Géométrie inversive et transformations de Mobius

Nous poursuivons notre étude du groupe circulaire, formé des composées d'inversions-réflexions planes qui transforment les cercles-droites en cercles-droites. Parmi elles vont apparaître les transformations de Mobius, qui sont l'objet de ce chapitre.

1. Définition d'une transformation de Mobius

Par définition, une transformation de Mobius[1] M de $\hat{C}$ dans $\hat{C}$ fait passer de z à $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec a, b, c, d donnés dans C et $ad - bc \neq 0$. Ce à quoi on ajoute $M(-d / c) = \infty$ et $M(\infty) = a / c$, et si $c = 0$, $M(\infty) = \infty$.

Remarquons qu'une transformation de Mobius ne change pas si l'on multiplie tous ses coefficients par un même nombre non nul. On peut notamment s'arranger pour que $a\,d - b\,c = 1$,[2] on dit qu'il s'agit de la forme normalisée de la transformation.

Il est possible d'associer à une transformation de Mobius la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le déterminant $a\,d - b\,c$ est non nul, donc inversible. On vérifie aisément que la matrice inverse $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ correspond à la transformation de Mobius inverse M^{-1}, et que la composée de deux transformations de Mobius a pour matrice associée le produit des deux matrices.

Exercice 1 : Parties réelle et imaginaire de M(z)

Considérons l'application faisant passer de z à z' telle que $z' = (az + b) / (cz + d)$ avec a, b, c, d réels et $ad - bc = 1$. Montrer que $\mathrm{Im}(z') = \mathrm{Im}(z) / |cz + d|^2$, et calculer aussi $\mathrm{Re}(z')$.

On connaît la formule $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$. Appliquons cela à z' :

$$2\,\mathrm{Re}(z') = \frac{az+b}{cz+d} + \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)+(a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2}$$

$$= \frac{2ac\,|z|^2 + 2(ad+bc)\,\mathrm{Re}(z) + 2bd}{|cz+d|^2}$$

---

[1] On l'appelle aussi homographie, ou transformation homographique.

[2] A partir d'une transformation de Mobius de la forme $M(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ avec $a'd' - b'c' \neq 0$, on peut diviser ses coefficients par $\sqrt{a'd'-b'c'}$, ce qui donne $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $a\,d - b\,c = 1$. Précisons aussi que l'écriture $\sqrt{Z}$ correspond à l'une des deux racines carrées complexes de Z. Remarquons par ailleurs que si la matrice inverse est $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ on peut prendre plus simplement la transformation de Mobius inverse $M^{-1}(z) = \dfrac{d\,z-b}{-c\,z+a}$

D’où $\mathrm{Re}(z') = \dfrac{ac\,|z|^2 + (ad+bc)\,\mathrm{Re}(z) + bd}{|cz+d|^2}$

On connaît aussi la formule $z - \bar{z} = 2i\ \mathrm{Im}(z)$. Appliquons cela à z’ :

$$2i\ \mathrm{Im}(z') = z' - \overline{z'} = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)-(a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} = \frac{z-\bar{z}}{|cz+d|^2} = \frac{2i\ \mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

$\mathrm{Im}(z') = \dfrac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ puisqu’on a supposé $a\,d - b\,c = 1$.

Il existe un lien organique entre les transformations inversives (les composées d’inversions-réflexions) et les transformations de Mobius. Vérifions en effet qu’une transformation de Mobius est une transformation inversive :

- Lorsque $c = 0$, une transformation de Mobius devient une fonction linéaire, et c’est bien une transformation inversive.
- Lorsque $c \neq 0$, une transformation de Mobius peut se réécrire : $M(z) = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c}\,\dfrac{1}{cz+d}$. Elle est alors la composée de trois transformations :

$$z \xrightarrow{f_1} z_1 = cz+d \xrightarrow{f_2} z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{cz+d} \xrightarrow{f_3} z_3 = -\frac{ad-bc}{c} z_2 + \frac{a}{c} = M(z)$$

$$f_1(\infty) = \infty \qquad f_2(0) = \infty,\ f_2(\infty) = 0 \qquad f_3(\infty) = \infty$$

On a aussi $M(\infty) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(\infty) = a/c$ et $M(-d/c) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(-d/c) = \infty$

f_1 et f_3 sont des transformations linéaires, f_2 est la transformation inverse, ce sont des transformations inversives, et leur composée est bien une transformation inversive. On constate aussi que f_1, f_2 et f_3 sont des transformations qui conservent les angles orientés, d’où le résultat :

Les transformations de Mobius conservent les angles orientés, et elles transforment les cercles généralisés en cercles généralisés.

De simples calculs permettent de voir que la composée de deux transformations de Mobius est une transformation de Mobius, et qu’une transformation de Mobius admet une transformation de Mobius inverse. L’ensemble des transformations de Mobius forme un groupe (pour la composition des fonctions). Cela dit, on connaît des transformations inversives qui transforment les angles en leurs opposés, à savoir les inversions. Les transformations inversives ne sont pas toutes des transformations de Mobius.

Nous allons maintenant voir qu’une inversion s’écrit toujours sous la forme $M(\bar{z})$, c’est-à-dire comme composée de la fonction conjuguée γ et d’une transformation de Mobius, soit $M \circ \gamma$.

- Si l’inversion se fait par rapport à une droite (réflexion élargie), elle est de la forme :

$$z \mapsto z' = a\,\bar{z} + b = \frac{a\,\bar{z}+b}{0\,\bar{z}+1} = M(\bar{z}).$$

- Si l’inversion se fait par rapport à un cercle de centre I et de rayon R, elle s’écrit :

$$z \mapsto z' = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{z}_I} + z_I = \frac{z_I\,\bar{z} + (R^2 - z_I\,\bar{z}_I)}{\bar{z}-\bar{z}_I} = M(\bar{z})$$

Une inversion peut ainsi s'écrire comme la composée d'une transformation de Mobius et de la fonction conjuguée.

Composons maintenant deux inversions, ce qui donne :
$z' = M_2(\overline{M_1(\overline{z})}) = M_2(\frac{\overline{a}\,z+\overline{b}}{\overline{c}\,z+\overline{d}}) = M_2(M'_1(z))$ avec $M'_1(z) = \frac{\overline{a}\,z+\overline{b}}{\overline{c}\,z+d}$ qui est une transformation de Mobius. Le produit $M_2 \circ M'_1$ étant une transformation de Mobius, le produit de deux inversions en est une aussi.

Prenons enfin une transformation inversive quelconque, qui s'écrit par définition comme produit d'inversions, soiti $f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_2 \circ f_1$. Si n est pair, on les regroupe deux par deux, et l'on obtient un produit de transformations de Mobius, qui est une transformation de Mobius. Si n est impair, le produit peut s'écrire
$f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_2 \circ f_1 \circ \gamma \circ \gamma = (f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_2 \circ f_1 \circ \gamma) \circ \gamma$ où γ est la fonction conjuguée $\gamma(z) = \overline{z}$ qui est une inversion (réflexion). Le produit entre parenthèses forme un nombre pair d'inversions, qui est, comme on l'a vu, une transformation de Mobius, soit M. Celle-ci, composée avec γ, donne $M(\overline{z})$.

On trouve finalement le résultat suivant :

Toute transformation inversive f (composée d'inversions-réflexions) dans $\hat{C}$ s'écrit $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ ou $f(z) = \frac{a\,\overline{z}+b}{c\,\overline{z}+d}$ avec a, b, c, d dans $\boldsymbol{C}$ et $ad - bc \neq 0$.

Le groupe des transformations inversives contient comme sous-groupe le groupe des transformations de Mobius $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$, et celle-ci conservent les angles orientés –on les appelle transformations inversives directes. Les autres transformations inversives $f(z) = \frac{a\,\overline{z}+b}{c\,\overline{z}+d}$ sont celles qui transforment les angles orientés en leurs opposés –ce sont les transformations indirectes.

Les transformations inversives transforment les cercles généralisés en cercles généralisés.

Exercice 2 : Fonction inverse d'une transformation inversive indirecte

Considérons la transformation inversive indirecte f telle que $z \mapsto z' = \frac{a\,\overline{z}+b}{c\,\overline{z}+d}$ *avec* $a\,d - b\,c = 1$*. Déterminer la transformation inverse* f^{-1}*.*

Prenons la transformation de Mobius (directe) M telle que $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a\,d - b\,c = 1$. On a alors $f = M \circ \gamma$ avec $\gamma(z) = \overline{z}$, et $f^{-1} = \gamma \circ M^{-1}$:

$$z \xrightarrow{M^{-1}} z_1 = \frac{d\,z-b}{-c\,z+a} \xrightarrow{\gamma} z' = \frac{\overline{d\,z-b}}{\overline{-c\,z+a}} = \frac{\overline{d}\;\overline{z}-\overline{b}}{-\overline{c}\;\overline{z}+\overline{a}}.$$

Il s'agit de la transformation de Mobius indirecte dont la matrice a pour coefficients les conjugués de la matrice M^{-1}.

Mais les transformations inversives indirectes ne forment pas pour autant un groupe, puisque la composée de deux d'entre elles est directe.

Exercice 3 : A partir d'un cercle donné et d'une transformation de Mobius donnée, détermination des caractéristiques du cercle transformé

Un cercle C de centre I et de rayon R étant donné, ainsi qu'une transformation de Mobius M de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *avec ad – bc = 1, on supposera que le transformé du cercle est un cercle et non une droie. Déterminer son centre I' et son rayon R'.*

Pour cela utiliser la propriété suivante : si deux points M et M' sont inverses dans l'inversion de cercle C, et qu'on leur applique une transformation de Mobius M, alors M(z) et M(z') sont inverses dans l'inversion de cercle C' = M(C).

Prendre le point I' et son inverse dans l'inversion de cercle C' dont le centre est I' et le rayon R', puis pratiquer la transformation M^{-1} *pour trouver finalement le point I'.*

Appelons *C'* le cercle image du cercle *C* par la transformation de Mobius *M*. Nous voulons connaître son centre *I'* et son rayon *R'*. Faisons l'inversion de cercle *C'* : les points *I'* (d'affixe $z_{I'}$) et ∞ sont inverses. Par la transformation de Mobius M^{-1}, de matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ces deux points deviennent les points d'affixe $z_0 = M^{-1}(z_{I'})$ et $-d/c$. Ces points sont inverses dans l'inversion de cercle *C* (centre *I* et rayon *R*). Grâce à la formule de l'inversion, on en déduit que $z_0 = z_I + \dfrac{R^2}{-\bar{d}/\bar{c} - \bar{z}_I}$. Ainsi le point z_0 est connu. On en déduit que $z_{I'} = M(z_0)$, ce qui donne le point *I'* (*figure 1*).

Pour trouver le rayon *R'*, il suffit de prendre par exemple le point $z_I + R$ qui est sur le cercle *C*, son transformé $M(z_I+R)$ est sur le cercle *C'*. Le rayon *R'* est la distance séparant ce point du centre *I'*.

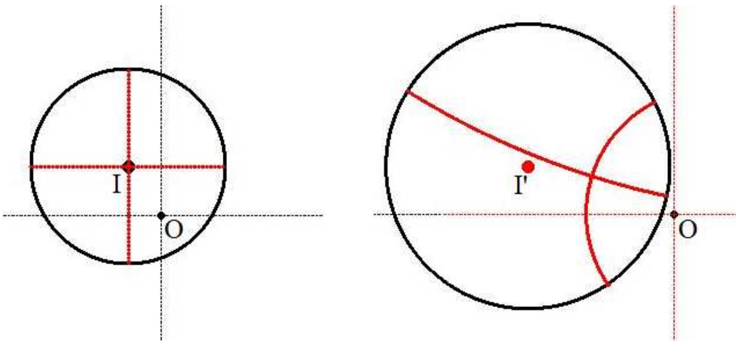


Figure 1 : *A gauche* un cercle *C*, *à droite* son image *C'* par une transformation de Mobius, avec son centre *I'* calculé par la formule indiquée. *En rouge*, deux rayons orthogonaux du cercle *C* sont transformés en arcs de cercle orthogonaux entre eux et avec le cercle *C'*.

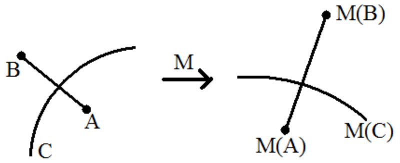
2. Propriétés des transformations de Mobius

2.1. Isomorphisme du groupe de transformations de Mobius et de PSL(2,C)

On appelle *SL*(2, *C*) le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec *a*, *b*, *c*, *d* complexes et $a\,d - b\,c = 1$. A chaque matrice peut être associée une transformation de Mobius écrite sous sa forme normalisée. Mais les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ donnent la même transformation de Mobius normalisée. On appelle alors $PSL(2, C)$ le groupe des matrices de $SL(2, C)$ au signe près, soit $PSL(2, C) = SL(2, C) / (\pm Id)$. Il y a alors bijection (un-un) entre les matrices de $PSL(2, C)$ et les transformations de Mobius. Et comme la multiplication des matrices revient à la composition des transformations de Mobius, il y a isomorphisme entre leurs groupes. On peut assimiler le groupe des transformations de Mobius avec $PSL(2, C)$.

Nous allons maintenant voir les propriétés des transformations de Mobius, et d'abord le principe de symétrie, déjà rencontré pour les inversions.

2.2 Le principe de symétrie : conservation de deux points inverses par une transformation de Mobius



Lorsque deux points sont inverses par rapport à un cercle, et qu'on leur applique une transformation de Mobius, les images de ces deux points sont à leur tour inverses par rapport au cercle image.[3]

Considérons un cercle (C) avec deux points A et B inverses par rapport à ce cercle. Le cercle (C) est un cercle du faisceau de cercles à points limites A et B. Le faisceau orthogonal est formé des cercles passaant par A et B. Prenons deux de ces cercles passant par A et B (*figure 2*). Ils sont orthogonaux au cercle (C). Sous l'effet d'une transformation de Mobius, le cercle (C) devient un cercle (C'), les points A et B deviennent les points A' et B'par lesquels passent les deux cercles images qui sont encore orthogonaux au cercle (C'). Ce cercle (C') appartient au faisceau de cercles à points limites A' et B'. Ces deux points sont donc inverses par rapport au cercle (C')

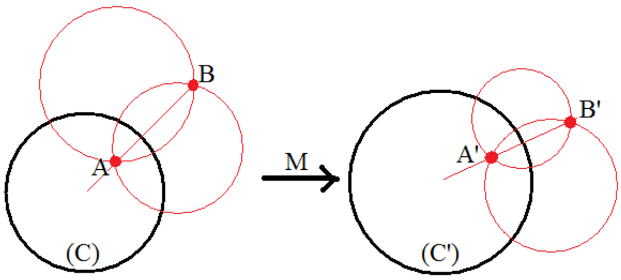


Figure 2 : Conservation de points inverses par une transformation de Mobius.

2.3. Propriété fondamentale des transformations de Mobius

Etant donnés un triplet de trois points a, b, c et un autre triplet de trois points a', b', c', il existe une transformation de Mobius unique qui fait passer du premier triplet au second.

Pour le prouver, commençons par trouver une transformation de Mobius faisant passer des trois points a, b, c, aux trois points a', b', c' respectivement. Pour cela utilisons comme intermédiaires les trois points 0, 1, ∞.

- Cherchons une transformation de Mobius M_1 faisant passer de a, b, c à 0, 1, ∞. Elle est de la

forme $M_1(z) = K\dfrac{z-a}{z-c}$ avec K tel que $M(b) = 1$, soit $K = \dfrac{b-c}{b-a}$. On a trouvé

[3] Rappelons que le principe de symétrie vaut aussi pour les inversions.

$M_1(z) = \dfrac{z-a}{z-c}\,\dfrac{b-c}{b-a}$ et cette transformation est unique.

- De même la transformation M_2 faisant passer de *a'*, *b'*, *c'* à 0, 1, ∞ s'écrit
$M_2(z) = \dfrac{z-a'}{z-c'}\,\dfrac{b'-c'}{b'-a'}$

- Formons $M_2^{-1} \circ M_1$. Cette transformation de Mobius fait bien passer de *a*, *b*, *c* à *a'*, *b'*, *c'*. Mais cela ne prouve pas qu'elle est unique, du fait que l'on est passé par un intermédiaire bien précis, à savoir 0, 1, ∞.

- Supposons maintenant qu'il existe deux transformations de Mobius *M* et *M'* faisant passer de *a*, *b*, *c* à *a'*, *b'*, *c'*. Alors $M_2 \circ M \circ M_1^{-1}$ envoie 0, 1, ∞ en 0, 1, ∞, et $M_2 \circ M' \circ M_1^{-1}$ de même.

Considérons une transformation de Mobius *N* telle que 0, 1, ∞ soient envoyés sur eux-mêmes. Elle est de la forme $\dfrac{az+b}{cz+d}$. Avec $N(\infty) = \infty$, cela impose $c = 0$, et $N(0) = 0$ donne $b/d = 0$, d'où $b = 0$, et $N(z) = (a/d)\, z$. Avec $N(1) = 1$, on en déduit $a = d$. Finalement $N(z) = z$. On trouve l'identité *I* comme seule possibilité.

Il en découle que $M_2 \circ M \circ M_1^{-1} = I$ et $M_2 \circ M' \circ M_1^{-1} = I$, d'où $M_2 \circ M \circ M_1^{-1} = M_2 \circ M' \circ M_1^{-1}$, et $M = M'$. On a bien une transformation unique.

- Ce que nous venons de faire peut se traduire en termes de birapport. Rappelons qu'une définition du birapport de quatre points d'affixes *A*, *B*, *C*, *D* est

$$[ABCD] = \frac{C-A}{C-B} \div \frac{D-A}{D-B} = \frac{C-A}{C-B} \times \frac{D-B}{D-A}$$

Dans le cas présent, on a vu que $(M_2 \circ M)(z) = M_1(z)$. En posant $z' = M(z)$, cela s'écrit :

$M_2(z') = M_1(z)$, soit $\dfrac{z'-a'}{z'-c'}\,\dfrac{b'-c'}{b'-a'} = \dfrac{z-a}{z-c}\,\dfrac{b-c}{b-a}$, ou encore [*a' c' z' b'*] = [*a c z b*].[4] D'où ce résultat :

Une transformation de Mobius conserve le birapport de quatre points

2.4. Résumé des principales propriétés des transformations de Mobius

Les transformations de Mobius *M*, ou transformations homographiques, de la forme $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $a\,d - b\,c \neq 0$, ou encore $a\,d - b\,c = 1$ sous leur forme normalisée, ont les propriétés suivantes :
- elles possèdent le caractère circulaire : elles transforment les cercles-droites en cercles-droites.
- elles sont des transformations conformes : elles conservent les angles orientés.
- elles conservent le birapport.
- elles obéissent au principe de symétrie : elles conservent deux points symétriques-inverses.
- il existe une transformation de Mobius unique transformant trois points en trois points.

[4] Il existe 24 façons d'ordonner les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* dans l'écriture du birapport. Les 24 birapports correspondants sont tous liées les uns aux autres . Par exemple [*a c z b*] = 1 – [*z a b c*] (il suffit de faire le calcul). L'égalité des birapports [*a' c' z' b'*] = [*a c z b*] vaut aussi bien pour [*z' a' b' c'*] = [*z a b c*], ainsi que pour les autres ordres possibles.

Il en découle que les autres transformations inversives *M'*, celles de la forme $M'(z) = \dfrac{a\,\overline{z} + b}{c\,\overline{z} + d}$ avec $a\,d - b\,c \neq 0$, ont des propriétés du même type, sauf qu'elles transforment les angles orientés en leurs opposés, et qu'elle transforment le birapport en son conjugué (*voir exercice suivant*).

Exercice 4 : Birapport et transformations inversives indirectes

1) On considère la transformation conjuguée γ telle que $\gamma(z) = \overline{z}$ *. Montrer qu'elle transforme le birapport en son conjugué.*

La transformation conjuguée telle que z' = $\overline{z}$ est la transformation inversive indirecte qui laisse l'axe des *x* invariant point par point. Elle peut être caractérisée par les trois points 0, 1, ∞ transformés en eux-mêmes. Prenons les birapports :

$[0\,\infty\,z\,1] = \dfrac{z}{z-\infty} \div \dfrac{1}{1-\infty} = z\dfrac{1-\infty}{z-\infty} = z$ et $[0\,\infty\,z'\,1] = \dfrac{z'}{z'-\infty} \div \dfrac{1}{1-\infty} = z'\dfrac{1-\infty}{z-\infty} = z' = \overline{z}$

On trouve bien $[0\,\infty\,z'\,1] = \overline{[0\,\infty\,z\,1]}$

2) En déduire que les transformations inversives indirectes transforment le birapport en son conjugué.

On sait qu'une telle transformation peut toujours s'écrire $M \circ \gamma$ avec la transformation de Mobius *M* qui conserve le birapport et *γ* qui le transforme en son conjugué. Le birapport de la transformation indirecte est donc transformé en son conjugué.

2.5. Groupe *Aut*($\hat{C}$) des automorphismes de $\hat{C}$

On appelle automorphisme de $\hat{C}$ une bijection conforme de $\hat{C}$. Le groupe formé par ces automorphismes est noté Aut($\hat{C}$). On a vu que les transformations de Mobius de $\hat{C}$ sont des automorphismes de $\hat{C}$. Il a aussi été démontré (nous l'admettons ici) que toute bijection conforme de $\hat{C}$ est une transformation de Mobius. Finalement, le groupe Aut($\hat{C}$). des automorphismes de $\hat{C}$ est isomorphe au groupe PSL(2, $\hat{C}$).

3. Points fixes et classification des transformations de Mobius

3.1. Points fixes d'une transformation de Mobius

Prenons une transformation de Mobius écrite sous sa forme normalisée, soit

$M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $a\,d - b\,c = 1$.

Cherchons ses points fixes *z*, tels que $M(z) = z$, soit $z(cz+d) = az+b$,

$cz^2 + (d-a)z - b = 0$

- Pour $c \neq 0$, le discriminant est $(d + a)^2 - 4$, où l'on a utilisé le fait que $a\,d - b\,c = 1$. L'équation a deux solutions complexes $\dfrac{a - d \pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c}$ avec une racine double pour $a + d = \pm 2$. Rappelons que cette formule n'est valable qu'avec l'écriture normalisée de *M* : $a\,d - b\,c = 1$.

- Pour $c = 0$, on a $a\,d = 1$, ni *a* ni *d* ne sont nuls, et la transformation de Mobius devient $M(z) = (a/d)\,z + b/d$. Il s'agit d'une similitude directe. Si $a \neq d$, ou $a\,/\,d \neq 1$, on a une similitude à centre, avec un point fixe fini, et aussi un deuxième point fixe en ∞. Si $a = d$, $M(z) = z + b/d$. Si $b \neq 0$, il s'agit d'une translation dont le seul point fixe est en ∞, et si $b = 0$, $M(z) = z$ et tous les points sont fixes.

Remarquons que si une transformation de Mobius admet trois points fixes, elle est unique et ne peut être que l'identité.

3.2. Transformations elliptiques, hyperboliques et loxodromiques

Nous supposons ici que la transformation admet deux points fixes distincts, notés $f+$ et $f-$. Considérons le faisceau de cercles (C_1) à points de base $f+$ et $f-$ (les cercles passent par ces deux points), et le faisceau de cercles (C_2) orthogonal, ayant comme points limites $f+$ et $f-$. Puis soumettons-les à une transformation de Mobius F qui envoie le point $f+$ en 0 et le point $f-$ en ∞. Les cercles (C_1) deviennent des droites (D'_1) passant par 0, et les cercles (C_2) deviennent des cercles (C'_2) orthognaux aux droites, c'est-à-dire qu'ils ont tous pour centre 0 et qu'ils sont tous concentriques. Remarquons aussi que si deux cercles (C_1) font un certain angle entre eux en $f+$, les droites images qui leur correspondent font aussi le même angle entre elles. La transformation F la plus simple peut s' écrire

$$F(z) = \frac{z - f_+}{z - f_-}$$

Faisons maintenant agir une transformation de Mobius M : un point z est transformé en z', avec $z' = M(z)$. Sous l'effet de F, ces deux points sont transformés en Z et Z' avec $Z = F(z)$ et $Z' = F(z')$. Mais comment ces deux points Z et Z' sont-ils liés ? Il s'agit de profiter de la figure simple faite de droites et de cercles concentriques où sont placés ces points Z et Z'. On a $Z' = F(z') = F(M(z)) = F(M(F^{-1}(Z)))$. Appelons M' la composée des ces transformations qui est aussi une transformation de Mobius, soit

$Z' = M'(Z)$ avec $M' = F \circ M \circ F^{-1}$

D'autre part, M' admet comme points fixes 0 et ∞. Il s'agit donc d'une similitude à centre 0, de la forme $M'(Z') = \mu Z$, où μ est un nombre complexe de la forme $r\,e^{i\theta}$ (avec $r \neq 0$). Trois cas vont alors se présenter.

3.2.1. Transformation elliptique

$\mu = e^{i\theta}$, et M' est une rotation d'angle θ et de centre 0. Cela signifie qu'avec Z situé à l'intersection d'un cercle (C'_2) et d'une droite (D'_1), $Z' = M'(Z)$ se trouve sur le même cercle et sur une droite de la famille (D'_1) faisant un angle θ avec la précédente. En revenant à la figure initiale par le biais de F^{-1}, avec z se trouvant à l'intersection de deux cercles (C_1) et (C_2), z' se trouve sur le même cercle (C_2) et sur un cercle (C_1) faisant l'angle θ en $f+$ avec l'autre cercle (C_1) (*figure 3*)[5]. Sous l'effet de M, on assiste à un phénomène tourbillonnaire autour de $f+$ et aussi autour de $f-$. Les cercles du faisceau à points limites $f+$ et $f-$ restent globalement invariants, et forment des sortes de « lignes de courant ». On dit alors que la transformation M est elliptique.

[5] Si l'angle θ est de la forme $2\pi/n$ ou encore $(m/n)2\pi$ (avec m et n entiers naturels), le mouvement est périodique, avec $M^n(z) = z$, sinon il ne l'est pas.

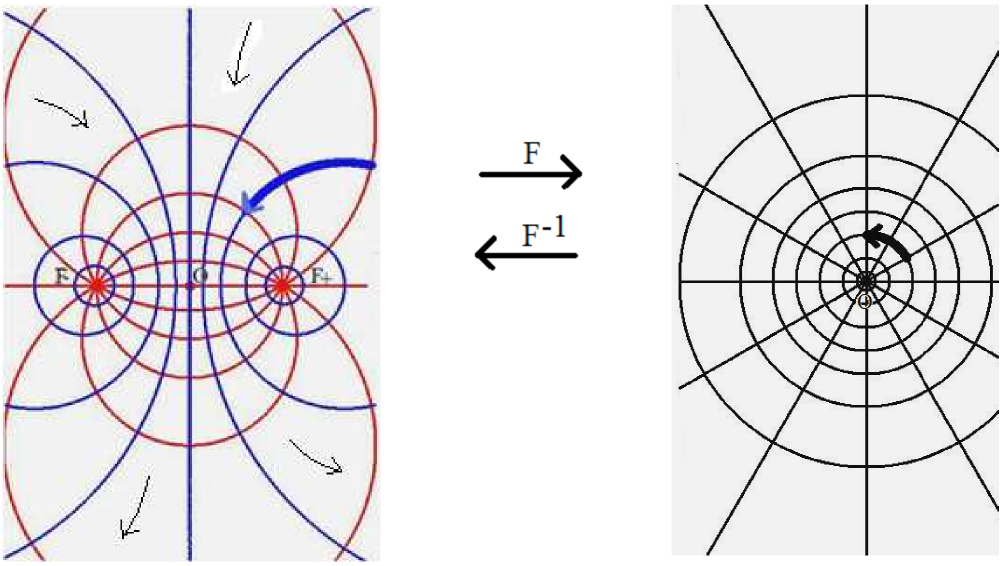


Figure 3 : Résultat obtenu pour $\theta = \pi/3$, avec les points fixes F+ et F- , *à gauche*. Le passage de Z à Z' est indiqué *à droite* par une flèche *en noir*, et celui qui lui correpond *à gauche*, de z à z', est indiqué par une flèche *en bleu*. Les points fixes de la transformation elliptique jouent le rôle de tourbillons.

On sait qu'une rotation de centre O et d'angle θ peut toujours s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes passant par O, avec entre elles un angle $\theta/2$ (et cela d'une infinité de façons). C'est le cas de M'. Grâce au principe de symétrie, par le biais de la transformation de Mobius F^{-1}, la transformation M est la composée de deux inversions dont les cercles font aussi entre eux un angle de $\theta/2$ en f+ et f– (*figure 4*).

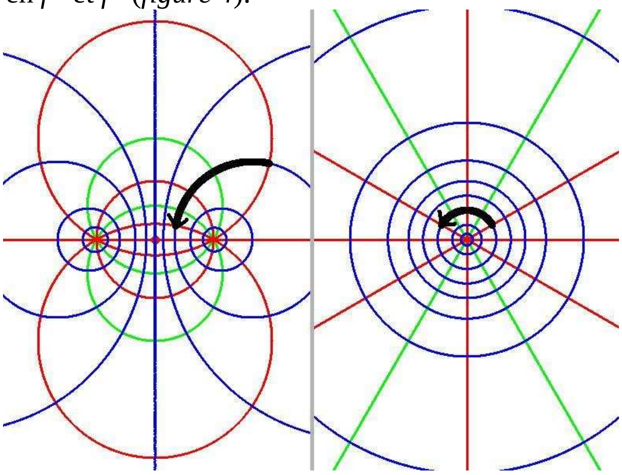


Figure 4 : *A droite* la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$ revient à composer deux réflexions autour de deux droites séparées par un angle de $\pi/3$ (*en vert*). *A gauche* la transformation de Mobius M est la composée de deux inversions dont les cercles (*en vert*) sont dans le faisceau à points de base f+ et f–, faisant en ce point un angle de $\pi/3$.

3.2.2. Transformation hyperbolique

$\mu = r$ réel positif $\neq 1$, et M' est une homothétie positive de centre 0 et de rapport r. Le passage de Z à Z' se fait suivant une droite passant par 0, et il est délimité par deux cercles (C'_2). Le passage de z à z' se fait suivant un arc de cercle de (C_1) et entre les deux cercles (C_2) transformés des deux cercles (C'_2) par F^{-1}.

Lorsque r est supérieur à 1, il se produit un phénomène d'expansion, avec la tendance à s'éloigner de f+ (associé à μ) et de se rapprocher de f–. On dit que f+ est une source (ou point repousseur), et f–

un puits (ou point attracteur). Lorsque r est entre 0 et 1, il se produit une attraction vers $f+$, qui joue le rôle de puits et $f–$ de source. Les cercles du fasceau à points de base $f+$ et $f–$ restent globalement invariants. On dit que la transformation est hyperbolique (*figure 5*).

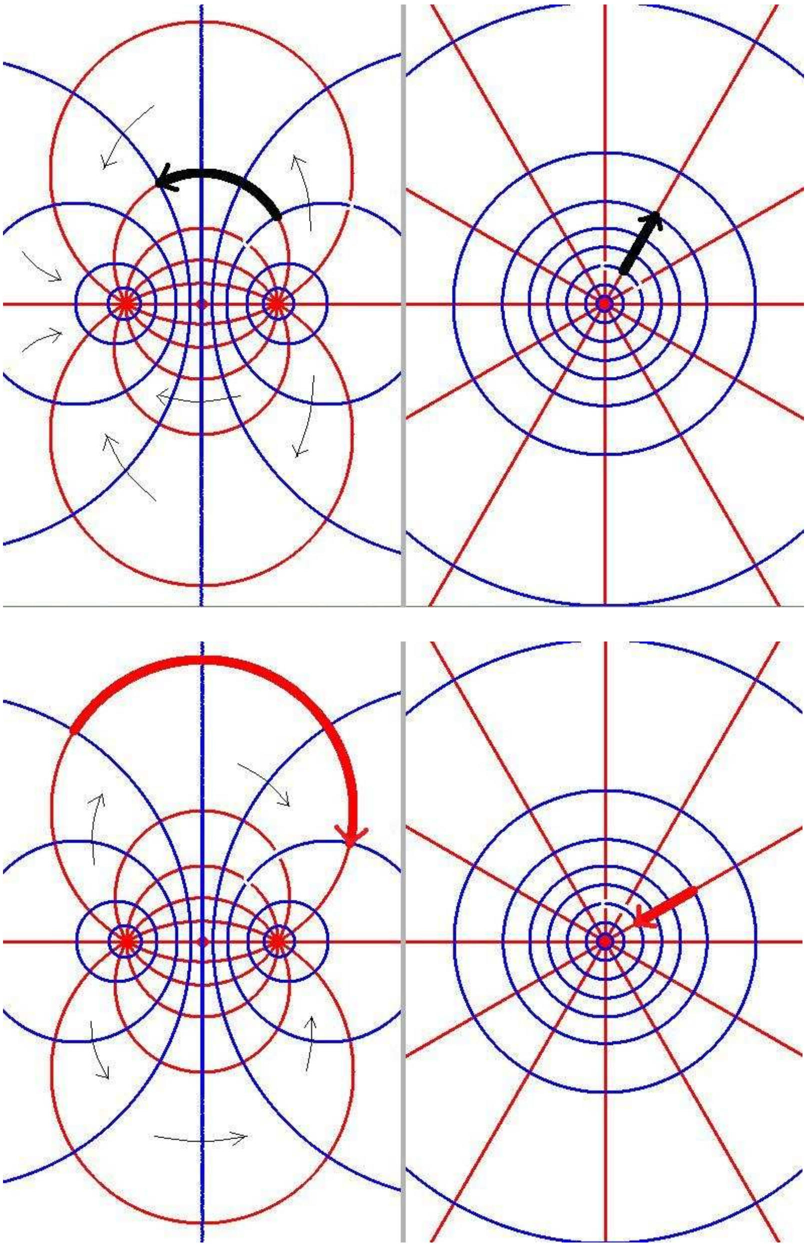


Figure 5 : Transformations hyperboliques, les points fixes étant l'un une source et l'autre un puits. *En haut*, le cas où $r > 1$ (le point 1 est la source), *en bas*, le cas où $0 < r < 1$ (le point -1 est la source).

On sait que le composée de deux inversions de cercles concentriques ayant pour centre O et des rayons R_1 et R_2 est une homothétie de centre O et de rapport $K = R_2^2/ R_1^2$. Faisons cela avec l'homothétie M'. Par la transformation homographique F^{-1}, les deux cercles sont transformés en deux cercles appartenant au faisceau à points limites $f+$ et $f–$. La transformation M est la composée de deux inversions par rapport à ces cercles (*figure 6*).

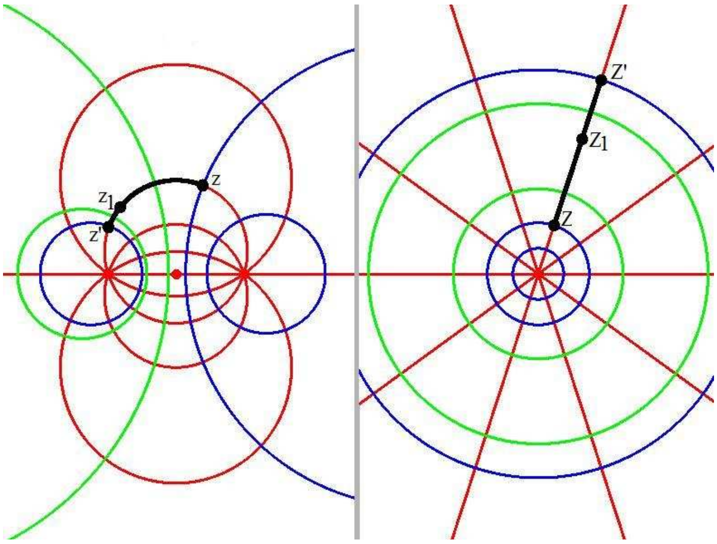


Figure 6 : *A droite*, l'homothétie M' est la composée de deux inversions de cercles concentriques (*en vert*), avec $Z \rightarrow Z_1 \rightarrow Z'$. *A gauche*, on passe aussi de z à z' par la composée de deux inversions de cercles appartenant au faisceau à points limites $f+$ et $f-$ (*en vert*).

3.2.3. Transformation loxodromique

$\mu = r\, e^{i\theta}$ avec r positif différent de 1 et θ différent de 0. La transformation $M'(z) = \mu\, z$ devient une similitude directe de centre 0, de rapport r et d'angle θ. Les courbes invariantes sont alors des spirales logarithmiques s'enroulant autour de 0 (*voir exercice ci-dessous*). Sous l'effet de F^{-1}, les courbes invariantes sont des courbes qui s'enroulent autour des deux points fixes, l'un étant attracteur et l'autre repousseur (*figure 7*).

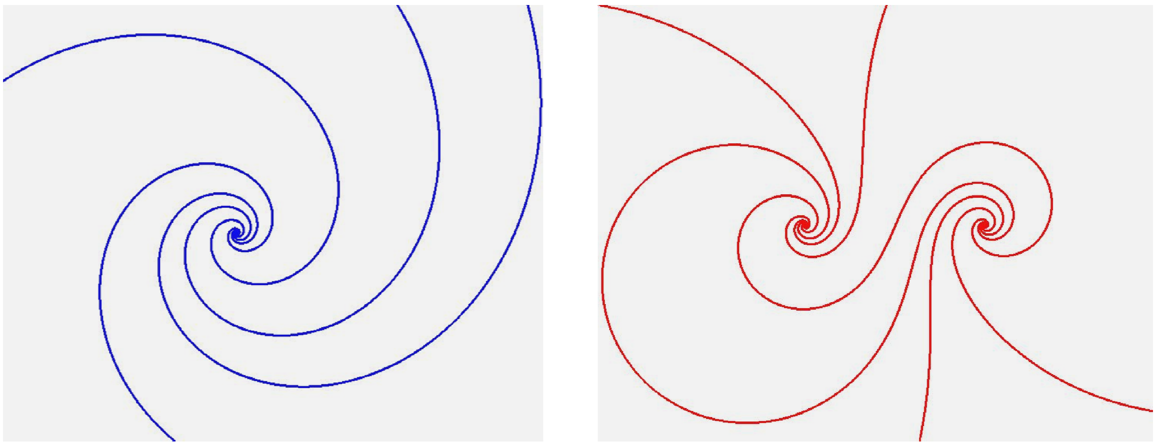


Figure 7 : *A gauche* spirales logarithmiques autour de O. *A droite* courbes loxodromiques qui s'en déduisent par F^{-1}.

Exercice 5 : Spirale logarithmique

Une spirale logarithmique a pour équation en polaires $\rho = a\, b^{\theta} = a\, e^{\theta \ln b}$. Avec M qui est un point de la courbe, ρ = OM et θ est l'angle de (Ox) à [OM). Le paramètre a > 0 donne l'abscisse positive du point sur (Ox) pour $\theta = 0$. Le paramètre b, qui doit être positif, indique le degré de grossissement, plus ou moins rapide. En effet, l'angle α entre la courbe et la droite (OM) en M reste toujours le même car $\tan \alpha = 1 / \ln b$.[6] *La spirale logarithmique coupe tous les rayons issus de 0 sous le même angle.*

[6] En effet, cet angle α est tel que $\tan \alpha = \rho / \rho'$ où ρ' est la déérivée de ρ par rapport à θ, ce qui donne $\tan \alpha = 1 / \ln b$. Sur la *figure* , les spirales ont une valeur de b telle que $\alpha = \pi/2{,}7$.

1) Ecrire l'équation de la courbe en complexes. Puis pour un point M d'affixe z sur la courbe, déterminer l'affixe z1 du point M_1 transformé de M sous l'effet de la rotation de centre 0 et d'angle θ0.

$z = a\,e^{\theta \ln b} e^{i\theta}$. Sous l'effet de la rotation, $z_1 = a\,e^{\theta \ln b} e^{i\theta} e^{i\theta_0} = a\,e^{\theta \ln b} e^{i(\theta+\theta_0)}$

2) Déterminer le point M' d'affixe z' transformé de M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k. En déduire que la similitude directe de centre O, d'angle θ_0 et de rapport e $^{\theta}0^{\ln b}$ fait passer du point M(z) sur la courbe au point M'(z') sur la courbe. Autrement dit, la courbe reste invariante sous l'effet de cette similitude.

$z' = k\,a\,e^{\theta \ln b} e^{i(\theta+\theta_0)}$. Ce point d'affixe *z'* dont l'argument est $\theta + \theta_0$ est sur la courbe si $k\,a\,e^{\,\theta \ln b} = a\,e^{(\theta + \theta 0) \ln b}$, soit $k = e^{\,\theta}0^{\ln b}$.

Remarquons que pour chaque valeur de θ_0, il existe une similitude laissant invariante la spirale.

3) Pour un multiplicateur μ donné, tel que Z' = M'(Z) = μ Z, déterminer les spirales logarithmiques qui restent invariantes sous l'effet de cette similitude.

Avec $\mu = K\,e^{\,i\,\theta}0$ ($K > 0$), on doit avoir $K = e^{\,\theta}0^{\ln b}$. On en déduit que $b = e^{(\ln K)/\theta_0}$, ce qui permet de construire les spirales correspondantes de paramètre *b*.

3.3. Multiplicateur et forme normale d'une transformation de Mobius

Le nombre μ défini précédemment est appelé le multiplicateur de la transformation. Plus précisément, comme nous avons envoyé *f*+ en 0 (et *f*– en ∞), il s'agit du multiplicateur associé à *f*+. A partir de la relation $M' = F \circ M \circ F^{-1}$, on a aussi $M' \circ F = F \circ M$, avec :

$(F \circ M)(z) = F(M(z)) = F(z') = \dfrac{z' - f_+}{z' - f_-}$ et $(M' \circ F)(z) = M'(F(z)) = M'(\dfrac{z - f_+}{z - f_-}) = \mu \dfrac{z - f_+}{z - f_-}$, d'où

$$\frac{z' - f_+}{z' - f_-} = \mu \frac{z - f_+}{z - f_-}$$ [7]

Cette relation entre *z* et *z'* est une nouvelle écriture de la transformation de Mobius *M*. On dit qu'il s'agit de la forme normale de *M* [8]. En échangeant le numérateur et le dénominateur de la formule, on a aussi :

$\dfrac{z' - f_-}{z' - f_+} = \dfrac{1}{\mu} \dfrac{z - f_-}{z - f_+}$. Autrement dit, si c'est *f*– qui est envoyé en 0 (et *f*+ en ∞), le multiplicateur associé à *f*– est $1/\mu$.

La connaissance des deux points fixes et celle du multiplicateur μ caractérisent la transformation *M*. Lorsque celle-ci s'écrit $M(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ avec $a\,d - b\,c = 1$, on sait trouver les points fixes en fonction de *a, b, c, d*, et comme *M* envoie le point ∞ en *a/c*, le multiplicateur μ est tel que :

---

[7] En itérant *n* fois cette transformation, on obtient un point $z^{(n)}$, transformé de *z* par M^n, tel que $\dfrac{z^{(n)} - f_+}{z^{(n)} - f_-} = \mu^n \dfrac{z - f_+}{z - f_-}$

[8] Ne pas confondre avec la forme normalisée de *M*, lorsque $a\,d - b\,c = 1$.

$\frac{a/c - f_+}{a/c - f_-} = \mu$, soit $\mu = \frac{a - c\,f_+}{a - c\,f_-}$

Inversement, à partir de $\frac{z' - f_+}{z' - f_-} = \mu \frac{z - f_+}{z - f_-}$, on peut écrire *M* sous sa forme classique :

$$(z' - f_+)(z - f_-) = \mu(z' - f_-)(z - f_+)$$
$$z'(z - f_- - \mu z + \mu f_+) = f_+ z - f_+ f_- - \mu f_- z + \mu f_+ f_-$$
$$z' = \frac{(f_+ - \mu f_-)z + (\mu - 1) f_+ f_-}{(1 - \mu)z + (\mu f_+ - f_-)}$$

3.4. Transformation parabolique

Il reste à traiter le dernier cas, celui où les points fixes sont confondus. On sait qu'alors $a + d = \pm 2$ lorsque la transformation de Mobius *M* est normalisée, et ce point fixe est *f* avec $f = (a - d) / (2c)$. Pour connaître le comportement de *M*, faisons comme auparavant (en gardnat les mêmes notations) et pratiquons une transformation de Mobius *F* qui fait passer de *f* à ∞, par exemple $F(z) = 1 / (z - f)$. Dans ce nouveau contexte, la transformation *M* devient une transformation *M'* telle que $M' = F \circ M \circ F^{-1}$. Comme *M'* admet comme point fixe unique ∞, il ne peut s'agir que d'une translation, soit $Z' = M'(Z) = Z + t$. Cela s'écrit aussi $\frac{1}{z' - f} = \frac{1}{z - f} + t$, et c'est la forme normale de *M*, qui s'écrit aussi :

$z' = \frac{(1 + f\,t)z - f^2 t}{t\,z + 1 - f\,t}$ si l'on connaît la translation *t* et le point fixe *f*.[9]

Prenons maintenant le faisceau des droites (D_1) toutes parallèles au vecteur *t*, ainsi que le faisceau des droites (D_2) toutes perpendiculaires aux précédentes, elles aussi parallèles entre elles. Sous l'effet de F^{-1} qui envoie ∞ en *f*, le faisceau de droites (D_1) devient une faisceau de cercles (C_1) tangents en *f*, tandis que le deuxième devient un faisceau de cercles (C_2) passant par *f* et tous orthogonaux aux précédents, c'est-à-dire le faisceau orthogonal. Les droites (D_1) étant invariantes par la translation, les cercles (C_1) sont à leur tour invariants par *M*.

Par exemple, prenons $f = 1$ et $t = (1/2)\, e^{i\pi/6}$. Sous l'effet de $F^{-1} = z / (z + 1)$, les deux faisceaux de droites deviennent deux fasceaux de cercles orthogonaux en *f*. Le fasceau de cercles dont l'axe passe par *f* et qui fait l'angle $\pi/3$ avec (*Ox*) forme l'ensemble des courbes invariantes par *M* (*figure 8*).

Inversement prenons z' = $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ avec $a\,d - b\,c = 1$ et $a + d = 2$ (ou -2).

En utilisant $\frac{1}{z' - f} = \frac{1}{z - f} + t$ et avec $M(\infty) = a/c$ et $f = (a - d) / (2\,c)$, on trouve

$$t = \frac{1}{a/c - (a - d)/(2c)} = \frac{1}{(a + d)/(2c)} = c \ \ (\text{ou } -c)$$

Finalement on connaît $f = (a - d) / (2\,c)$ et $t = c$ (ou $-c$), et l'on peut en déduire la forme normale de *M*.

---

[9] Il s'agit d'une forme normalisée de *M*, avec $a + d = 2$. En changeant le signe des quatre coefficients, on aurait $a + d = -2$.

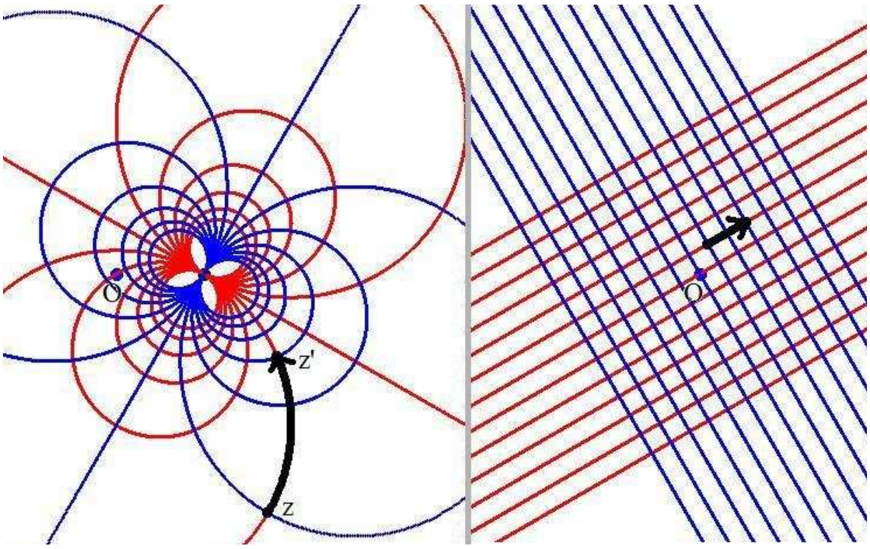


Figure 8 : *A droite* quadrillage des droites (D_1) et (D_2) avec des carrés de longueur 1/4, et un vecteur de translation t = (1/2) e $^{i\,\pi/6}$. *A gauche* les deux faisceaux de cercles orthogonaux qui s'en déduisent par F^{-1}, autour du point fixe 1, avec *en rouge* les courbes invariantes par *M*, et un exemple de passage de *z* à *z'* = *M*(*z*).

On sait qu'une translation de vecteur *t* peut s'écrire (d'une infinité de façons) comme composée de deux réflexions d'axes orthogonaux à *t*, en passant du premier au second par la translation *t*/2. Il s'agit de deux droites (D_2).Sous l'effet de F^{-1}, et grâce au principe de symétrie, la transformation *M* est la composée de deux inversions dont les cercles (C_2) sont les transformés des deux droites (*figure 9*).

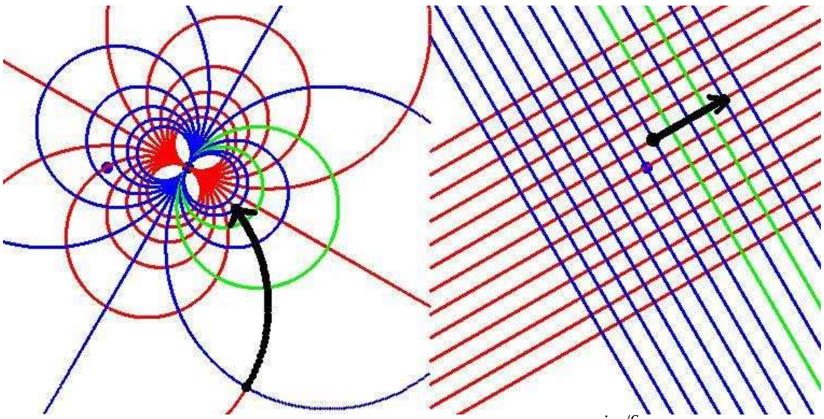


Figure 9 : *A droite* la translation, ici de vecteur $e^{i\,\pi/6}$ faisant passer de *Z* à *Z'* est la composée de deux réflexions d'axes *verts*. *A gauche*, on passe de *z* à *z'* par la composée de deux inversions de cercles *verts*.

3.5. Classification des transformations de Mobius

A partir d'une transformation de Mobius normalisée *M*, avec deux points fixes *f*+ et *f*–, nous avons trouvé la matrice *M'* = μ *z* telles que $M' = F \circ M \circ F^{-1}$. En prenant les matrices associées, on a l'égalité entre déterminants $\det M = \det F \times \det M \times \det F^{-1} = \det M$. Or det *M* = *a d* – *b c* = 1, d'où det *M'* = 1. La transformation *M'* est aussi normalisée, et *M'*(*z*) = μ *z* s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mu} \end{pmatrix} \text{ puisque } M'(z) = \frac{\sqrt{\mu}\ z + 0}{0z + 1/\sqrt{\mu}} = \mu z .$$

La trace de *M'* –somme des coefficients diagonaux- est $\sqrt{\mu} + 1/\sqrt{\mu}$. Avec $M' = F \circ M \circ F^{-1}$ où $F \circ M \circ F^{-1}$ est une conjuguée de *M* qui conserve la trace, on a aussi trace*M* = *a* + *d* = $\sqrt{\mu} + 1/\sqrt{\mu}$.

On a vu que la transformation est elliptique lorsque $\mu = e^{i\varphi}$. Alors $a + d = e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2}$ $= 2\cos(\varphi/2)$ qui est réel avec $|a + d| < 2$.

La transformation est hyperbolique lorsque μ est un réel positif $\neq 1$. Alors $a + d = \sqrt{\mu} + 1/\sqrt{\mu}$ est un réel positif et $a + d$ est supérieur à 2.[10] On sait aussi qu'en changeant tous les signes des coefficients d'une transformation de Mobius, celle-ci reste la même. Si $a + d$ est réel et inférieur à –2, cela ne change pas la transformation. La transformation est hyperbolique pour $a + d$ réel et $|a + d| > 2$.

La transformation est parabolique pour $a + d = \pm 2$.

Il s'ensuit que dans tous les autres cas, c'est-à-dire pour $a + d$ complexe non réel. la transformation est loxodromique.

En résumé,

Avec $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ et $a\,d - b\,c = 1$,

- La transformation M est elliptique pour $|\mu| = 1$ (et $\mu \neq 1$) ou, ce qui revient au même, $a + d$ réel et $|a + d| < 2$.
- La transformation est hyperbolique pour μ réel positif $\neq 1$, ce qui signifie $a + d$ réel et $|a + d| > 2$.
- La transformation est parabolique pour $\mu = 1$, ce qui signifie $a + d$ réel $= \pm 2$.
- La transformation est loxodromique pour μ de la forme $r\,e^{i\theta}$ avec r positif $\neq 1$ et $\theta \neq 0$ $[2\pi]$, ce qui signifie $a + d$ complexe non réel.

Les transformations elliptiques, hyperboliques et paraboliques peuvent s'écrire comme composées de deux inversions-réflexions, tandis que les transformations loxodromiques s'écrivent sont composées de quatre inversions-réflexions.

Exercice 6 : z' = 1 / z

Montrer que la transformation de Mobius M telle que M(z) = 1/z est elliptique.

$M(z) = \dfrac{0z+1}{1z+0}$ avec $a\,d - b\,c = -1$. Divisons les coefficients par $\sqrt{-1} = i$ (ou si l'on préfère $-i$) pour avoir la forme normalisée, soit $M(z) = \dfrac{0z-i}{-iz+0} = \dfrac{0z+i}{iz+0}$. La transformation admet les deux points fixes ± 1, et le multiplicateur est $\mu = \dfrac{0-i}{0+i} = -1 = e^{i\pi}$. La transformation est elliptique.

Exercice 7 : Transformation loxodromique

Considérons la transformation de Mobius M de points fixes – 1 et + 1 et dont le multiplicateur associé au point fixe – 1 est $\mu = 1 + 0{,}4\,i$.

1) Quelle est la nature de la transformation ? Déterminer son expression sous la forme (az + b) / (cz + d).

Avec μ complexe dont le module est $\neq 1$ et l'argument $\neq 0$ $[2\pi]$, la transformation M est loxodromique. Puisque $|\mu| > 1$, il y a expansion autour du point fixe – 1 associé à μ. Le point fixe – 1

[10] Pour x réel positif, la fonction $f(x) = x + 1/x$ admet un minimum qui vaut 2 lorsque x est égal à 1.

est une source et le point 1 un puits. Appliquons la formule précédemment trouvée en prenant $f+ = -1$ et $f- = 1$:

$$z' = \frac{(f_+ - \mu f_-)z + (\mu - 1) f_+ f_-}{(1-\mu)z + (\mu f_+ - f_-)} = \frac{(-1-1-0,4i)z + (1+0,4i-1)(-1)}{(1-1-0,4i)z + (-1-0,4i-1)} = \frac{(-2-0,4i)z - 0,4i}{-0,4i\,z - 2 - 0,4i}$$

$$= \frac{(+2+0,4i)z + 0,4i}{+0,4i + 2 + 0,4i}$$

2) Ecrire la transformation de Mobius F qui envoie – 1 en 0, 1 en ∞ et 0 en -1. Avec z' = M(z), Z = F(z) et Z' = F(z'), déterminer la transformation M' faisant passer de Z à Z'. En déduire à nouveau M.

Pour F avec $Z = F(z)$ on obtient $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$. Par le procédé inverse on en déduit que F^{-1} est telle que $z = \dfrac{Z+1}{Z-1}$ (les écritures de F et F^{-1} ne sont pas normalisées, cela n'ayant pas d'importance ici). On a M' telle que $Z' = M'(Z) = \mu Z = (1 + 0,4i) Z$.

$$z \to Z = \frac{z+1}{z-1} \to Z' = \mu Z = \frac{\mu z + \mu}{z-1} \to z' = \frac{Z+1}{Z-1} = \frac{\mu z + \mu + z - 1}{\mu z + \mu - z + 1} = \frac{(\mu+1)z + \mu - 1}{(\mu-1)z + \mu + 1}$$

On retrouve la même formule que précédemment.

3) Visualiser par programme les courbes invariantes (lignes de courant) de la transformation loxodromique.

Partons d'un point z_0 sur l'axe des x. Il a pour transformé $z_1 = M(z_0)$. Si l'on est suffisamment loin de la source, on peut considérer que le segment rectiligne joignant ces deux points est un morceau de la courbe invariante passant par z_0 et z_1. On divise alors le segment en une multitude de points régulièrement espacés, puis pour chacun de ces points, on prend leurs itérés successifs sous l'effet de M. On obtient ainsi la courbe invariante issue de z_0 (*figure 10*). Lorsque le point z_0 est proche de la source, on prend la transformation M^{-1} qui échange les points fixes, –1 devenant un puits, et l'on fait comme auparavant. Remarquons que $M^{-1}(z) = \dfrac{(\mu+1)z + 1 - \mu}{(1-\mu)z + \mu + 1}$.

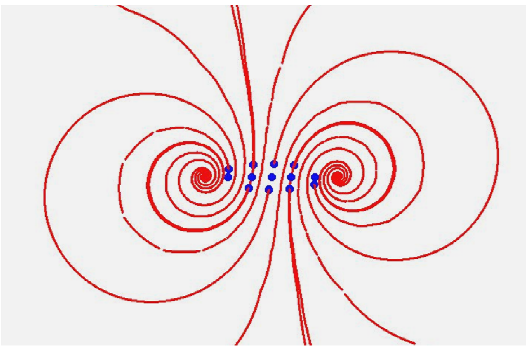


Figure 10 : Construction des courbes invariantes.

4) Déterminer les spirales logarithmiques qui restent invariantes sous l'effet de M'. Calculer l'angle qu'elles font avec les rayons issus de O. En déduire le tracé des courbes loxodromiques invariantes sou l'effet de M.

Avec $\mu = 1 + 0,4i$, le rapport d'homothétie est $|\mu| = \sqrt{1,16} = 1,077$ et l'angle de la similitude est θ0 tel que tan θ0 = 0,4 (avec sin θ0 > 0), soit θ0 ≈ 0,3805. On en déduit que le paramètre b des spirales logarithmiques invariantes est $b = e^{(\ln|\mu|)/\theta_0} \approx 1,048$. L'angle qu'elles font avec les rayons vecteurs est α

= arctan(1/ln b) ≈ 86°. La connaissance de *b* permet de tracer des spirales pour plusieurs valeurs de a. Il suffit ensuite d'appliquer la fonction F -1 pour trouver les courbes loxodromiques (*figure 11*).

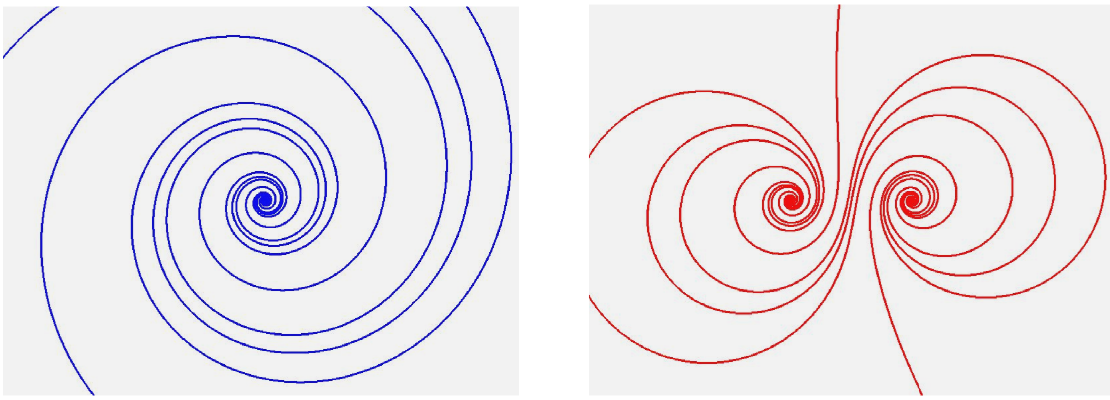


Figure 11 : *A gauche* quelques spirales logarithmiques associées à la similitude telle que *M'*(*Z*) = (1 + 0,4*i*) *Z*. *A droite*, les courbes loxodromiquesque que l'on en déduit par F^{-1}.

Exercice 8 : Transformation de Mobius avec μ réel négatif

Considérons la transformation de Mobius *M* de points fixes +1 et – 1, telle que le multiplicateur μ associé au point fixe +1 soit égal à – 2.

1) Quelle est sa nature et comment s'écrit-elle ?

Comme $\mu = -2 = 2\,e^{i\pi}$, il s'agit d'une transformation loxodromique. En appliquant la formule déjà utilisée, on en déduit $z' = M(z) = \dfrac{-z+3}{3z-1}$. Remarquons qu'ainsi écrite, cette transformation a pour déterminant – 8. Elle s'écrit sous forme normalisée $M(z) = \dfrac{(i/\sqrt{8})z - 3i/\sqrt{8}}{(-3i/\sqrt{8})z + i/\sqrt{8}}$ et alors $a + d = 2i/\sqrt{8} = i/\sqrt{2}$ qui est complexe non réel, ce qui caractérise aussi, comme on l'a vu, une loxodromie.

2) Programmer le tracé des spirales logarithmiques liées à M' puis celui des courbes loxodromiques liées à M. Comment peut-on voir géométriquement le passage de z à z' ?

Les courbes étant construites selon la méthode de l'exercice précédent, il suffit de se donner un point *z*. Par les points *z* et *z'* = *M*(*z)* passe une même courbe loxodromique. Sachant que *Z* et *Z'* avec *Z'* = *M'*(*Z*) sont alignés avec *O*, *z* et *z'* se trouvent aussi sur le même cercle du faisceau à points de base *f*+ et *f*- (*figure 12*).

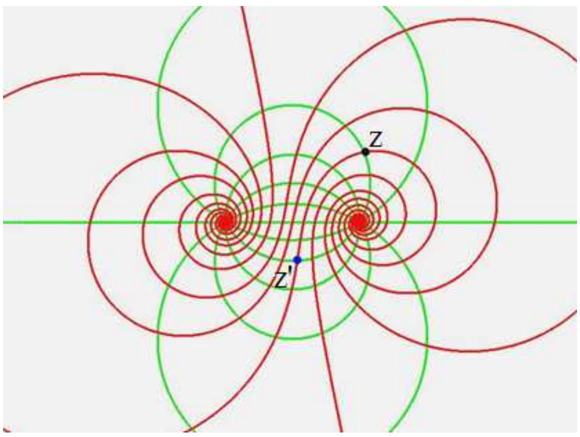


Figure 12 : Un point *z* et son image *z'* sur le même cercle *vert*.

Exercice 9 : Transformation de Mobius laissant le demi-plan supérieur invariant

Montrer qu'une transformation de Mobius qui laisse invariant le demi-plan au-dessus de (Ox) a tous ses coefficients réels et a d – b c > 0.

Prenons les trois points réels *m n p* sur (*Ox*) et envoyons-le en trois points réels 0 ∞ *p*' eux aussi sur (*Ox*). Il existe une transformation de Mobius unique faisant passer des uns aux antres, et elle est de la forme $z' = K\frac{z-m}{z-n}$ avec $p' = K\frac{p-m}{p-n}$, ce qui donne *K*. Tous les coefficients sont donc nécessairement réels.[11]

Inversement prenons une transformation de Mobius *M* de la forme $z' = M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec *a*, *b*, *c*, *d* tous réels. Avec *z* = *x* + *i y* et *z*' = *x*' + *i y*', on a vu que $\mathrm{Im}(z') = \frac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$. Un point quelconque de (*Ox*), avec *y* = 0 devient un point tel que *y*' = 0. L'axe (*Ox*) est préservé. D'autre part, on veut qu'un point du demi-plan supérieur, avec *y* > 0, soit transformé en un point lui aussi dans ce demi-plan, ce qui impose que *a d* – *b c* > 0.

Finalement, les transformations *M* qui conservent le demi-plan supérieur sont toutes de la forme $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec *a*, *b*, *c*, *d* réels et *a d* – *b c* > 0 (ou encore *a d* – *b c* = 1). Nous retrouverons ce résultat dans le chapitre suivant.

Exercice 10 : Passage du demi-plan de Poincaré au disque de Poincaré, et transformation de Cayley

*Le demi-plan de Poincaré, noté **H**, est le demi-plan situé strictement au-dessus de (Ox), et le disque de Poincaré, noté **D**, est l'intérieur strict du cercle unité **∂D** (de centre O et de rayon 1).*

Première méthode par usage d'une inversion

1) Donner l'écriture de l'inversion autour du cercle de centre K (- i), et de rayon $R = \sqrt{2}$. *Remarquons que ce cercle passe par les points A(1, 0) et B(-1, 0).*

En appliquant la formule précédente, on trouve $z' = \frac{-i\bar{z}+2-1}{\bar{z}-i} = \frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i}$

2) Montrer que cette inversion tranforme la droite d'equation y = 0 en cercle de centre O et de rayon 1.

La droite horizon du demi-plan de Poincaré, *y* = 0, devient un cercle passant par *K* ainsi que par les points invariants *A* et *B*. Il s'agit du cercle de centre *O* et de rayon 1. Le demi-plan supérieur devient l'intérieur de ce cercle.

3) En déduire une transformation de Mobius qui transforme le demi-plan de Poincaré en disque de Poincaré.

[11] On pourrait préciser qu'en prenant *m*, *n*, *p* dans cet ordre sur (*Ox*), avec le demi-plan supérieur à gauche, il faudrait aussi que 0, ∞, *p*' soient dans cet ordre aussi pour avoir le demi-plan supérieur à gauche, ce qui impose *p*' < 0, et par suite *K* < 0. Or le déterminant de la transformation est *K* (*m* – *n*), il est donc positif.

Comme l'inversion transforme les angles orientés en leurs opposés, alors que la transformation de Mobius les converve, il suffit de composer l'inversion précédente avec l'opération conjuguée $z \to \bar{z}$, puisque celle-ci conserve l'intérieur du cercle de Poincaré. On trouve :

$$z' = \frac{iz+1}{z+i}$$

4) Montrer qu'une transformation de Mobius transformant le demi-plan de Poincaré en disque de Poincaré s'écrit : $z' = \frac{z-i}{z+i}$*.Visualiser ce passage.*

On avait trouvé au 3° $z' = \frac{iz+1}{z+i} = i\frac{z-i}{z+i}$. En composant cette transformation avec la rotation de centre *O* et d'angle – $\pi/2$ ($z \mapsto -iz$), qui laisse le disque **D** de Poincaré globalement invariant, on obtient $z' = \frac{z-i}{z+i}$, appelée transformation de Cayley (*figure 13*).

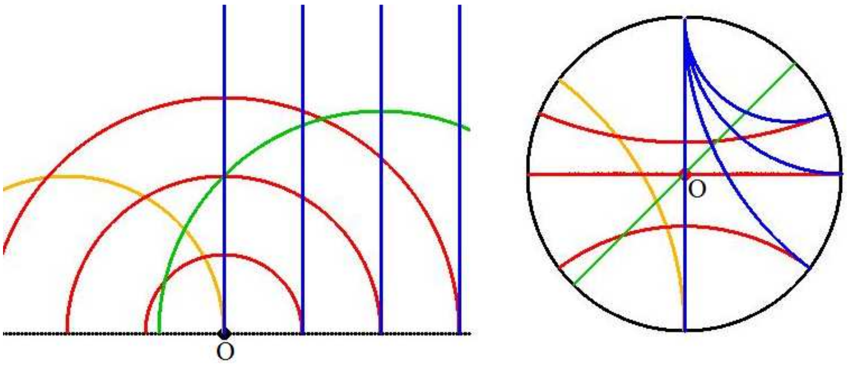


Figure 13 : *A gauche* demi-cercles et demi-droites verticales dans le demi-plan, et *à droite* leurs transformés dans le disque de Poincaré.

On constate que les demi-cercles de **H** centrés en *O* deviennent des arcs de cercles orthogonaux au cercle unité ∂**D**, notamment celui de rayon 1 devient (*Ox*) (cercles *en rouge* sur la *figure 13*). Les demi-cercles centrés sur *Ox* et passant par *O* deviennent des arcs de cercles orthogonaux au cercle ∂**D** et passent par le point limite (0, –1) (cercles *en jaune*). Les demi-droites verticales deviennent des arcs de cercles orthogonaux à ∂**D** passant par le point limite (0, 1). (courbes *en bleu*). Enfin les demi-cercles centrés sur *Ox* et passant par *i* (0, 1) deviennent des diamètres de **D**. Sur la *figure 14* sont tracés ce que l'on appelle des horocyles, que nous retrouverons dans les chapitres suivants.

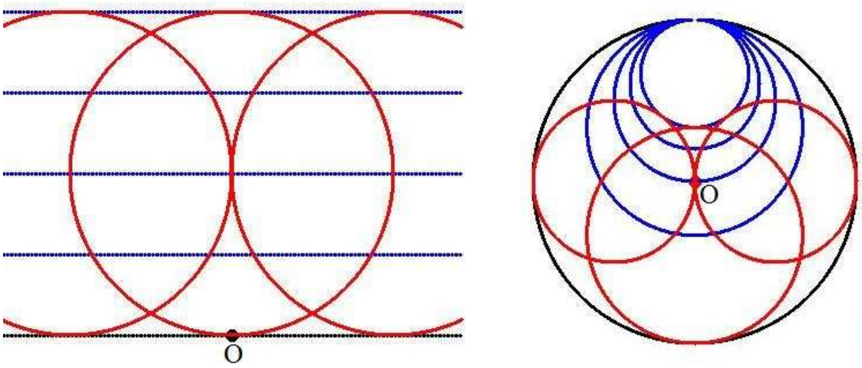


Figure 14 : *A gauche*, des horocycles dans le demi-plan (un horocyle, comme on le précisera ultérieurement, est soit un cercle tangent à *Ox*, soit une droite horizontale) . *A droite* les horocyles correspondants dans le disque de Poincaré.

Deuxième méthode, grâce à une propriété fondamentale de la transformation de Mobius

5) Déterminer la transformation de Mobius, de la forme $z' = (az+b)/(cz+d)$ *, faisant passer des trois points d'affixe –1, 0, 1, aux trois points d'affixe i, –1, –i.*

On sait qu'il existe une transformation de Mobius unique M faisant passer de trois points à trois points. Quand on prend les trois points –1, 0, 1 sur l'axe des x dans cet ordre, ils ont le demi-plan de Poincaré à leur gauche. Les trois points i, –1, $-i$ sont sur le cercle unité, et pris dans cet ordre, ils ont l'intérieur du cercle à leur gauche. La transformation de Mobius transforme la droite en cercle, avec préservation des angles. Elle fait donc passer du demi-plan de Poincaré au disque de Poincaré.

Commençons par la transformation M_1 faisant passer de –1, 0, 1 à 0, 1, ∞. Elle est de la forme $K\dfrac{z+1}{z-1}$ avec $M(0) = 1$, d'où $K = -1$: $M_1(z) = \dfrac{-z-1}{z-1}$.

Prenons ensuite la transformation M_2 faisant passer de i, –1, $-i$ à 0, 1, ∞. On trouve, par le même procédé que précédemment : $M_2(z) = \dfrac{-iz-1}{z+i}$ puis $M_2^{-1}(z) = \dfrac{iz+1}{-z-i}$.

On sait que $M = M_2^{-1} \circ M$:

$$M(z) = \frac{i\dfrac{-z-1}{z-1}+1}{-\dfrac{-z-1}{z-1}-i} = \frac{-iz-i+z-1}{z+1-iz+i} = \frac{(1-i)z-(1+i)}{(1-i)z+(1+i)}$$

$$= \frac{z-i}{z+i}$$

On retrouve la transformaiton de Cayley.

6) Calculer 1 - |z'|^2 *en fonction de z. Puis, à partir de la distance infinitésimale hyperbolique au voisinage de z :* <u>*ds*</u> *= |dz|/y dans le demi-plan de Poincaré, en déduire que l'on a aussi* <u>*ds*</u> *=* $\dfrac{2|dz'|}{1-|z'|^2}$.
Par définition on considère que la distance hyperbolique associée à |dz| dans le demi-plan de Poincaré est la même pour |dz'| dans le disque de Poincaré. Ce qui permet de définir la distance au voisinage d'un point quelconque z dans le disque de Poincaré comme étant égale à <u>*ds*</u> *=* $\dfrac{2|dz|}{1-|z|^2}$.

$$z' = \frac{z-i}{z+i} \text{ d'où } |z'|^2 = \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2}$$

$$1-|z'|^2 = \frac{|z+i|^2-|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{4y}{|z+i|^2}$$

En dérivant la formule de passage $z' = \dfrac{z-i}{z+i}$ on obtient $dz' = \dfrac{2i}{(z+i)^2}dz$, d'où

$$|dz'| = \frac{2|dz|}{|z+i|^2} = \frac{1-|z'|^2}{2y}|dz|$$

$$\frac{2|dz'|}{1-|z'|^2} = \frac{|dz|}{y}$$

Forme générale des transformations de Mobius faisant passer du demi-plan supérieur au disque unité

7) Jusqu'ici nous avons trouvé une transformation particulièrement simple. Mais il existe une infinité de transformations de Mobius faisant passer du demi-plan supérieur au disque unité. Il s'agit de déterminer leur forme générale.

a) Prendre le point a quelconque, mais de partie imaginaire positive. Il se projette sur (Ox) en un point b, soit $b = (a+\bar{a})/2$. *Prenons aussi le point ∞ qui est sur la droite (ab) élargie ainsi que sur l'axe (Ox) élargi. Imposons que le point a soit envoyé en 0, centre du disque unité, par une transformation de Mobius, et que le point b sur (Ox) soit envoyé sur le cercle unité en* $b' = -e^{i\theta}$. *Jusqu'ici nous avons deux paramètres dont dépendent les transformations de Mobius que nous cherchons. Enfin le point ∞ sur (Ox) est envoyé en un point c' du cercle unité. Mais ce point ne peut pas être quelconque sur le cercle. Montrer, en utilisant le principe de symétrie, qu'il doit être à l'opposé du point* $-e^{i\theta}$.

Faisons l'inversion de cercle Γ, dont le centre est a et le rayon ab. Il est tangent à la droite (Ox). Par une transformation de Mobius, ce cercle devient un cercle Γ' tangent en b' au cercle unité. Grâce au principe de symétrie, l'inversion de cercle Γ' envoie le point 0 (image de a) au point c' image de ∞. Cela impose que les points $b' O\, c'$ soient alignés, d'où $c' = e^{i\theta}$.

b) La transformation de Mobius générale qui envoie le demi-plan vers le disque unité est ainsi caractérisée par les trois points a b ∞ qui ont pour transformés les points 0, $-e^{i\theta}$, $e^{i\theta}$. *Elle peut être remplacée par la transformation M' faisant passer des points a b ∞ aux points 0, –1, 1 que l'on composera ensuite avec la rotation de centre O et d'angle θ. Déterminer la transformation M', puis conclure.*

La transformation M_1 qui envoie $a\ b$ ∞ en 0 1 ∞ est la fonction linéaire $M_1(z) = (z - a) / (b - a)$.

La transformation M_2 qui envoie 0 –1 1 en 0 1 ∞ est $M_2(z) = \dfrac{2z}{z-1}$, et son inverse est $M_2^{-1}(z) = \dfrac{(1/2)z}{(1/2)z-1} = \dfrac{z}{z-2}$. On en déduit :

$$M'(z) = (M_2^{-1} \circ M_1)(z) = \frac{(z-a)/(b-a)}{(z-a)/(b-a)-2} = \frac{z-a}{z-a-2b+a} = \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

Finalement la transformation de Mobius la plus générale est $M(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$.

Exercice 11 : Passage du disque de Poincaré à lui-même

1) Trouver les transformations de Mobius qui conservent le disque unité ($|z| < 1$*).*

Prenons un point m dans ce disque et envoyons-le en 0 par une transformation de Mobius M qui est censée conserver le disque unité. Dans l'inversion de cercle unité (C), le point m est transformé en $m' = 1/\bar{m}$. De même l'inversion de cercle (C) envoie le point 0 en ∞. Par le principe de symétrie, (C) est transformé en lui-même et m' devient ∞ par M. Cette transformation M est donc de la forme

$$M(z) = K\frac{z-m}{z-m'} = K\,\bar{m}\frac{z-m}{\bar{m}z-1} = -K\,\bar{m}\frac{z-m}{-\bar{m}z+1} = K'\frac{z-m}{-\bar{m}z+1},$$ K' étant un nombre complexe.

Exprimons enfin qu'un point du cercle, par exemple 1, et envoyé sur le cercle en un point quelconque tel que $|M(1)| = 1$, ce qui donne $1 = |K'|\dfrac{|1-m|}{|1-\bar{m}|} = |K'|\dfrac{|1-m|}{\overline{|1-m|}} = |K'|$, soit $K' = e^{i\alpha}$.

Finalement $M(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z-m}{-\bar{m}z+1}$ avec $|m| < 1$.

Vérifions que le cercle unité est bien conservé : en prenant un point du cercle, soit z tel que $|z| = 1$, $|-\bar{m}z+1| = |-m\bar{z}+1| = |-m\,\bar{z}+z\bar{z}| = |\bar{m}(-m+z)| = |z-m|$ et $|M(z)| = 1$.

2) Montrer que les transformations de Mobius qui conservent le disque unité préservent la métrique de Poincaré, soit $\frac{2|dz'|}{1-|z'|^2}=\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ *avec z' = M(z).*

Dérivons $z'=M(z)=e^{i\alpha}\,\frac{z-m}{-\overline{m}z+1}$

$$\frac{dz'}{dz}=\frac{1-|m|^2}{(1-\overline{m}z)^2}\text{, et }\frac{|dz'|}{|dz|}=\frac{1-|m|^2}{|1-\overline{m}z|^2}\text{ ou }|dz'|\,|1-m\overline{z}|^2=|dz|\,(1-|m|^2)$$

$$\frac{|dz'|}{1-|z'|^2}=\frac{|dz'|}{1-\frac{|z-m|^2}{|1-\overline{m}z|^2}}=\frac{|dz'|\,|1-\overline{m}z|^2}{|1-\overline{m}z|^2-|z-m|^2}=\frac{|dz'|\,|1-\overline{m}z|^2}{(1-\overline{m}z)(1-m\overline{z})-(z-m)(\overline{z}-\overline{m})}$$

$$=\frac{|dz'|\,|1-\overline{m}z|^2}{1+m\overline{m}z\overline{z}-z\overline{z}-m\overline{m}}=\frac{|dz'|\,|1-\overline{m}z|^2}{(1-|m|^2)(1-|z|^2)}=\frac{|dz|\,(1-|m|^2)}{(1-|m|^2)(1-|z|^2)}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

3) Montrer que $M(z)=e^{i\alpha}\,\frac{z-m}{-\overline{m}z+1}$ *avec |m| < 1 peut aussi s'écrire* $M(z)=\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ avec $|b|<|a|$, *et que la réciproque est vraie. Commencer plutôt par démontrer la réciproque.*

Partons de $M(z)=\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ avec $|b|<|a|$, et divisons en haut et en bas par $\overline{a}$:

$M(z)=\frac{(a/\overline{a})z+b/\overline{a}}{(\overline{b}/\overline{a})z+1}=\frac{(a/\overline{a})z+(b/a)/(a/\overline{a})}{(\overline{b}/\overline{a})z+1}=\frac{a}{\overline{a}}\,\frac{z+(b/a)}{(\overline{b}/\overline{a})z+1}$. Or $a/\overline{a}$ a pour module 1 et pour argument 2*θ*, *θ* étant l'argument de *a*. Posons *α* = 2*θ*, et *m* = – *b*/*a*, d'où |*m*| = |*b*|/|*a*| <1. Finalement

$M(z)=e^{i\alpha}\,\frac{z-m}{-\overline{m}z+1}$ avec |*m*| < 1.

Inversement, partons de $M(z)=e^{i\alpha}\,\frac{z-m}{-\overline{m}z+1}$ avec |*m*| < 1. En prenant un nombre *a* ≠ 0 tel que *a* = *r* $e^{i\theta}$ et *θ* = *α*/2, $a/\overline{a}=e^{i2\theta}=e^{i\alpha}$, $M(z)=\frac{(a/\overline{a})z+-(a/\overline{a})m}{-\overline{m}z+1}$. Puis on pose *b* = –*a m*, d'où |*b*| = |*a*| |*m*| < |*a*|. Finalement, $M(z)=\frac{a\,z/\overline{a}+b/\overline{a}}{(\overline{b}/\overline{a})z+1}=\frac{az+b}{\overline{b}\,z+\overline{a}}$ avec |*b*| < |*a*|.