur ou non à celui de $- N$.

---

[5] On n'a pas de bloc résiduel dans le cas exceptionnel où T divise D, il existe alors un nombre $q \geq 1$ tel que $D = q\ T$. Ce nombre doit aussi vérifier $qT = 0\ [D]$, soit $q\ N^{-1} = 0\ [D]$, d'où $q = 0\ [D]$. La seule possibilité est $q = D$, d'où $T = 1$ (et par suite $N = 1$), car si l'on avait $q = kD$ avec $k > 1$, cela imposerait $D = kD\ T$, $kT = 1$, ce qui est impossible.

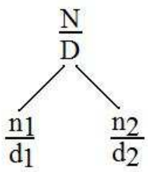
Exemple : chercher les mots associés aux fractions complémentaires 2 /21 et 19 / 21.

Calculons 2^{-1} [21] = 11, d'où $(-2)^{-1} = 10$. Comme $19^{-1} < (-19)^{-1}$, on commence par la fraction 19 / 21 où le 1 arrive avant – 1. Le bloc A est 0 **19** 17 15 13 11 9 7 5 3 1, ce qui donne le mot ab^9. Avec M = 19, on trouve deux blocs successifs A et un bloc résiduel réduit à b. Le mot est $(ab^9)^2b$, et le mot associé à la pente 2 / 11 est $a(a^9b)^2$.

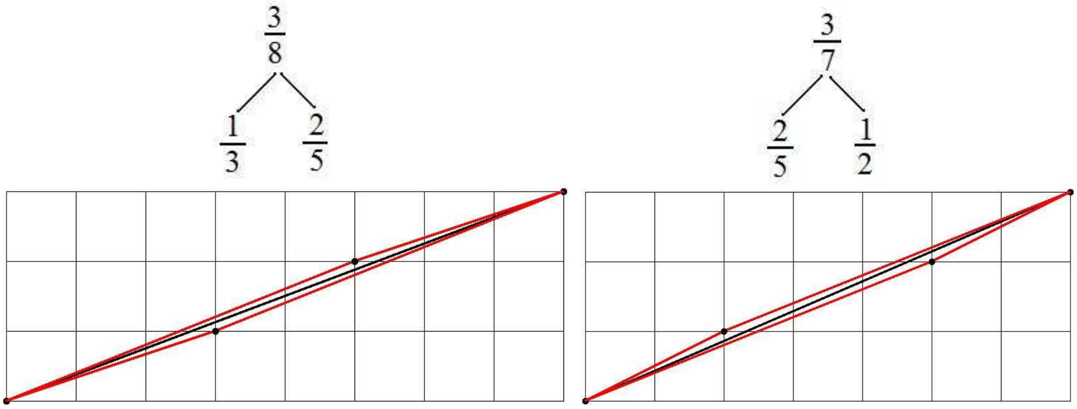
1-c) Mot associé à la droite et arbre binaire

Reprenons le segment d'extrémités O et le point (D, N) avec D et N premiers entre eux. La pente est la fraction irréductible N / D. L'équation de la droite correspondante est $N x - D y = 0$ avec x et y réels. Les seuls points à coordonnées entières du segment [OA] sont ses extrémités. Pour trouver les points (x, y) à coordonnées entières les plus proches du segment, on fait $N x - D y = 1$ ou – 1. Grâce au théorème de Bezout élargi, on sait que l'équation $N x - D y = 1$ admet une solution unique avec $0 < x < D$, et $0 < y < N$, il s'agit du point le plus proche de [OA] situé au-dessous. On sait aussi que l'équation $N x - D y = - 1$ admet une solution unique avec $0 < x < D$, et $0 < y < N$, il s'agit du point le plus proche de [OA] situé au-dessus.

Appelons $A_1(d_1, n_1)$ le point trouvé au-dessous et $A_2(d_2, n_2)$ le point au-dessus. Les coordonnées de ces deux points sont aussi des nombres premiers entre eux.[6] On vérifie aisément que l'on a $n_1 + n_2 = N$ et $d_1 + d_2 = D$. Ainsi la connaissance d'un point donne l'autre. Cela signifie aussi que le vecteur $\boldsymbol{OA}_2$ est égal à $\boldsymbol{A_1A}$. Ainsi le segment [OA] est la diagonale d'un parallélogramme OA_1AA_2 dont on est sûr qu'il ne contient aucun point à coordonnées entières en son intérieur strict (et ses seuls points à coordonnées entières sur la bordure sont les sommets du parallélogramme).



Le segment [OA] de pente N / D est ainsi approché au plus près en-dessous par le segment [OA_1] de pente n_1 / d_1, suivi du segment [A_1A] de pente n_2 /d_2, avec n_1 / d_1 < n_2 /d_2. Cela nous conduit à dessiner un arbre binaire où N /D a deux fils, celui de gauche étant numériquement inférieur à celui de droite. Par exemple :



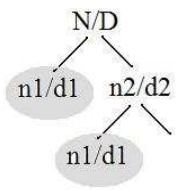
[6] Puisque n_1 et d_1 vérifient $N d_1 - D n_1 = 1$, cela prouve que n_1 et d_1 sont premiers entre eux, et de même pour l'autre point avec $N d_2 - D n_2 = -1$. On dit que N /D et n_1 / d_1 sont des fractions proches, et aussi N /D et n_2 / d_2.

A leur tour, les fractions n_1 / d_1 et n_2 / d_2 sont des fractions proches car elles vérifient aussi $n_1 d_2 - n_2 d_1 = 1$. En effet on a, grâce aux deux équations initiales multipliées par d_2 pour l'une et d_1 pour l'autre : $N d_1 d_2 - D n_1 d_2 = d_2$ et $N d_2 d_1 - D n_2 d_1 = - d_1$, la soustraction de ces deux équations donne après simplification $n_1 d_2 - n_2 d_1 = 1$.

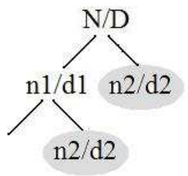
On voit apparaître deux cas : la fraction du fils de gauche a un dénominateur inférieur à celle de droite, ou inversement. On appellera « grand » frère celui qui a le plus grand dénominateur (ou numérateur). Dans le cas des fils de 3 / 8, le grand frère est à droite, et pour 3 / 7 le grand frère est à gauche. Comment faire la distinction ? Prenons la fraction de gauche (toujours la plus petite numériquement) n_1 / d_1 avec $N\,d_1 - D\,n_1 = 1$, d'où $N\,d_1 = 1$ $[D]$ et $d_1 = N^{-1}$ $[D]$ et de même $d_2 = (-N)^{-1}$ $[D]$. On a $d_1 < d_2$ ssi $N^{-1} < (-N)^{-1}$. On retrouve la distinction faite dans le paragraphe précédent, lors du découpage du mot associé à la droite en blocs.

La décomposition du segment $[OA]$ en deux segments peut être répétée sur chacun de ces deux segments. On obtient ainsi le développement d'un arbre binaire jusqu'à des feuilles correspondant aux fractions 0 / 1 ou 1 / 1. Ce développement est automatique, grâce à la propriété suivante :

Un des deux fils du grand frère est le clone du petit frère (si le petit frère est à gauche, le fils concerné est aussi à gauche, et de même à droite).



cas où le grand frère n_2/d_2 est à droite

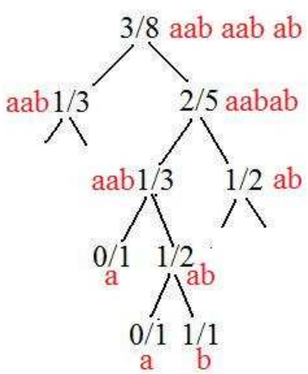


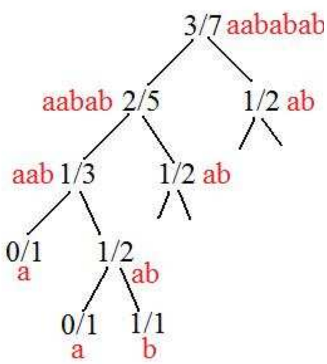
cas où le grand frère n_1/d_1 est à gauche

Exemples

- 3/8 : La connaissance d'un fils de 3/8, 1/3 ou 2/5 suffit pour construire toute l'arborescence binaire, et en remontant de construire le mot associé à la pente 3/8, soit $(aab)^2\,ab$ où l'on retrouve le bloc A (aab) répété, suivi d'un bloc résiduel ab qui est un début de A où le dernier a est remplacé par b. Remarquons qu'on est dans le cas où le fils de 3/8 qui est le grand frère est à droite (N^{-1} $[D] < (-N)^{-1}$, ou encore dans la récurrence sur (u_n) on tombe sur 1 avant – 1).

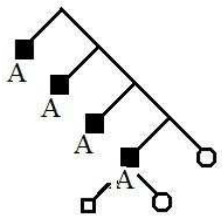
- 3/7 : On est ici dans le cas où le fils de 3/7 qui est le grand frère est situé à gauche. En remontant on trouve le mot $a\,(ab)^3$.





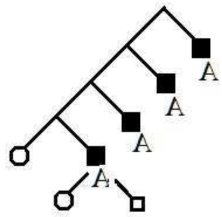
Plus généralement, on a deux cas de figure selon que dans la suite (u_n) on tombe sur 1 avant – 1 (premier cas) ou inversement (deuxième cas). On notera que dans le premier cas, après la répétition du bloc *A*, le bloc résiduel final est non seulement un début du bloc *A* modifié ou encore une fin de *A*, plus précisément le sous-arbre droite de *A*. Et dans le deuxième cas le bloc résiduel initial est une fin de *A* modifiée ou encore un début de *A*, soit le sous-arbre gauche de *A*.

Premier cas



mot : A^q . sous-arbre droit de *A*

Deuxième cas



mot : sous-arbre gauche de *A* . A^q

Algorithme pour résoudre l'équation $N\,x - D\,y = 1$ ($0 < x < D$, $0 < y < N$)

On a vu que la seule connaissance d'un fils de N / D suffit à construire rapidement toute l'arborescence qui permet d'avoir le mot associé à la pente N / D. On va maintenant fabriquer un algorithme qui permet de l'obtenir.[7]

Pour cela, on pratique la récurrence $u_{n+1} = u_n + N\ [D]$ et notant l'évolution de l'abscisse x et de l'ordonnée y du chemin rasant sous la droite de pente N / D.

- Si l'on tombe sur 1 avant D – 1, on s'arrête en notant les valeurs de x et y obtenues. On vient d'obtenir le bloc correspondant à la fraction y / x proche de N / D et qui lui est inférieure, c'est-à-dire la solution de $N\,x - Dy = 1$ pour $0 < x < D$ et $0 < y < N$.
- Sinon, on prend la fraction complémentaire (D – N) / D en faisant la récurrence $u_{n+1} = u_n + D - N\ [D]$, et l'on s'arrête dès que l'on tombe sur 1, en notant les valeurs de x et y obtenues, on vient d'obtenir la fraction y / x proche de (D – N) / D et qui lui est inférieure, c'est-à-dire la solution de $(D - N)\ x - D\ y = 1$. Cette égalité s'écrit aussi $- N\ x + D\ (x - y) = 1$, ou encore $N\ x - D\ (x - y\ ) = - 1$, où $(x - y\ )$ / x est la fraction proche de N / D qui lui est supérieure. Celle qui est inférieure est $(D - x)$ / $(N - x + y)$, d'où la solution de l'équation : $N\ (D - x) - D\ (N - x + y) = 1$.

On en déduit le programme :

```
flag=0; u=0; y=0;x=0;
while (u!=1)
   { x++; u+=N; if (u>=D)  {u-=D; y++;}
     if (u==D-1) {flag=1; break;}
   }
 if (flag==0)
```

[7] Il existe deux méthodes pour trouver une fraction proche de N / D ou, ce qui revient au même, une solution de l'équation liée au théorème de Bezout. Une méthode est l'algorithme d'Euclide élargi, l'autre est la décomposition en fractions continuées : l'avant-dernière réduite est la solution cherchée. On va disposer maintenant d'une troisième méthode.

```
   printf("L'équation %d x - %d y = 1 a pour solution x = %d, y = %d",N, D, x, y);
else if (flag==1)
  { u=0; y=0;x=0;
    while (u!=1) {x++; u+=D-N; if (u>=D)  {u-=D; y++;} }
    printf("L'équation %d x - %d y = 1 a pour solution x = %d, y = %d",
           N, D, D - x, N – x + y);
  }
```

1-d) Décomposition du mot en sous-mots longs et courts

Nous allons montrer la propriété suivante : Lorsque la pente N / D de la droite est inférieure à 1/2, le mot qui lui est associé est formé de sous-mots courts C de la forme $a^k b$ et longs L de la forme $a^{k+1}b$ (sauf dans le cas exceptionnel des pentes 1/D où le mot s'écrit $a^{D-1}b$). Et lorsque la pente est >1/2, on a les blocs ab^k et ab^{k+1}.

Prenons N / D <1/2 (avec $N \neq 1$), et procédons à la transformation suivante, en deux temps :

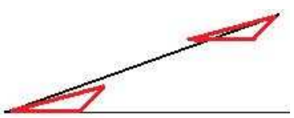
$N / D \to N / (N + D\%N) \to D\%N / (N + D\%N)$.

Le premier passage de N / D à N / (N + D%N) correspond à une substitution de la forme $b \to a^k b$, comme on l'a vu dans une remarque du paragraphe 1-a) et la fraction obtenue est supérieure à 1/2. Le deuxième passage de N / (N + D%N) à D%N / (N + D%N) correspond à un miroir inversé, et donne finalement une fraction < 1/2. Au terme de la transformation, on a une nouvelle fraction dont le numérateur D%N (< N) est inférieur à celui N de la fraction initiale. En répétant cette transformation, on est sûr d'arriver en un nombre fini de coups à une fraction < 1/2 de numérateur 1, dont le mot est de la forme $a^q b$ (avec q>1). Puis on pratique la transformation inverse une première fois : elle donne ab^q puis $a(a^k b)^q = a^{k+1}b\ (a^k b)^{q-1}$. On a bien la présence des deux types de mots longs et courts. Puis on répète la transformation inverse jusqu'au retour à N / D. Il y a préservation des mots L et C, comme on le vérifie par récurrence : on part d'un mot formé avec des sous-mots $L= a^d b$ et $C = a^{d-1}b$ (d>1). Par miroir inversé, on a un mot avec les blocs $L' = ab^d$ et $C'= ab^{d-1}$. Il reste à pratiquer la substitution $b \to a^k b$, ce qui conduit à la présence des blocs $a(a^k b)^d = a^{k+1}b\ (a^k b)^{d-1}$et $a(a^k b)^{d-1} = a^{k+1}b\ (a^k b)^{d-2}$. On trouve bien la présence des deux types de blocs $L = a^{k+1}b$ et $C = a^k b$. D'où la propriété annoncée.

Remarques

- Pour une pente N / D < 1/2, où le mot a toutes ses lettres b isolées (aucun bloc bb), celui-ci commence par un mot long L et se termine par un mot court C. Dans l'arborescence correspondante issue de la fraction N / D il en est de même pour les sous-arbres puisque les fractions sont aussi < 1/2. On a un résultat inverse si la pente est supérieure à 1/2.

.



Prenons le premier mot associé à la droite, dessiné en rouge à gauche sur le dessin. Si l'on avait le même mot à la fin, le point correspondant serait au-dessus de la droite, et non en dessous. Le dernier mot doit être plus court que le premier. On ne peut avoir qu'un mot L au début et un mot C à la fin.

- Pour une pente N / D inférieure à 1/2, le nombre de blocs L ou C est N, la longueur d'un bloc C est $[(D - N) / N]$, et le nombre de blocs L est $(D - N)\%N$.[8]

Chaque bloc ne contient qu'une lettre b, correspondant à une montée de 1. Il y a autant de blocs que de lettres b, et le nombre de b est N, qui est aussi le nombre de blocs. Le nombre de a est $D - N$. Divisons ce nombre de a par le nombre de blocs. Comme la différence de longueur entre les blocs L et C est égale à 1, le quotient $[(D - N) / N]$ est forcément la longueur d'un bloc court, et le reste $(D - N)\%N$ donne le nombre de blocs longs.

Tous les résultats obtenus jusqu'à présent permettent de trouver le mot associé à une droite, sans avoir besoin de fabriquer la suite arithmétique modulaire qui le définit.

Exemples

- 7 / 103 : le nombre de b est 7 et celui des a est 96. Le nombre de blocs L ou C est 7. La division de 96 par 7 donne 13 comme quotient et 5 comme reste : le mot compte 5 mots longs $a^{14}b$, et 2 mots cours $a^{13}b$. Cela ne suffit pas pour connaître le mot. Alors calculons l'inverse de N, soit 7 modulo 103. On trouve 59. L'inverse de $- N$, qui vaut 44, est inférieur. Le mot est de la forme sous-arbre gauche de A concaténé à des blocs A. Comme un bloc A est de longueur 44, il y a deux blocs A, le bloc résiduel initial est de longueur 15 : il s'agit de $a^{14}b$, et le bloc A qui commence par $a^{14}b$ et se termine par $a^{13}b$ ne peut être que $a^{14}b\ a^{14}b\ a^{13}b$, d'où le mot $a^{14}b\ \ (a^{14}b(a^{13}b)^2)^2$.

- 98 / 103 : le mot comporte 98 b et 5 a, d'où 5 blocs L ou C. La division de 98 par 5 a pour quotient 19 et pour reste 3. Le mot compte 3 mots longs $L\ ab^{20}$ et 2 mots courts $C\ ab^{19}$. Avec $98^{-1} = 41 < -N^{-1}$ [103], un bloc A a pour longueur 41, et le mot est de la forme A^2- sous-arbre droit de A, d'où $(ab^{19}\ ab^{20})^2\ ab^{20}$.

1-e) Rythmique de la progression arithmétique modulaire, et construction récursive du mot associé à la droite

On s'intéresse ici aux droites de pente N / D, cette fraction étant irréductible et strictement comprise entre 0 et 1 / 2. On sait que le cheminement rasant par en dessous, allant du point O au point (D, N) s'obtient grâce à la suite (u_n) obtenue en pratiquant la récurrence $u_{n+1} = u_n + N$ $[D]$ à partir de $u_0 = 0$ et jusqu'au premier retour à 0, en lisant ses montées notées a (pas horizontal) et ses descentes notées b (pas diagonal). On sait que le mot obtenu se décompose en sous-mots longs L et courts C, le court ayant une lettre de moins. Et comme on prend ici une pente inférieure à 1 / 2, les lettres b sont isolées et constituent la fin de chaque bloc long ou court (sauf pour les fractions du type 1 / D). Un bloc long est de la forme $a^n b$ et un bloc court est $a^{n-1}b$ avec $n = [D / N]$.

Prenons l'exemple de la fraction 5 / 11 (< 1 / 2). Avec [11 / 5] = 2, on a $L = a^2b$ et $C = ab$. La suite (u_n) s'écrit :

0 5 10 4 9 3 8 2 7 1 6 0

$\underline{a\ \ a\ \ b}\ \ \underline{a\ \ b}\ \ \underline{a\ \ b}\ \ \underline{a\ \ b}\ \ \underline{a\ \ b}$

[8] Pour $N > D / 2$, on a le même type de résultats : le nombre de blocs L ou C est $D - N$, le nombre des b dans un bloc C est $N / (D - N)$, et le nombre de blocs L est $N\%(D - N)$.

Comme chaque bloc se termine par un b, il commence par un terme de (u_n) compris entre 0 et $N - 1 = 4$, et l'on constate que la suite extraite 0 4 3 2 1 0 constitue la séparation entre les blocs, plus précisément une montée correspond à un bloc long et une descente à un bloc court, d'où *L C C C C*.

Montrons le dans le cas général. Un bloc court a pour longueur [D / N) et un bloc long [D / N] + 1. Dans la suite (u_n) où l'on va de N en N [D], l'intervalle occupé par un bloc court est [D / N] . $N = D - D\%N$ (puisque par définition de la division euclidienne $D = [D / N]\ N + D\%N$). De même celui d'un bloc long est $D + N - D\%N$. Et comme on travaille modulo D, cela revient à avancer de $N - D\%N$ pour un bloc long et de reculer de $D\%N$ pour un bloc court. Par exemple avancer de 4 ou reculer de 1 dans l'exemple de 5 / 11. Mais comment choisir un seul de ces cas ? C'est là qu'intervient le fait que chaque bloc se termine par un b, ce qui nous contraint à prendre des termes de u_n situés entre 0 et $N - 1$. Tout cela revient à pratiquer la récurrence $u_{n+1} = u_n + N - D\%N$ [N] (ou ce qui revient au même $u_{n+1} = u_n - D\%N$ [N]). La suite extraite de (u_n) obtenue ainsi donne la séparation des blocs, avec en plus la présence d'un bloc long quand on monte de $N - D\%N$, et celle d'un bloc court lorsque l'on descend de $D\%N$. On aboutit aux règles suivantes.

Règles sur la disposition des mots longs et des mots courts

Règle 1 : Pour la droite de pente N / D inférieure à 1 / 2, associée à la suite arithmétique $u_{n+1} = u_n + N$ [D], la disposition de ses sous-mots longs et courts s'obtient en pratiquant la suite arithmétique $u_{n+1} = u_n + N - D\%N$ [N] (correspondant à la droite de pente ($N - D\%N$) / N) à partir du $u_0 = 0$, en lisant ses montées et ses descentes, une montée correspondant à un sous-mot long L et une descente à un sous-mot court C dans le mot de droite de pente N / D.

Exemple : mot associé à 5 / 11 (<1/2): on a [11/5] = 2, d'où $L = a^2b$ et $C = ab$. On a aussi 11%5 = 1, on prend la pente (5 – 1)/5 = 4 / 5 pour avoir la rythmique de 5 / 11. Pour 4 /5, on a le mot associé à la suite arithmétique 0 4 3 2 1 0, soit $abbbb = ab^4$. On en déduit le mot associé à 5 / 11 : $a^2b(ab)^4$. On le vérifie en faisant directement la récurrence $u_{n+1} = u_n + 5$ [*11*], soit **0** 5 10 **4** 9 **3** 8 **2** 7 **1** 6 **0**, soit *aabababababab*.

Règle 2 : La lecture des montées et descentes dans la suite $u_{n+1} = u_n + N - D\%N$ [N] (ou encore $u_{n+1} = u_n - D\%N$ [N]) revient à lire les montées et descentes dans la suite « complémentaire » $u_{n+1} = u_n + D\%N$ [N] puis à pratiquer un miroir inversé.

Exemple : Pour 5 / 11, faisons maintenant la récurrence : $u_{n+1} = u_n + D\%N$ [N], soit $u_{n+1} = u_n + 1$ [5] : 0 1 2 3 4 0, d'où le mot a^4b, puis on fait le miroir inversé ab^4 , et l'on retrouve la rythmique de 5 / 11 précédemment trouvée.

Algorithme constructif

Ces deux règles vont nous permettre de construire le mot associé à N / D, avec ses blocs longs et courts, grâce à l'algorithme suivant :

- Si N / D est > 1 / 2, on prend la fraction complémentaire ($D - N$) / D, à condition de prévoir ensuite un miroir inversé. On part maintenant toujours d'une fraction inférieure à 1 / 2.

- Puis on répète la règle 1, qui fait passer d'une fraction à une nouvelle fraction dont les numérateurs et dénominateurs sont plus petits. On finit toujours par tomber sur une fraction de la forme 1 / *d*, dont le mot est $a^{d-1}b$, puis on remonte à la fraction initiale par substitutions successives. Mais cela n'est valable que si toutes les fractions sont < 1 / 2. C'est là que la règle 2 intervient : on sait que l'on peut prendre soit la fraction (N – D%N) / N soit la fraction D%N / N (à condition dans ce cas de pratiquer un miroir inversé). Sur ces deux fractions l'une est toujours < 1 / 2 (sauf si l'on tombe exactement sur 1 / 2, ce qui ne peut arriver qu'à la fin), et c'est elle que l'on choisit.

Exemples

1) 5 / 13 : [13 / 5] = 2, d'où $L = a^2b$ et $C = ab$. D'autre part : D%N =13%5 = 3 et N – D%N = 2. On prend 2.

- fraction 2/ 5 : [5 / 2] = 2, d'où $L = a^2b$ et $C = ab$. D%N =5%2 = 1 et N – D%N = 1.
- Fraction 1 /2 : ab.

Puis on remonte : $ab \to a^2b\ ab \to (a^2b)^2\ ab\ \ a^2b\ ab$ qui correspond à 5 / 11.

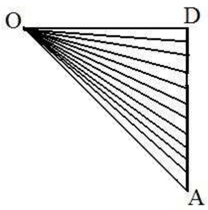
2) 17 / 74 : [74 / 17] = 4, d'où $L = a^4b$ et $C = a^3b$. D'autre part : D%N =74%17 = 6 et N – D%N = 11. On prend 6.

- fraction 6 / 17 : il faudra faire un miroir inversé. [17 / 6] = 2, d'où $L = a^2b$ et $C = ab$. D%N =17%6 = 5 et N – D%N = 1.
- Fraction 1 / 6 : le mot est a^5b.

Puis on remonte : $a^5b \to (a^2b)^5\ ab \to ab(ab^2)^5 \to a^4b\ \ a^3b\ \ (a^4b\ \ (a^3b)^2)^5$ qui correspond à 17 / 74.

1-f) Droites et phénomènes de moiré

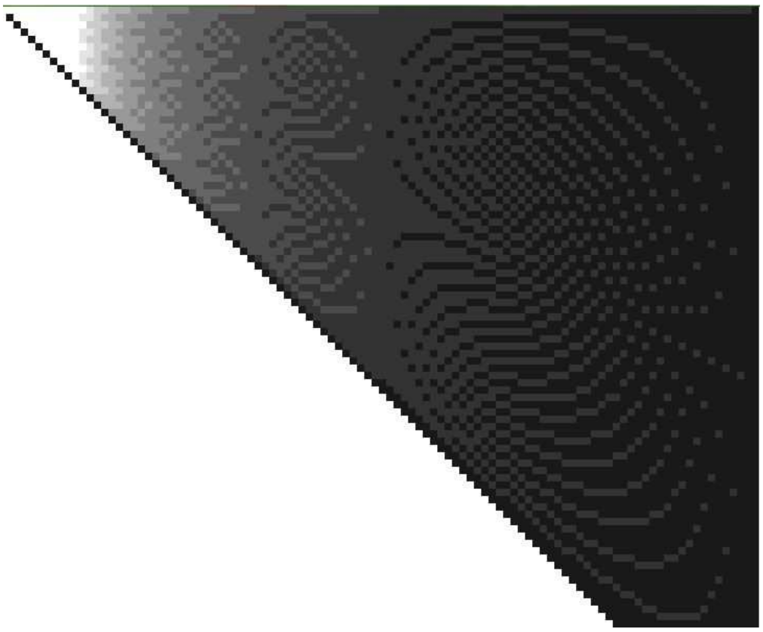
Problème

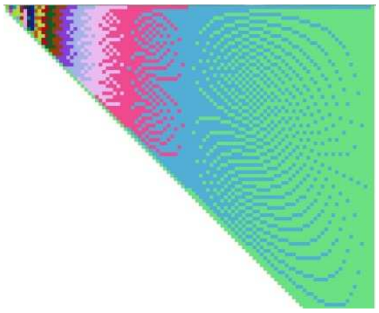


Donnons-nous un nombre D et construisons tous les segments issus de l'origine O et de pente n / D où n prend toutes les valeurs sur [0 D]. On obtient un faisceau de D + 1 droites inscrit dans un triangle du quadrillage des points à coordonnées entières. On colorie les points du quadrillage suivant le nombre de fois où ils sont touchés lors du tracé des segments. On visualise ainsi une densité « lumineuse » en chaque point.

Observation des résultats

Au lieu d'un dégradé régulier des couleurs, la discrétisation des droites provoque la formation de bandes verticales de densité constante, mais avec des frontières floues entre elles, c'est là que se produisent des phénomènes de moiré. Ceux-ci se développent surtout sur la partie droite du dessin (pour x entre D / 2 et D), sous la forme d'hyperboles.





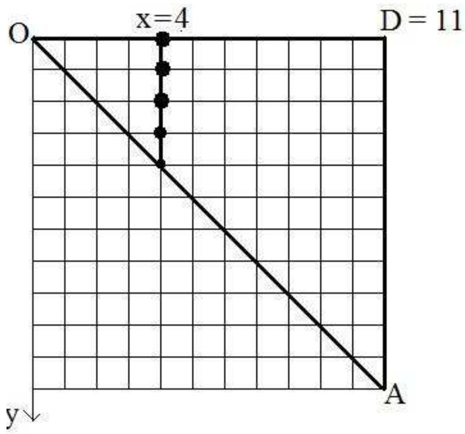
Pou D = 103, phénomènes de moiré et bandes coloriées verticales, *à gauche* en nuances de gris (du blanc au noir lorsque la densité diminue), et à droite avec des couleurs au hasard pour faire ressortir les bandes verticales et les moirures.

Explications de ces phénomènes

1) Calcul de la densité

Pour des besoins de simplification, supposons d'abord que D est un nombre premier impair. Toutes les pentes n/D des droites sont des fractions irréductibles (pour n de 1 à $D-1$), et donnent des mots tels qu'on les a vus précédemment. Nous allons nous placer sur une verticale x = cte et nous intéresser à la densité de chacun de ses points. Dans les cas extrêmes $x = D$, la densité est partout 1, et pour $x = 0$, elle vaut $D + 1$.[9]

Rappelons que pour une droite de pente n / D donnée, le point d'abscisse x le plus proche en dessous a pour ordonnée $y = [n\,x / D]$. La densité d'un point (x, y) donné est donc le nombre de valeurs de n vérifiant $y = [n\,x / D]$.



Prenons par exemple D = 11, et x = 4, avec les droites de pente n / D (n de 0 à 11). Le fait de chercher, pour chaque y (de 0 à 4), le nombre de n tels que $y = [4\,n / 11]$ nous invite à considérer la suite obéissant à la récurrence $u_{n+1} = u_n + x$ $[D]$ avec $u_0 = 0$ et à noter ses montées a et ses descentes b. Il s'agit encore d'un mot de droite (avec une pente x / D ici). Puis on écrit en dessous le quotient euclidien $[4\,n / 11]$. Celui-ci qui démarre à 0 augmente de 1 chaque fois que l'on passe sur un b. Le nombre de fois où le quotient reste le même donne la densité $d(4, y)$, y étant ce quotient.

[9] Pour les points situés sur la diagonale extrême $y = x$, la densité est partout 1.

0 4 8 1 5 9 2 6 10 3 4 0	suite (u_n)
a a b a a b a a b a b	mot correspondant
0 0 0 1 1 1 2 2 2 3 3 4	quotient euclidien
$d(4,0)=3$ $d(4,1)=3$ $d(4,2)=3$ $d(4,3)=2$ $d(4,4)=1$	

On aboutit à la règle suivante : on traite la récurrence $u_{n+1} = u_n + x\ [D]$ avec $u_0 = 0$, en notant ses montées et ses descentes a et b (présence de blocs ab^k et ab^{k+1} pour $x > D / 2$, et de blocs a^kb et $a^{k+1}b$ pour $x < D / 2$). La densité $d(x, y)$ est le nombre de a situés entre le y ème et le $y + 1$ ème b, augmenté de 1.

2) Les bandes coloriées verticales

- Premier cas : x est compris entre $D/2$ et $D - 1$. Dans ce cas, les lettres a sont isolées. Cela prouve que la densité est égale soit à 1 soit à 2. Pour $x = D - 1$, le mot est ab^{D-1}, la densité est égale à 1 partout sauf pour $y = 0$ où elle vaut 2. La couleur associée à la densité minimale 1 domine à proximité de $x = D - 1$. A l'autre extrémité, pour $x = (D - 1)/2$, le mot est $(ab)^{(D-1)/2}\, b$, la densité est de 2 presque partout sauf pour les deux dernières valeurs de y. La couleur dominante aux alentours de $x = (D - 1)/2$ est associée à cette densité 2.

Dans les cas intermédiaires, la densité est égale à 2 autant de fois qu'il y a de lettres a dans le mot, et elle vaut 1 ailleurs. Rappelons les résultats trouvés au 1-d) : le nombre de blocs longs ou courts L ou C est $D - x$, le nombre de b dans un bloc court C est $x / (D - x)$, et le nombre de blocs longs L est $x\%(D - x)$. [10] On en déduit que lorsque le reste de la division de x par $D - x$ est proche de 0, les blocs courts sont fortement prédominants, et le nombre k de lettres b dans les blocs courts est justement le quotient de cette division. Or $x / (D - x) = k$ s'écrit aussi $x = (k\, D / (k+1)$ en prenant le quotient euclidien majoré de 1 pour avoir un reste proche de 0.

Prenons par exemple $D = 103$. Pour k=1, et $x = D / 2$, soit $x = 51$ ou 52, on a déjà vu que pour $x = 52$, les 51 blocs ab étaient fortement prédominants (avec un seul bloc long ab^2). Pour $k = 2$, soit $x = 2\, D / 3 = 68$ ou 69 par majoration[11], 69/34 donne un quotient 2 et un reste 1 : les 33 blocs ab^2 sont fortement dominants (avec un bloc ab^3 supplémentaire), le mot étant $(ab^2)^{33}ab^3$. Pour $k = 3$ et $x = 3D/4 = 77$ ou 78 par majoration, le quotient 78/25 donne un quotient 3 et un reste 3, d'où 3 blocs longs ab^4 et 22 blocs courts ab^3.

Finalement on a une forte proportion de blocs ab^k (par rapport à l'autre bloc) aux alentours des x tels que $x = k\, D / (k + 1)$. Cela va nous servir dans ce qui suit.

- Deuxième cas : x entre 0 et $D/2$. La forte prédominance des blocs ab^k pour $x = k\, D / (k + 1)$ signifie qu'il y a une forte prédominance des blocs a^kb pour la fraction complémentaire $x = D / (k + 1)$, d'où la densité prépondérante $k + 1$.

---

[10] On sait aussi que Le mot de droite correspondant (pente x / D) commence par un bloc C et se termine par un L.

[11] Si l'on prend le quotient euclidien 68, on a 68/35 = 1 et un reste 33, d'où 33 blocs longs ab^2 et 2 blocs courts ab. Il y a aussi prédominance de ab^2, mais dans ce cas, il s'agit des blocs longs. Le mot correspondant est d'ailleurs $(ab(ab^2)^{16})^2ab^2$.

Reprenons l'exemple D = 103. D'après les calculs précédents, pour k = 2, soit pour le complémentaire x = 103 – 69 = 34, on a 33 blocs a^2b, et un bloc a^3b, d'où la couleur prédominante associée à la densité 3, la densité 4 étant rare. Pour k = 3 et x = 103 – 78 = 28, on a 22 blocs a^3b et 3 blocs a^4b, d'où la forte prédominance de la densité 4 sur la densité 5.

Cela explique la forte prédominance d'une couleur pour x de la forme D / (k + 1) avec k > 0, avec la formation de bandes verticales d'une même couleur tout autour. Dans les zones intermédiaires se produisent des mélanges, et c'est là que se développe le moiré. Mais celui-ci est de plus en plus grossier quand on s'approche de l'origine, où les bandes coloriées sont de plus en plus petites.

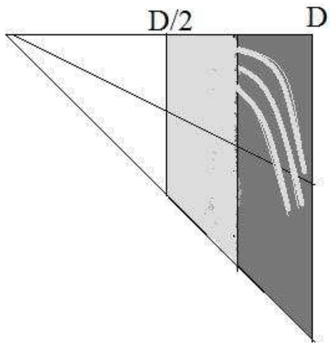
3) Les moirures hyperboliques

- Cas où x est compris entre D / 2 et D – 1. C'est la zone la plus vaste où deux densités (soit 1 soit 2) coexistent. Elle se divise en deux :

◦ Dans sa partie droite, pour x entre 2D / 3 [12] et D – 1, la couleur liée à la densité 1 prédomine, et l'on peut voir par contraste les points de densité 2. Comment ceux-ci sont-ils organisés ? Pour cela cherchons, pour x donné, la première valeur de y (après y = 0 où la densité est toujours 2) pour laquelle la densité vaut 2. Cette valeur y_1 est la longueur du premier groupe de b dans le mot, c'est-à-dire le nombre de b dans un mot court C, soit [x / (D – x)] comme on l'a vu.

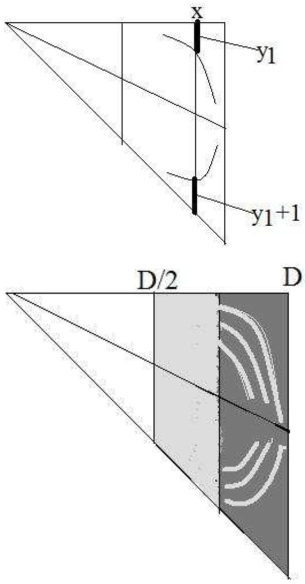
Prenons l'exemple de D = 11, avec x = 9 :
0 9 7 5 3 1 10 8 6 4 2 0
a b b b b a b b b b b
0 0 1 2 3 **4 4** 5 6 7 8 9
la première densité 2 après y = 0 est pour y_1 = 4.

Les premiers points de densité 2 sont tels que y_1 = [x / (D – x)] pour tous les x < D – 1 (car pour x = D – 1, avec le mot ab^{D-1}, il n'existe pas de y_1). Ces points sont donc disposés en gros sur une branche d'hyperbole d'axes vertical x = D et horizontal (y = -1) dont on ne prend que la partie visible avec 3D / 4 < x < D – 1. Comme la plus grande valeur de y_1 est pour x = D – 2, on a toujours y_1< (D – 2) / 2.



Venons-en maintenant aux deuxièmes points (x, y_2) de densité 2, puis aux troisièmes points (x, y_3), etc., sous réserve qu'ils existent, Signalons qu'il y a autant de points de densité 2 que de lettres a dans le mot, soit D – x pour x donné. Comme les mots peuvent être découpés en blocs de la forme ab^k (où k varie au plus d'une unité), les points (x, y_2), (x, y_3), …, se déduisent de (x, y_1) par une affinité verticale, ce qui préserve le caractère hyperbolique des courbes de densité 1.

[12] Pour x = 2D / 3, où existe comme on l'a vu une grande majorité de blocs ab^2, cela signifie qu'il y a en gros autant de points de densité 1 que de points de densité 2. Cette valeur de x = 2D / 3 constitue la frontière entre la zone à sa gauche où la densité 2 domine, et la zone droite où la densité 1 prédomine.



Pour x donné, au lieu de partir du premier point (x, y_1) de densité 1, puis au deuxième, etc., partons maintenant du dernier point (x, y_d). A cause de la symétrie centrale du mot de droite [13], on a toujours $y_d = x - y_1 - 1$. Cela montre qu'il existe une symétrie oblique par rapport à la médiane du triangle, avec la présence d'une forme hyperbolique dans la zone basse, avec une asymptote verticale et une autre diagonale, cette hyperbole se reproduisant ensuite par affinité verticale.

◦ Dans sa partie gauche, pour x compris entre $D / 2$ et $2D / 3$, il s'agit de chercher les points de densité 1. Dans le mot correspondant pour x donné, avec la présence de blocs courts *ab* et longs ab^2, la première valeur de y pour laquelle la densité est 1 se produit dès que le premier *bb* apparaît, c'est-à-dire le premier bloc long.

Comme on l'a fait pour $D < 1/2$ à propos de la rythmique des blocs longs et courts, on trouve de même que pour $D > 1/2$ les blocs C et L correspondent aux montées et descentes dans la récurrence : $u_{n+1} = u_n + D\%(D - x)\ \ [D - x]$.

Prenons par exemple $D = 13$ et $x = 8$. Le mot associé à 8 / 13 pour les mots L et C s'obtient en faisant $u_{n+1} = u_n + 13\%5\ \ [5]$, soit $u_{n+1} = u_n + 3\ \ [5]$:

0 3 1 4 2 0, d'où *CLCLL*. On peut le vérifier en faisant la récurrence

$u_{n+1} = u_n + 8\ \ [13]$: 0 8 3 11 6 1 9 4 12 7 2 10 5 0

<u>*a b*</u> <u>*a b b*</u> <u>*a b*</u> <u>*a b b*</u> <u>*a b b*</u>

0 0 1 1 **2** 3 3 4 4 5 6 6 7 8 (quotient euclidien)

La première fois où l'on a une densité 1 se produit pour $y = 2$. Cela correspond à la présence de la première descente (bloc L) dans le mot *CLCLL*, soit pour 5/3 + 1 =2.

Dans le cas général, la première fois où y prend la densité 1 est pour la première descente dans la suite $u_{n+1} = u_n + D\%(D - x)\ \ [D - x]$, plus précisément pour :

$y_1 = [(D - x) / (D\%(D - x))] + 1$.

Mais avec x compris entre $D / 2$ et $2D / 3$, on a toujours $[D / (D - x)] = 2$ d'où $D\%(D - x) = D - 2(D - x) = 2x - D$, et :

[13] Si l'on enlève à un mot associé à une droite ses deux lettres extrêmes, a à gauche et b à droite, le reste du mot présente une symétrie centrale (on dit qu'il s'agit d'un palindrome). En effet on a toujours $u_i + u_{D-i} = D$ pour $i \geq 1$, puisqu'avancer de N de gauche à droite à partir de 0 revient à reculer de N (ou avancer de $D - N$) de droite à gauche en partant de la fin qui est aussi 0. Quand u_i augmente par passage au suivant, u_{D-i} diminue par passage au précédent (ou augmente par passage au suivant). Une montée à gauche donne par symétrie une montée à droite, et de même pour les descentes. D'où la symétrie du mot de droite.

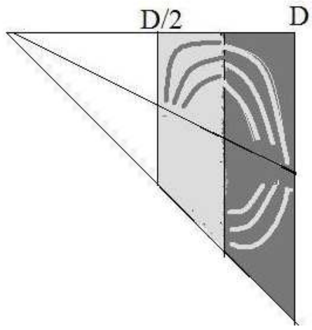
Par exemple pour 7/11 : 0 7 3 10 6 2 9 5 1 8 4 0

0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1

$y_1 = [(D - x) / (2x - D)] + 1$.

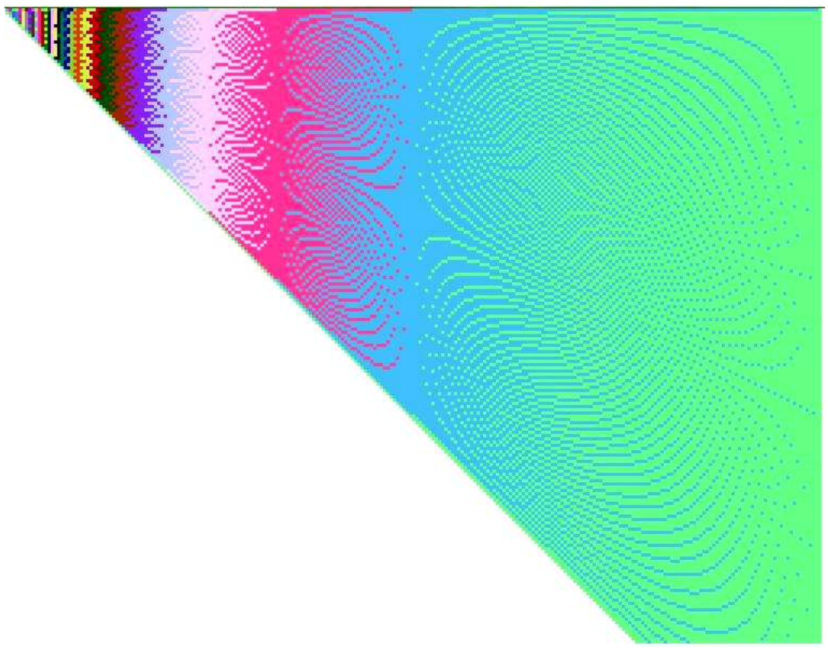
On trouve encore un profil hyperbolique, qui se reproduit ensuite pour les deuxième, troisième, etc., y de densité 1, pour les mêmes raisons que dans la partie droite $[2D / 3, D - 1]$.

Le résultat final est de la forme suivante :



- Cas où x est compris entre 0 et $D / 2$. On a vu qu'une densité est fortement prédominante pour les valeurs de $x = D / (k + 1)$. Ce qui se passe entre $D / 2$ et $D - 1$ se reproduit entre $D /(k + 1)$ et D / k pour $k > 1$. Mais les moirures se développent dans des zones de plus en plus petites, et les motifs hyperboliques perdent peu à peu leur netteté.

Remarque finale : Ce que nous venons de faire avec D supposé premier peut être généralisé à D quelconque. La seule différence est que maintenant certaines fractions x / D ne sont plus irréductibles. Les mots qui leur correspondent sont formés d'une répétition du mot correspondant à la fraction irréductible équivalente. Il y a toujours présence de blocs ab^k ou ab^{k+1}, où k exprime la proportion des lettres b par rapport aux a avec k de la forme $[x / (D - x)]$, que cela soit irréductible ou pas. On observe donc dans le cas général les mêmes phénomènes, et le fait d'augmenter D provoque seulement une plus grande précision dans les détails, avec accentuation et raffinement du phénomène de moiré.



Faisceau de droites pour $D = 253$

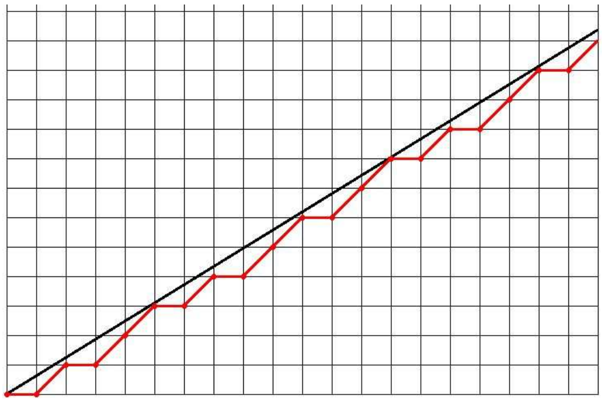
2) Cas d'une pente irrationnelle

Pour avoir le chemin rasant sous une droite de pente irrationnelle θ, passant par l'origine O, d'équation $y = \theta x$, il suffit de prendre les points de coordonnées entières (k, y_k) avec $y_k = [k\theta]$, c'est-à-dire la partie entière de $k\theta$, avec k décrivant l'ensemble $\boldsymbol{N}$ des entiers naturels (on ne prend qu'une demi-droite). On supposera ici que la pente est inférieure à 1 : le cheminement se fait soit par un pas horizontal entre deux points successifs, soit par un pas diagonal.

Associons à ce chemin rasant infini sous la droite le mot binaire à base de lettres 0 et 1 obtenu grâce à la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_n = y_{n+1} - y_n = [(n+1)\theta] - [n\theta]$. Il s'agit de la variation d'ordonnée à chaque pas unité, elle vaut soit 0 soit 1 (pas horizontal ou pas diagonal).

Exemple : droite de pente $\varphi' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ = 0,618…(il s'agit d'un nombre d'or, l'autre étant $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\ldots = \dfrac{1}{\varphi'}$.

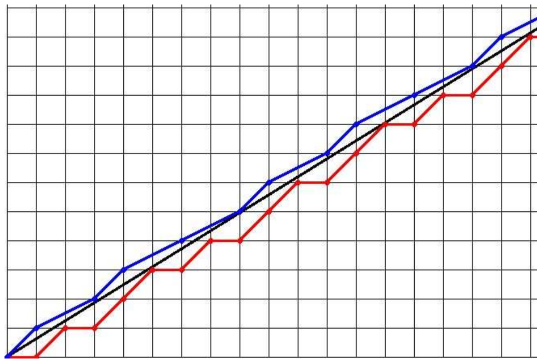
$[k\,\varphi']$: 0 0 1 1 2 3 3 …
u_k : 0 1 0 1 1 0 …



Chemin rasant sous la droite de pente φ'

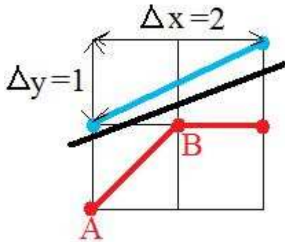
2-a) Propriété du mot associé à la droite

Dans la suite (u_n) associée à la droite de pente θ, le $n^{\text{ème}}$ 1 est en position $[n / \theta]$ pour $n \geq 1$.



Pour le démontrer, intervertissons les axes. L'axe des y devient l'axe des abscisses et l'axe des x celui des ordonnées, la droite a maintenant une pente $1 / \theta$, et l'on va tracer son chemin rasant par « en dessous », c'est-à-dire à sa gauche sur le dessin initial (chemin *en bleu* sur le dessin). Dans le cas présent, chaque point de ce chemin a pour coordonnées $(k, [k / \theta])$. C'est l'*abscisse* y qui varie de 1 à chaque fois, et l'*ordonnée* x varie d'un nombre au moins égal à 1 (puisque la pente est supérieure à 1).

Plus précisément, x varie soit de $[1 / \theta]$ soit de $[1 / \theta] + 1$ (ce qui se note aussi $\lceil 1/\theta \rceil$). Par exemple pour la droite de pente φ' dans le repère initial et de pente $1 / \varphi' = \varphi$ dans le nouveau repère, x varie de 1 ou de 2 à chaque pas, comme on le voit sur le dessin.



Quel que soit le contexte (avec une variation de x égale à 1, 2, 3,…pour le chemin *bleu*) on a toujours la disposition ci-contre : sur le chemin rasant *rouge* correspondant à un pas *bleu*, le premier pas *AB* est toujours diagonal, et ceux d'après horizontaux.

Cette configuration est valable partout sauf au départ en *O*. En effet, comme la pente est irrationnelle, le point *O* est le seul point à coordonnées entières de la droite, et dans ce cas exceptionnel les deux chemins rasants *rouge* et *bleu* passent tous les deux par ce même point. Dans tous les autres cas, deux points de même abscisse x sur les deux chemins sont toujours séparés d'une unité verticalement, ce qui correspond au dessin ci-dessus. On sait que les points rasants du chemin bleu ont leur ordonnée x qui vaut $[k / \theta]$. En revenant au chemin rasant *rouge*, c'est pour chaque valeur de $[k / \theta]$, avec $k \geq 1$, que l'on a un pas diagonal, c'est-à-dire une montée de 1. D'où la propriété annoncée.

Exemple pour la pente φ' :
0 $\underline{1}$ 2 $\underline{3}$ $\underline{4}$ 5 $\underline{6}$ … indices des lettres
0 1 0 1 1 0 1 … mot rasant pour φ'
D'autre part le mot rasant pour $1 / \varphi' = \varphi$ s'obtient en prenant les valeurs de $[k\,\varphi]$. En écrivant ce mot à partir de $k = 1$, on trouve : 1 3 4 6 …, et c'est bien la position des 1 dans le mot rasant de φ' : le premier 1 est en position 1, le deuxième est en position 3, etc.

Nous allons maintenant traiter précisément le cas particulier où la droite a pour pente φ', en montrant la propriété suivante.

2-b) Propriété liée au nombre d'or φ'

A partir de $k = 1$, le mot rasant sous la droite de pente φ' défini par la suite (u_k), n'est autre que la séquence de Fibonacci.

Qu'appelle-t-on séquence de Fibonacci ? Il s'agit du mot binaire infini à partir des deux substitutions 0→1 et 1→10, en démarrant avec 1, ce qui donne la construction progressive du mot : 1→10→101→10110→10110101→1011010110110→ …. Le mot infini final reste invariant sous l'effet des deux substitutions.[14]

Prenons maintenant le mot rasant sous la droite de pente φ' créé par la suite (u_k) :
0$\underline{1011010110110\ldots}$ Si l'on supprime le 0 initial, on retrouve bel et bien la séquence de Fibonacci.

[14] Lors de cette construction par étapes, le mot m_k à l'étape k est transformé en mot m_{k+1} dont le début est encore m_k, ce qui provoque la convergence vers un mot infini restant invariant. Si les débuts sont préservés c'est parce que l'on part de 1 et que la substitution 1→10 préserve le 1 comme début.

Pour démontrer cette propriété, prenons le mot infini formé des termes de la suite (u_k) avec $k \geq 1$. Il suffit de montrer que tout début de longueur finie de ce mot donne encore un début de ce même mot après avoir appliqué les règles de substitution 0→1 et 1→10, le mot ne pouvant alors qu'être la séquence de Fibonacci.

Introduisons d'abord la suite $t_n = [(n+1)\ \varphi']$ pour $n \geq 1$. Cette suite commence par t_1 = 1, et l'on a aussi u_1 =1. Elle augmente de 1 chaque fois que l'on a une montée de 1 dans la suite (u_n). Ainsi le terme t_k donne le nombre de 1 dans la suite (u_n) de u_1 jusqu'à u_k y compris. Vérifions-le sur l'exemple suivant :

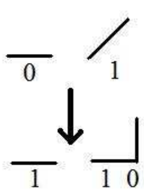
1 2 3 4 5 6 7 8 9 indice des lettres
$\underline{1}$ 0 $\underline{1}$ $\underline{1}$ 0 $\underline{1}$ 0 $\underline{1}$ $\underline{1}$ mot rasant avec la suite (u_n)
1 1 2 3 3 4 4 5 6 suite (t_n)
On a bien t_9 = 6 qui est le nombre de 1 dans la suite (u_n) de u_1 jusqu'à u_9.

Prenons maintenant un début de longueur k du mot rasant : $u_1\ u_2\ u_3\ \dots u_{k-1}\ u_k$. Les termes de u_1 jusqu'à u_{k-1}, au nombre de $k - 1$, comptent $[k\ \varphi']$ lettres 1 et $k - 1 - [k\ \varphi']$ lettres 0. Puis procédons aux substitutions 0→1 et 1→10, La longueur $k - 1$ des éléments précédent u_k augmente pour donner une longueur $2[k\ \varphi'] + k - 1 - [k\ \varphi'] = [k\ \varphi'] + k - 1$. Que u_k soit 0 ou 1, après substitution ce terme commence par 1. Ce 1 est donc en position $[k\ \varphi'] + k = [k\ \varphi' + k] = [k\ (\varphi' + 1)] = [k\ \varphi]$.

Ainsi, lors de la transformation de la suite (u_n) sous l'effet des substitutions, quel que soit le début qu'on prenne, les 1 sont tous en position $[k\ \varphi]$ et les 0 prennent les autres places. Cela correspond, comme on l'a vu, aux positions des 1 et des 0 dans la suite (u_n). Celle-ci reste bien invariante par passage au successeur. Et on retrouve ce qui est la propriété caractéristique de la séquence de Fibonacci.

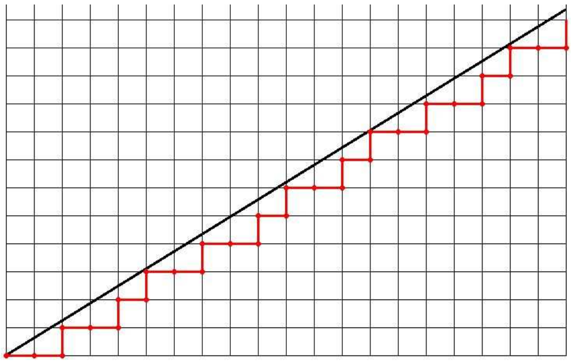
2-c) Chemin rasant en marches d'escalier sous la droite de pente φ'

Reprenons la (demi-)droite de pente φ' et passant par O. On a vu que le chemin rasant par en-dessous, à base de pas horizontaux notés 0 et diagonaux notés 1, donne un mot qui n'est autre que la séquence de Fibonacci à partir du pas numéro 1, et le pas numéro 0 est 0. En remplaçant chaque pas diagonal par un pas horizontal suivi d'un pas vertical, on obtient le chemin en marches d'escalier rasant par en-dessous.



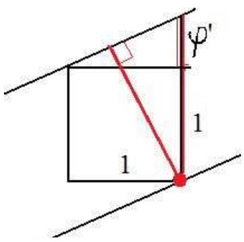
Notons maintenant 1 un pas horizontal et 0 un pas vertical. Le pas horizontal qui était noté 0 devient 1, et le pas diagonal qui était noté 1 devient 10. Le passage du chemin diagonal au chemin en marches d'escalier revient à faire les substitutions 0→1 et 1→10, qui laissent invariante la séquence de Fibonacci.

Le chemin rasant en marches d'escalier, noté avec des 1 pour les pas horizontaux et 0 pour les pas verticaux, est toujours la séquence de Fibonacci à partir du rang 1, et le pas numéro 0 vaut 1.



2-d) Projection des points rasants sur la droite de pente φ' et pavage de Fibonacci

Considérons les points rasants (à coordonnées entières) du chemin en marches d'escalier. Ils sont tels que le carré de la grille dont ils sont le sommet sud-est coupent la droite de pente φ'. On peut vérifier qu'ils sont tous situés dans une bande délimitée par la droite et par une droite parallèle placée à une distance verticale égale à φ.



En effet prenons un point en position extrême. Le carré de côté unité dont il est le sommet sud-est touche la droite en son sommet nord-ouest. La distance verticale entre le point et la droite de pente φ' vaut 1 + φ'= φ. Tous les points du chemin rasant sont disposés dans la bande entre la droite et celle qui lui est parallèle et décalée verticalement de φ. En appelant α l'angle de la droite avec l'axe des x, on a tan α = φ', et aussi :

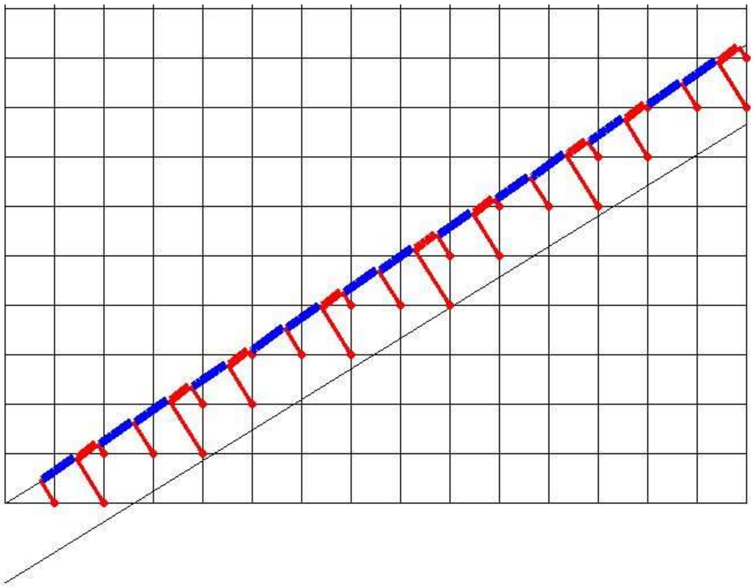
$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}}$. La largeur de la bande est $\dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi'^2}}$

Projetons ces points sur la droite, sans prendre le point de départ O.

Un pas horizontal devient sur la droite un pas de longueur $P = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}}$

et un pas vertical devient un pas de longueur $p = \dfrac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}$

Ces deux types de pas, un long et un court, partitionnent la droite en suivant la rythmique de la séquence de Fibonacci. La lettre 1 devient un pavé long (*en bleu* sur le dessin ci-dessous) et une lettre 0 devient un pavé court (*en rouge*). On peut appeler cela un pavage de Fibonacci.



Pavage de la droite avec deux types de pavés