

Démontage de fractales de Fatou-Julia

L'ensemble rempli de Fatou-Julia, du nom de ses initiateurs, est formé des points dont la trajectoire sous l'effet répété de la fonction complexe $z' = z^2 + c$ ne s'en va pas à l'infini. Une façon de construire la courbe frontière consiste à partir d'un point z et de prendre ses deux transformés sous l'effet répété des fonctions inverses de la précédente $z' = \pm\sqrt{z-c}$. Ces points finissent par se coller sur la frontière de l'ensemble et l'occupent de façon dense. S'il est naturel d'obtenir un cercle lorsque $c = 0$, il est surprenant de voir cette forme ovale se tordre et se hérissier lorsque c évolue. Aussi va-t-on s'intéresser au pourquoi de cette forme complexe et chercher à savoir d'où vient cette jungle d'arborescences et de bulbes. C'est ce que nous allons faire dans le cas où c est un nombre réel négatif.

Pour ce faire, nous allons mettre la fractale en pièces détachées, en déterminant comment construire chaque morceau de façon indépendante, tout en privilégiant l'ensemble qui reste globalement invariant sous l'effet de la fonction $z' = z^2 + c$ répétée deux fois. C'est à partir de cet ensemble que tous les autres morceaux de l'ensemble de Fatou-Julia se déduisent. Comme nous allons principalement utiliser les fonctions inverses $z' = \pm\sqrt{z-c}$, nous devons d'abord rappeler comment se fabriquent les racines carrées d'un nombre complexe.

1. Racines carrées d'un nombre complexe

On sait qu'un nombre complexe z admet deux racines carrées opposées. Le nombre z s'écrit sous forme trigonométrique $[r, \theta]$, et l'on choisit l'argument θ compris entre $-\pi$ et π . Les racines carrées ont pour module \sqrt{r} et pour argument respectif $\theta/2$ et $\theta/2 + \pi$. Grâce au choix de l'intervalle décrit par l'angle θ , la racine carrée d'angle $\theta/2$ a toujours une partie réelle positive, et nous la noterons \sqrt{z} , l'autre racine carrée étant $-\sqrt{z}$ (figure 1). Dans ces conditions, on vérifie aussitôt que la conjuguée de \sqrt{z} , soit $\overline{\sqrt{z}}$, est aussi la racine carrée de la conjuguée, soit $\sqrt{\overline{z}}$.

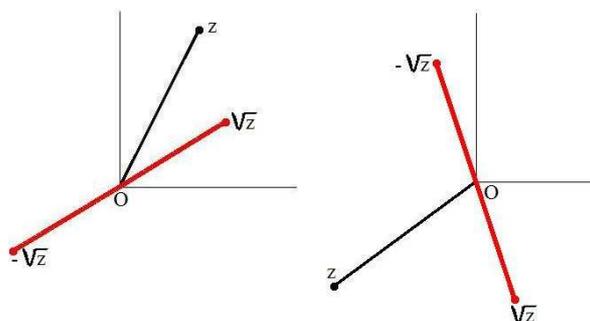


Figure 1 : Racines carrées de z , notées \sqrt{z} et $-\sqrt{z}$, la première ayant une partie réelle positive.

2. Transformé d'un ovale par racines carrées

Prenons maintenant une courbe fermée, une sorte d'ovale. Que devient-elle lorsqu'elle subit la transformation faisant passer de z à ses deux racines carrées ? On distingue deux cas :

- L'origine O du plan complexe est à l'intérieur de la courbe fermée. La courbe fermée, avec ses points d'affixe z , est transformée en une courbe fermée, dont la moitié est parcourue par \sqrt{z} et l'autre par $-\sqrt{z}$. Et la surface intérieure de la courbe est transformée en surface intérieure de son image (figure 2).

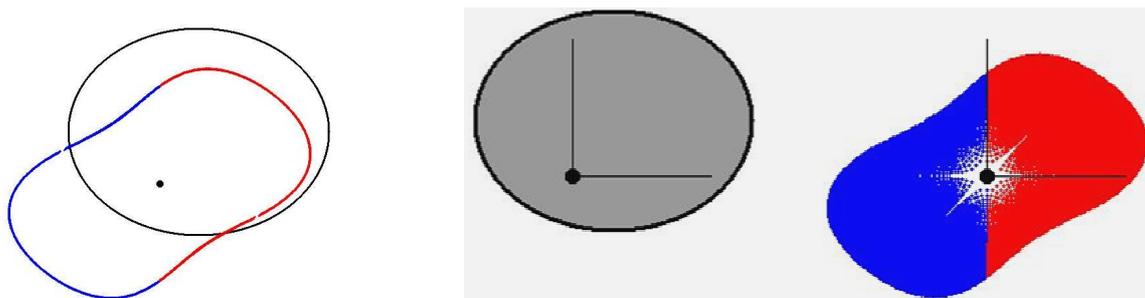


Figure 2 : A gauche, avec le point O intérieur, l'ovale en noir est transformé en ovale en rouge par \sqrt{z} et en bleu par $-\sqrt{z}$. A droite, transformation de la surface interne.

- L'origine O est à l'intérieur de la courbe fermée. Celle-ci est alors transformée en deux courbes fermées, l'une décrite par \sqrt{z} et l'autre décrite par $-\sqrt{z}$ (figure 3).

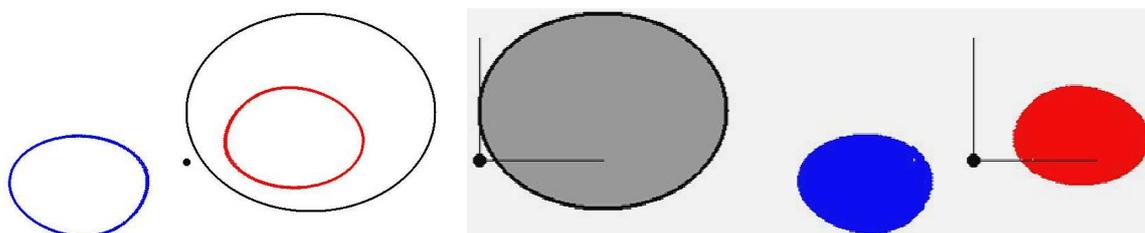


Figure 3 : A gauche, avec O à l'extérieur de la courbe fermée en noir, celle-ci est transformée en deux courbes fermées, rouge ou bleue selon la racine carrée prise. A droite, transformation des surfaces.

Dans tous les cas, après la transformation par racines carrées, la courbe ou l'union des deux courbes obtenues sont symétriques par rapport à l'origine O .

Prenons maintenant le cas particulier où la courbe fermée présente une symétrie par rapport à l'axe des x . La transformée ovale pour O intérieur, ainsi que les deux transformées ovales pour O extérieur, conservent cette symétrie par rapport à Ox . On en déduit, par composition de la symétrie par rapport à O et par rapport à Ox , que la forme transformée présente une symétrie par rapport à l'axe des y . Remarquons toutefois que dans le cas où deux ovales sont obtenus, c'est leur union qui est symétrique par rapport à Oy , mais que chacun des deux ovales n'a pas de symétrie par rapport à un quelconque axe vertical (figure 4).

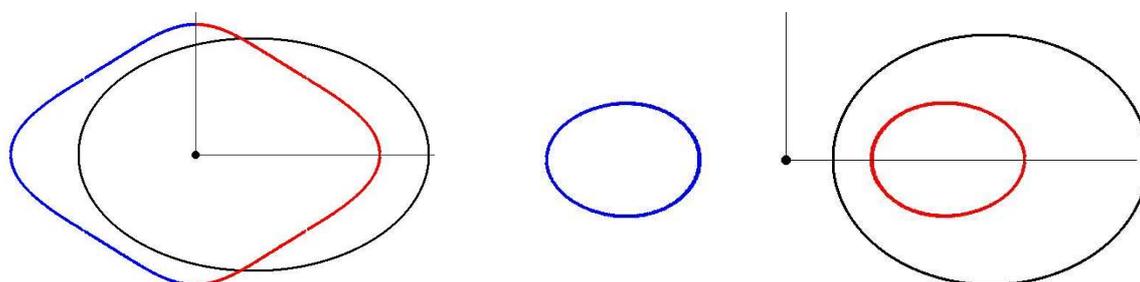


Figure 4 : Conservation de la symétrie par rapport à Ox , et symétrie par rapport à Oy de la transformée.

3. Symétries de la fractale de Julia pour c réel

Toute fractale de Julia admet l'origine O comme centre de symétrie, car si l'on part de deux points opposés d'affixe z_0 et $-z_0$, leurs trajectoires se confondent dès $z_1 = (\pm z_0)^2 + c$. Supposons en plus que c soit un nombre réel. Si l'on part de deux points symétriques par rapport à Ox , d'affixe $\overline{z_0}$ et z'_0 , leurs trajectoires obéissent aux récurrences $z_{n+1} = z_n^2 + c$ et $z'_{n+1} = z'_n{}^2 + c$, et si l'on a $z'_n = \overline{z_n}$ on a aussi

$z'_{n+1} = \overline{z_n^2 + c} = \overline{z_n^2} + \overline{c} = \overline{z_{n+1}}$, ce qui montre que les trajectoires restent symétriques par rapport à Ox , et elles subissent la même évolution, ce qui montre que si z_0 est dans l'ensemble de Julia, son symétrique $\overline{z_0}$ l'est aussi. Finalement, la fractale de Julia, symétrique par rapport à O et à Ox , l'est aussi par rapport à Oy .

4. Fractale de Julia pour $c = -1$

Prenons une courbe en forme d'ovale présentant les axes de symétries Ox et Oy , avec comme demi-longueurs sur ces axes les nombres a et b . Faisons lui subir la transformation $z' = \pm\sqrt{z+1}$. Cela revient à faire d'abord la translation de vecteur $(1, 0)$, telle que $Z = z + 1$, et l'ovale initial C devient un ovale isométrique C_1 qui est aussi symétrique par rapport à Ox , puis on fait $z' = \pm\sqrt{Z}$, et l'ovale C_1 devient C' . Si le point O est hors de C_1 , soit a inférieur à 1, C' est formé de deux ovales, et si O reste dans C_1 , soit a supérieur à 1, C' est formé d'un seul ovale, symétrique par rapport à Ox et Oy (figure 5).

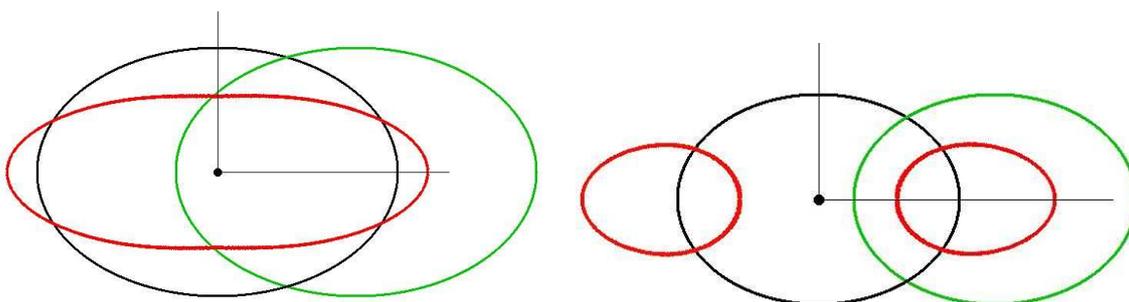


Figure 5 : A gauche, $a > 1$, l'ovale initial C est en noir, son image C_1 par la translation de vecteur $(1, 0)$ est en vert, l'ovale final C' obtenu par les racines carrées sur C_1 est en rouge. A droite, $a < 1$, avec les deux ovales en rouge.

Si l'on veut que l'ovale initial C soit la fractale de Julia, courbe frontière de l'ensemble de Julia, dont on sait qu'elle reste globalement invariante sous l'effet de la transformation, cela impose que a soit supérieur à 1. Plaçons-nous dans ce cas $a > 1$, l'ovale C' a comme demi-longueurs sur les axes $a' = \sqrt{a+1}$ et $b' = \sqrt{a-1}$, puisque C_1 a comme extrémités $a+1$ et $a-1$ sur Ox . Si l'on veut que la surface délimitée par C reste globalement invariante sous l'effet des deux fonctions $z' = \pm\sqrt{z+1}$, il est nécessaire que $a' = a$ et $b' = b$, ce qui donne $a = \varphi$ et $b = \sqrt{\varphi'}$, φ et φ' étant les nombres d'or $(\sqrt{5}+1)/2$ et $(\sqrt{5}-1)/2$. La fractale de Julia obéit à ces conditions, elle a comme extrémités sur les axes Ox et Oy les points d'affixe φ et $ib = i\sqrt{\varphi'}$ (figure 6).

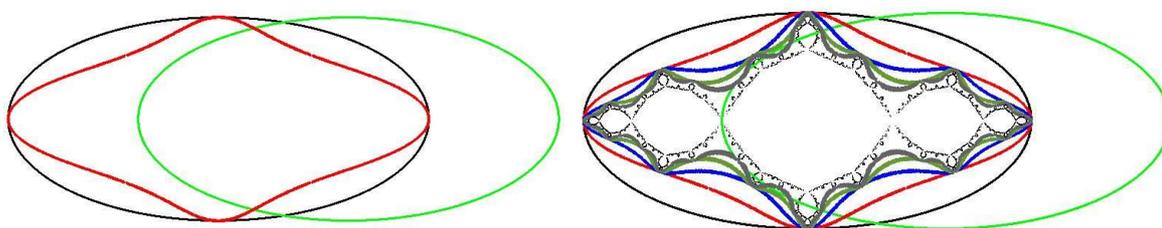


Figure 6 : A gauche, l'ellipse C en noir, dont les quatre points sur les axes vont rester invariants, puis sa tradatée C_1 en vert et sa transformée C' par racines carrées en rouge. A droite les transformées successives de C : C', C'', C''', C'''' par les fonctions $z' = \pm\sqrt{z+1}$, convergeant vers la fractale de Julia, seul ensemble restant globalement invariant par $z' = \pm\sqrt{z+1}$.

Si nous partons du point i b situé sur la courbe fractale, et que nous prenons les images successives par les deux fonctions $f(z) = \sqrt{z+1}$ et $g(z) = -\sqrt{z+1}$, les points obtenus vont être sur la fractale, et l'on sait qu'ils vont la parcourir de façon dense.

Plus précisément, lorsque l'on prend un point d'affixe z situé sur la fractale, et au-dessus de l'axe Ox , son image par f est située au-dessus, et son image par g , symétrique de la précédente, est au-dessous. On peut remplacer la deuxième image, soit le point d'affixe $g(z) = -f(z)$, par celui d'affixe $\overline{g(z)} = -\sqrt{z+1} = -\sqrt{z+1}$ qui, lui, est situé au-dessus de Ox . Par le procédé récursif prenant à chaque fois les deux images $f(z)$ et $\overline{g(z)}$, on trace ainsi la partie de la fractale de Julia située au-dessus de Ox , dont on déduit l'autre moitié par symétrie par rapport à Ox . Ce procédé s'avère un peu plus rapide que celui utilisant les images $f(z)$ et $g(z)$.

Programmation :

Dans le programme principal, il suffit d'appeler la fonction `point()` à partir du point initial $(0, b)$, soit :

```
x=0.; y=b; z.A=x; z.B=y; /* point initial */
point(z,21,black);
```

La fonction récursive `point(z)` dessine le point d'affixe z et se rappelle sur les deux images $f(z)$ et $\overline{g(z)}$. Elle se programme ainsi :

```
void point(struct complexe z, int n, Uint32 col)
{ struct complexe newz,newzz;
  if (n>0)
  { putpixel(xorig+zoom*RE(z),yorig- zoom*IM(z),col);
    putpixel(xorig+zoom*RE(z),yorig+zoom*IM(z),red);
    newz=RAC(ADD(z,OPP(c)));
    newzz=OPP(RAC(ADD(CONJ(z),OPP(c))));
    point(newz,n-1,col); point(newzz,n-1,col);
  }
}
```

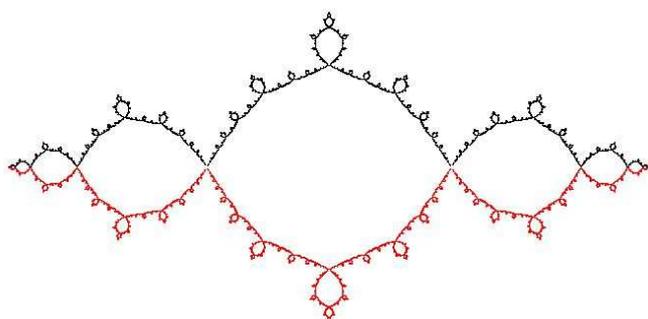


Figure 6 : Fractale de Julia obtenue par la méthode récursive.

5. Tronc de l'ensemble de Julia pour $c = -1$

A l'intérieur de cet ensemble de Julia restant globalement invariant, cherchons maintenant la partie qui reste globalement invariante tous les deux coups et non pas à chaque coup, c'est-à-dire sous l'effet deux fois répété des racines carrées. Pour cela, considérons un ovale T de centre O , ayant pour axes de symétrie Ox et Oy , avec comme demi-longueurs sur ces axes les nombres a et b .

Supposons d'abord $a > 1$, où l'ovale T reste un ovale. Le point d'abscisse a sur Ox est transformé en un point d'abscisse $\sqrt{1+\sqrt{1+a}}$ sur Ox au bout de deux coups. Pour que T reste globalement invariant, on doit avoir $a = \sqrt{1+\sqrt{1+a}}$, ce qui implique par double élévation au carré que a vérifie l'équation $a^4 - 2a^2 - a = 0$, ou encore $a^3 - 2a - 1 = 0$, puisque $a = 0$ ne convient pas. Cela s'écrit aussi $(a+1)(a^2 - a - 1) = 0$, où l'on retrouve comme seule solution positive $a = \varphi$. Mais on ne veut pas de cette solution puisque cela correspond à la fractale de Julia restant invariante à chaque coup. Il n'est pas possible pour T d'avoir $a > 1$.

Prenons alors $a < 1$. Effectuons la première transformation $z' = \pm\sqrt{z+1}$. Cela revient à faire d'abord la translation de vecteur $(1, 0)$ puis à prendre les deux racines carrées. Cela donne l'ovale T' par la translation, avec O à l'extérieur, puis deux ovales s et S symétriques par rapport à O , avec S à gauche et s à droite. Chacun de ces ovales s et S est aussi symétrique par rapport à Ox . Effectuons ensuite la deuxième transformation $z' = \pm\sqrt{z+1}$, notre objectif étant d'obtenir un ovale entourant le point O . L'ovale s est transformé en deux ovales qui ne contiennent pas le point O , ce qui ne convient pas. Seul l'ovale S qui contient le point $(-1, 0)$ devient un ovale T' entourant le point O (figure 7). Des ovales entourant le point O sont ainsi obtenus tous les deux coups suivant le processus $T \rightarrow S \rightarrow T' \rightarrow S' \rightarrow T'' \rightarrow \dots$, ou tous les deux coups $T \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow \dots$, en pratiquant la transformation répétée $z' = \pm\sqrt{1-\sqrt{z+1}}$

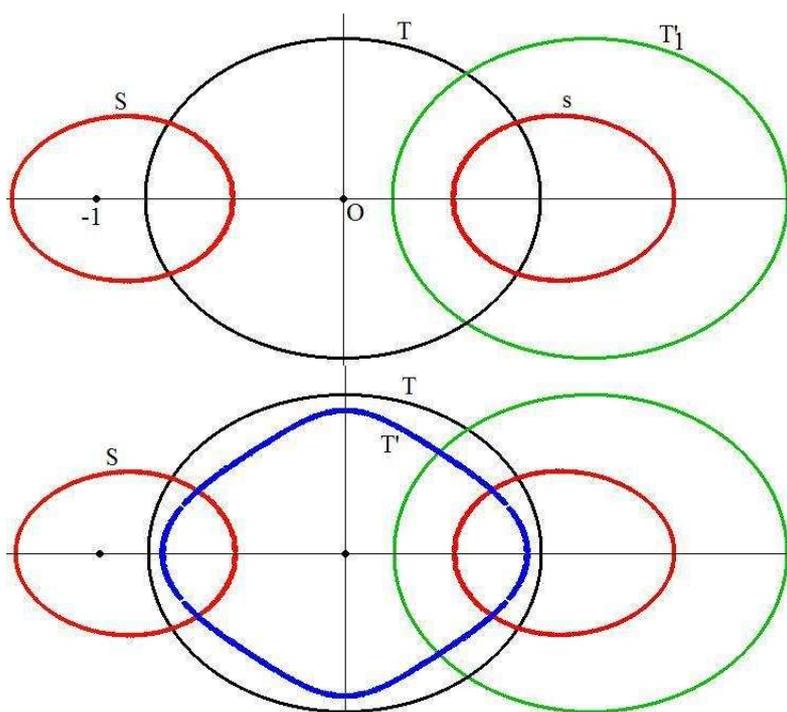


Figure 7 : En haut, T (en noir) est transformé en s et S (en rouge) par la première transformation (T_1 étant le transformé de T par la translation intermédiaire). En bas, la deuxième transformation fait passer de S à T' (en bleu).

Comme nous voulons un ensemble de points restant globalement invariant tous les deux coups, nous sommes conviés à chercher un ovale T tel que $T' = T$. Cela va imposer des conditions sur les demi-longueurs a et b de T sur les axes. L'ovale S a pour extrémités sur Ox les points d'abscisse $-\sqrt{1-a}$ et $-\sqrt{1+a}$. Comme l'action de la racine carrée positive sur S donne la moitié de T' située au-dessus de l'axe des x , T' a comme extrémités sur l'axe des x les points d'abscisse $\pm\sqrt{1-\sqrt{1-a}}$ et

comme extrémité positive sur l'axe des y le point d'ordonnée $\sqrt{\sqrt{1+a}-1}$. La condition $T' = T$ impose les conditions :

- $\sqrt{1-\sqrt{1-a}} = a$, ce qui donne après calcul $a = \varphi' \approx 0,618$
- $\sqrt{\sqrt{1+a}-1} = b$, d'où $b = \sqrt{\sqrt{\varphi}-1} \approx 0,53$

En partant d'une ellipse T ayant comme demi-longueurs d'axes ces valeurs de a et b , et en pratiquant la transformation répétée $z' = \pm\sqrt{1-\sqrt{z+1}}$ on observe la convergence vers une forme ovale dont l'intérieur est l'ensemble des points restant globalement invariant tous les deux coups (*figure 8*). Il s'agit du tronc de l'ensemble de Julia.

Cela correspond au programme suivant. On est parti de l'ellipse T avec les valeurs de a et b trouvées ci-dessus. Puis on lance une boucle où à chaque étape i , on pratique deux fois de suite la double transformation, en effaçant à chaque fois la courbe précédente. Au début de chacune de ces étapes, on aura une courbe dessinée en noir, sur fond blanc.

```
zoom=450.;xorig=400;yorig=300;
xc=-1.;yc=0.; c.A=xc; c.B=yc;
for(t=0;t<2.*M_PI;t+=0.001) /* l'ellipse initiale avec son a et son b */
{ x = 0.618*cos(t); y= 0.53*sin(t); putpixel(xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,black);}
for(i=1;i<=4;i++)
{ for(xe=0;xe<800;xe++) for(ye=0;ye<600;ye++) if (getpixel(xe,ye)==black)
  { x=(double)(xe-xorig)/zoom; y=(double)(yorig-ye)/zoom; z.A=x; z.B=y;
  newz=OPP(RAC(ADD(z,OPP(c)))); z.A=newz.A; z.B=newz.B;
  /* double transformation */
  newz=RAC(ADD(z,OPP(c))); putpixel(xorig+zoom*RE(newz),yorig-zoom*IM(newz),red);
  newz=OPP(RAC(ADD(z,OPP(c)))); putpixel(xorig+zoom*RE(newz),yorig-zoom*IM(newz),red);
  }
  for(xe=0;xe<800;xe++) for(ye=0;ye<600;ye++) if (getpixel(xe,ye)==black) putpixel(xe,ye,white);
  for(xe=0;xe<800;xe++) for(ye=0;ye<600;ye++) if (getpixel(xe,ye)==red) /* double transformation */
  { x=(double)(xe-xorig)/zoom; y=(double)(yorig-ye)/zoom; z.A=x; z.B=y;
  newz=OPP(RAC(ADD(z,OPP(c)))); z.A=newz.A; z.B=newz.B;
  newz=RAC(ADD(z,OPP(c))); putpixel(xorig+zoom*RE(newz),yorig-zoom*IM(newz),black);
  newz=OPP(RAC(ADD(z,OPP(c)))); putpixel(xorig+zoom*RE(newz),yorig-zoom*IM(newz),black);
  }
  for(xe=0;xe<800;xe++) for(ye=0;ye<600;ye++) if (getpixel(xe,ye)==red) putpixel(xe,ye,white);
  SDL_Flip(screen);pause();
}
```

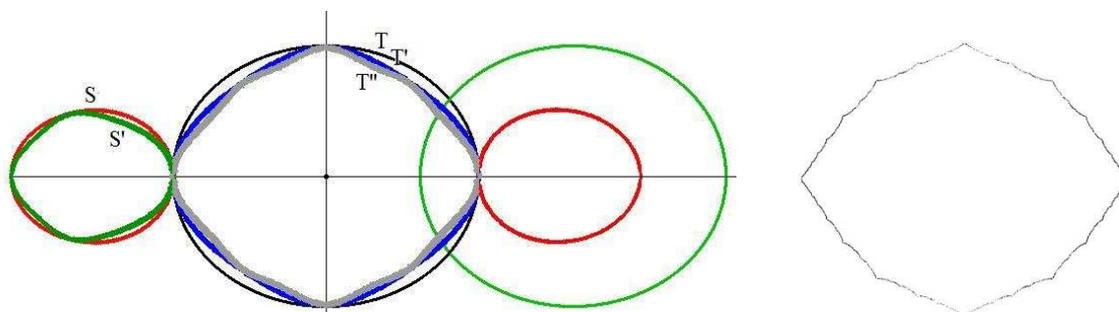


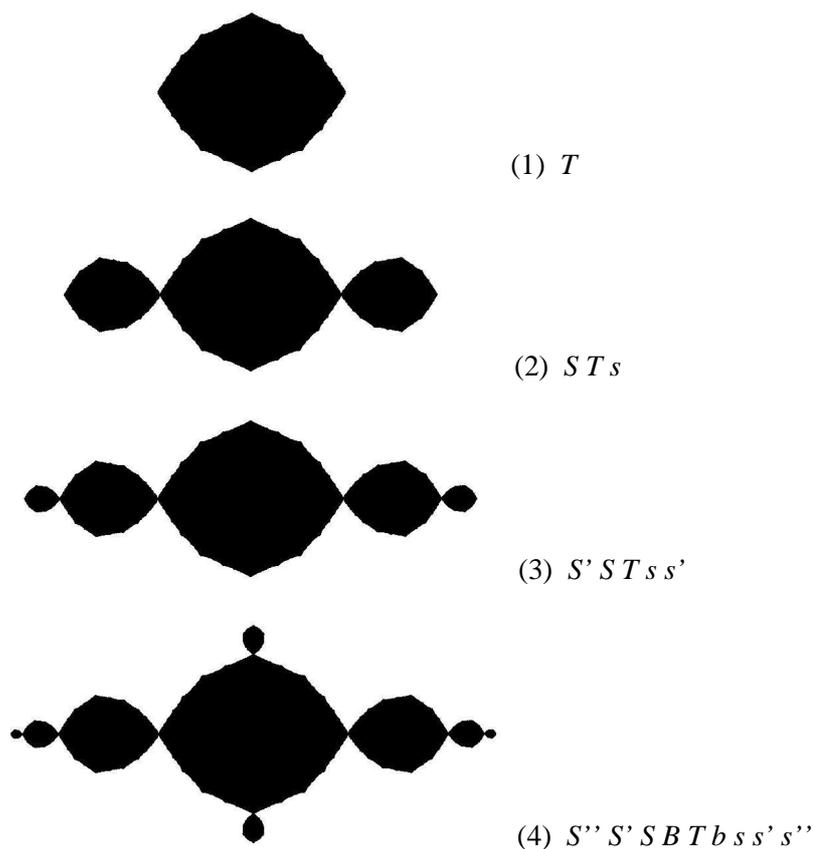
Figure 8 : A gauche, $T \rightarrow T' \rightarrow T''$ en répétant la double transformation à partir de l'ellipse T . A droite, la forme obtenue après plusieurs répétitions.

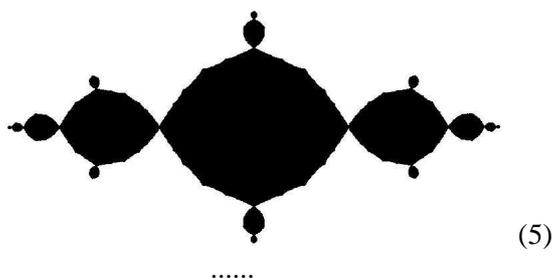
Cette méthode de construction du tronc étant assez laborieuse, nous en donnerons d'autres dans ce qui suit. Mais d'abord nous allons voir qu'à partir du tronc, toute la fractale de Julia peut être construite, morceaux par morceaux.

6. Le tronc, générateur de la fractale de Julia, et le collage des morceaux pour $c = -1$

Comme on vient de le voir, l'action répétée de la double fonction $z' = \pm\sqrt{z+1}$ transforme le tronc T en deux ovales S et s , le premier à gauche et l'autre à droite, soit $T \rightarrow S s$ (au sens de S union s), ou encore $T \rightarrow S T s$ en conservant le dessin précédent. Puis à partir de là, S devient T , et s donne deux nouveaux ovales que nous notons S' et s' , soit $S T s \rightarrow S' S T s s'$. Ensuite, S' donne deux transformés B et b à la verticale du tronc, l'un en haut et l'autre en bas, et s' donne deux ovales S'' et s'' , soit $S' S T s s' \rightarrow S'' S' S B T b s s' s''$. Nous appellerons bulbes les ovales B et b , situés le long de l'axe des y , pour les distinguer de ceux comme S et s le long de l'axe des x . A son tour, S'' donne deux bulbes B' et b' , B donne deux bulbes accrochés à S et s , tout comme b , et s'' donne deux ovales S''' et s''' . Et ainsi de suite (figure 9).

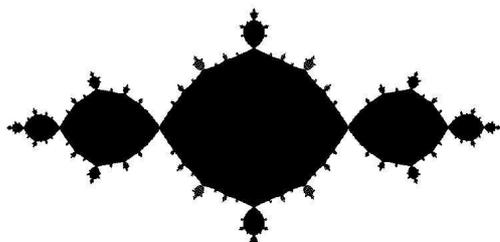
On constate que chaque nouveau morceau vient se coller à un ancien morceau. Ce phénomène de tangence, ou de collage ponctuel, commence avec s et S tangents à T . En effet, on a vu que l'extrémité gauche limite de s , sur l'axe des x , avait pour abscisse $\sqrt{1-\varphi'} = \sqrt{\varphi'^2} = \varphi'$ et que le tronc avait aussi comme extrémité droite limite le point d'abscisse φ' . Et il ne peut pas y avoir de points communs puisque chaque morceau a ses propres caractéristiques d'invariance. Le tronc T , ensemble de tous les points invariants tous les deux coups exactement, ne peut pas avoir de points communs avec s ou S . Le collage de s et T se répercute ensuite sur leurs transformés, avec $s \rightarrow S' s'$ et $T \rightarrow S s$, et S' est collé à





(5)

.....



(10)

Figure 9 : A partir du tronc, fabrication étape par étape des nouveaux morceaux à partir des précédents sous l'effet de la double fonction répétée $z' = \pm\sqrt{z+1}$.

S tout comme s' à s . Il en est de même avec les bulbes : à partir de S' collé à S , avec $S' \rightarrow B$ et $S \rightarrow T$, B et b viennent se coller sur T . Cela se poursuit pour tous les ovales et tous les bulbes. Il est remarquable que la seule tangence de s et T se répercute sur l'infinité des morceaux.¹

Il ne reste plus qu'à constater que l'infinité des morceaux fabriqués étape après étape forment un ensemble de taille finie qui reste globalement invariant sous l'effet de $z' = \pm\sqrt{z+1}$. Il s'agit par définition de l'ensemble rempli de Julia-Fatou. Il reste à préciser comment fabriquer de façon autonome les divers ovales et bulbes, sans les faire dépendre de leurs prédécesseurs. Là encore, tout va se déduire de la construction du tronc T .

6.1. Première méthode pour construire la frontière du tronc T

Il suffit d'utiliser le processus de construction où T est d'abord transformé en S par $z' = \sqrt{z+1}$ puis S transformé en T par $z' = \pm\sqrt{z+1}$. On passe donc de T à T par l'action répétée de $z' = \pm\sqrt{1-\sqrt{z+1}}$. En partant d'un point de la frontière de T , comme le point $(0, b)$, les transformés successifs de ce point sont aussi sur la frontière, et l'on observe qu'ils la parcourent de façon dense. Ce que fait le programme suivant :

```
xc=-1.;yc=0.; c.A=xc; c.B=yc;
z.A=0.; z.B=sqrt( sqrt( (1.+sqrt(5.))/2.)-1.);
point(z,12,black);
```

Avec la fonction `point()` :

¹ Les ovales s, s', s'', \dots , situés à droite le long de Ox ont pour extrémités droites successives :

$\sqrt{1+\varphi'}, \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi'}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi'}}}, \dots$, ce qui donne à la limite φ . Notons que leur longueur sur Ox est de plus en plus faible au fil des étapes. Quant aux bulbes B, B', B'', \dots , situés le long de Oy au dessus du tronc T , ils sont les transformés par $z' = \sqrt{z+1}$ des ovales de gauche S', S'', S''', \dots , dont l'extrémité gauche converge vers $-\varphi$. L'extrémité verticale des bulbes est donc $\sqrt{1-\varphi} = i\sqrt{\varphi-1} = i\sqrt{\varphi'}$. La hauteur maximale atteinte par ces bulbes est φ' , et l'on peut vérifier que leur longueur verticale est de plus en plus petite. Finalement l'ensemble de Julia a bien ses extrémités horizontale et verticale en $\pm\varphi$ et $\pm\varphi'$, mais cela ne suffit pas pour prouver qu'il est inscrit dans une ellipse d'axes Ox et Oy avec ces mêmes extrémités sur les axes.

```

void point2(struct complexe z, int n, Uint32 col)
{ struct complexe newz,newzz;
  if (n>0)
    { filldisc(xorig+zoom*RE(z),yorig- zoom*IM(z),1,col);
      newz=RAC(SOUSTR(OPP(c), RAC(ADD(z,OPP(c)))));
      newzz=OPP(RAC(SOUSTR(OPP(c),(RAC(ADD(z,OPP(c)))))));
      point(newz,n-1,col); point(newzz,n-1,col);
    }
}

```

Mais il existe une autre méthode, un peu plus performante, mais qui va surtout nous permettre de prouver que les points successifs obtenus décrivent de façon dense la frontière de T .

6.2. Deuxième méthode de construction et linguistique du tronc

Intéressons-nous à la partie du tronc située au-dessus de l'axe des x , en jouant sur les symétries du tronc T par rapport aux deux axes. Partons du point d'affixe ib sur la frontière. Son transformé sur la partie supérieure de la frontière de l'ovale s est $\sqrt{1+ib}$. Puis on prend l'opposé du conjugué, soit $-\sqrt{1-ib}$, qui est aussi le point symétrique par rapport à Oy . Ce point est sur S , puisque l'union de s et S est symétrique non seulement par rapport à Ox mais aussi par rapport à Oy . Le transformé de ce point est situé sur la partie supérieure de T , et a pour affixe $\sqrt{1-\sqrt{1-ib}}$ (figure 10). Il en est de même pour son symétrique par rapport à Oy , soit $-\sqrt{1-\sqrt{1+ib}}$. Puis l'on recommence avec chacun de ces deux points. Leurs transformés seront aussi sur le tronc T . Cela revient à effectuer de façon récursive les deux transformations :

$$\begin{cases} f(z) = \sqrt{1-\sqrt{1+z}} = \sqrt{1-\sqrt{1+\bar{z}}} \\ g(z) = -\sqrt{1-\sqrt{1+z}} \end{cases} \text{ à partir du point } ib.$$

On obtient ainsi une infinité de points tous situés sur la partie supérieure de T , dont on observe qu'ils la recouvrent de façon dense. Pour avoir la moitié inférieure de T , il suffit de faire une symétrie par rapport à Ox .

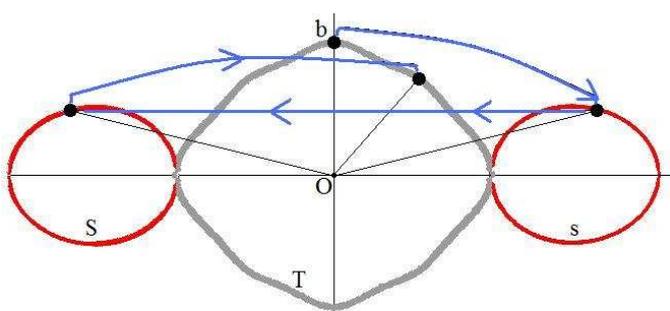


Figure 10 : Les transformés successifs du point $(0, b)$ aboutissant à un point du tronc T sous l'effet de la fonction f .

Appelons f et g les deux fonctions définissant la récurrence précédente, c'est-à-dire

$$\begin{cases} f(z) = \sqrt{1-\sqrt{1+z}} \\ g(z) = -\sqrt{1-\sqrt{1+z}} \end{cases}$$

où g n'est autre que la fonction $-\sqrt{1+z}$ répétée deux fois, et où $f(z)$ s'obtient en faisant d'abord $z_1 = \sqrt{1+z}$ puis en prenant $z_2 = -z_1$ dont l'image est le symétrique de celle de z_1 par rapport à Oy , et enfin en faisant $\sqrt{1+z_2}$ (figure 11).

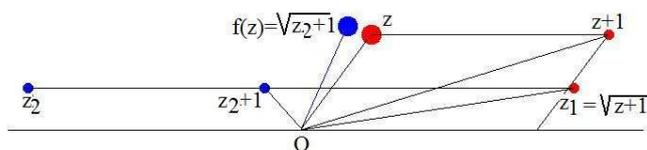


Figure 11 : Passage progressif de z à $f(z)$.

Pour simplifier, nous appellerons f le point $f(ib)$, g le point $g(ib)$, et 0 le point ib . Les points f et g sont de part et d'autre de O sur le tronc et symétriques par rapport à Oy . Précisons que le fait de faire agir f sur un point de la partie supérieure du tronc donne un point situé à droite de Oy , et l'action de g envoie un point vers la partie gauche.

Prenons trois points A, B, C sur la frontière du tronc, avec des angles dans l'ordre croissant à partir de O . En décomposant l'action de la fonction f , la translation préserve cet ordre, ainsi que le passage à la racine carrée, qui divise les angles par deux. Mais la symétrie par rapport à Oy inverse cet ordre, et la translation suivie du passage à la racine carrée maintient l'ordre inversé. On passe ainsi des points A, B, C aux points $A' B' C'$ avec une inversion de l'ordre, sous l'effet de la fonction f (figure 12).

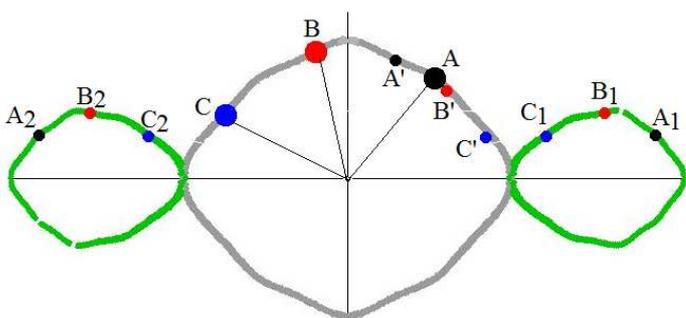


Figure 12 : Action de la fonction f sur trois points du tronc, aboutissant à un renversement de l'ordre des points.

Reprenons les trois points $g, 0, f$ disposés de gauche à droite sur le tronc. Sous l'action de f , ils deviennent fg, f, ff de droite à gauche, ou ff, f, fg de gauche à droite, cela sur la partie droite du tronc. Par symétrie, on obtient gg, g, gf sur la partie gauche. Faisons à nouveau agir f sur ces points. A partir de f, ff, fg on trouve ffg, ff, fff de gauche à droite, et à partir de gg, g, gf on trouve fgf, fg, fgg de gauche à droite. D'autre part, fff est à gauche de f et fgf à droite de f , soit fff, f, fgf dans cet ordre, puisqu'ils sont les transformés de $0, ff$ et fg dans cet ordre. On a ainsi obtenu quatre nouveaux points dans cet ordre (de gauche à droite), ces points s'intercalant entre les précédents. Par symétrie autour de Oy , on obtient de gauche à droite les quatre points ggg, ggf, gff, gfg dans cet ordre, sur la partie gauche (figure 13).

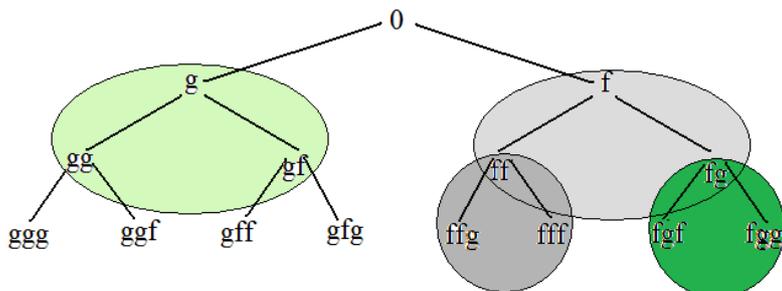


Figure 13 : Les points gf à la première étape, les points gg, gf, ff, fg de la deuxième étape, et $ggg, ggf, gff, gfg, ffg, fff, fgf, fgg$ à la troisième étape, avec les passages du gris au gris et du vert au vert.

Il en est ainsi à chaque passage d'une étape à la suivante. On aboutit au développement d'un arbre binaire où à l'étage k se trouvent tous les points de longueur k . Précisons que les points d'un étage s'intercalent entre les points des étages précédents. Le passage d'un étage au suivant s'effectue suivant la règle suivante :

* On lit tous les points à l'étage k de gauche à droite, en leur ajoutant un g devant, et les points obtenus sont écrits de gauche à droite, ce qui donne la partie gauche du nouvel étage $k + 1$.

* On lit tous les points à l'étage k de droite à gauche, en leur ajoutant un f devant, et les points obtenus sont écrits de gauche à droite, ce qui donne la partie droite de l'étage $k + 1$.

Par exemple, à partir de l'étage 3 : $ggg\ ggf\ gff\ gfg\ ffg\ fff\ fgf\ fgg$, on trouve pour l'étage 4 :
 $gggg\ gggf\ ggff\ ggfg\ gffg\ gfff\ gfgf\ gfgg\ ffgg\ ffgf\ ffff\ fffg\ fgfg\ fgff\ fggf\ fggg$.

Intéressons-nous aux points limites, à gauche $gggg\dots$, à droite $fgggg\dots$. Or $fgggg\dots$ n'est autre que $\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\dots}}}}$, à savoir le nombre réel φ' . le point $gggg\dots$ étant alors $-\varphi'$. La suite des points obtenus lors de l'épanchement infini de l'arbre binaire s'étend jusqu'à l'axe des x . Prenons maintenant le point le plus à gauche du sous-arbre droit, soit $ffgggg\dots$, ou encore $f(fgggg\dots) = f(\varphi') = i\sqrt{\sqrt{\varphi}-1} = ib$. Le développement du sous-arbre droit se fait donc entre 0 et φ' , et de même à gauche, ne laissant aucun trou vacant entre $-\varphi'$ et φ' . Grâce au procédé dichotomique, chaque point déjà obtenu donne naissance à deux nouveaux points s'immisçant de part et d'autre de lui dans l'intervalle qui l'entoure, sans empiéter sur les intervalles des voisins. Cela prouve que l'infinité de points obtenus couvre de façon dense la partie de la frontière du tronc T située au-dessus de Ox , que l'on peut ainsi contruire rapidement de façon récursive. Comme le fait le programme suivant :

```
xc=-1.;yc=0.; c.A=xc; c.B=yc; /* point (-1, 0). OPP(c) est le nombre réel 1 */
z.A=0.; z.B=sqrt( sqrt( (1.+sqrt(5.))/2.)-1.); /* point d'affixe ib */
point(z,12,red); /* frontière du tronc T */
SDL_Flip(screen);pause();
floodfill(xorig,yorig,red,red); /* remplissage du tronc T */
SDL_Flip(screen);pause();

void point(struct complexe z, int n,Uint32 col) /* fonction récursive fabriquant les deux successeurs de z */
{ struct complexe newz,newzz;
  if (n>0)
  { filldisc(xorig+zoom*RE(z),yorig- zoom*IM(z),1,col); /* dessin du point d'affixe z */
    filldisc(xorig+zoom*RE(z),yorig+zoom*IM(z),1,col); /* dessin du symétrique par rapport à Ox */
    newz=RAC(SOUSTR(OPP(c), RAC(ADD(CONJ(z),OPP(c)))));
    newzz=OPP(RAC(SOUSTR(OPP(c),(RAC(ADD(z,OPP(c)))))));
    point(newz,n-1,col); point(newzz,n-1,col); /* double rappel de la fonction sur les deux points */
  }
}
```

6.3. Formules de construction des morceaux

Partons de la formule du tronc dont la frontière supérieure est obtenue par l'action répétée des deux fonctions :

$$\begin{cases} f(z) = \sqrt{1-\sqrt{1+z}} \\ g(z) = -\sqrt{1-\sqrt{1+z}} \end{cases} \quad \text{à partir du point } z_0 = ib$$

Quant à la frontière inférieure, elle s'obtient en faisant une symétrie par rapport à l'axe des x . Et il en est ainsi pour tous les ovales qui présentent cette symétrie.

6.3.1. Premiers ovales s et S

Considérons un point d'affixe z sur cette frontière, il devient, sous l'effet de f , $z' = f(z)$, lui aussi sur la frontière. Sachant que l'ovale s se déduit de T en appliquant $\sqrt{1+z}$, le point d'affixe $Z = \sqrt{1+z}$ est sur la frontière de s tout comme $Z' = \sqrt{1+z'}$. Il reste à trouver comment passer de Z à Z' :

$Z' = \sqrt{1+z'} = \sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{1+\bar{z}}}} = \sqrt{1+\sqrt{1-\bar{Z}}}$ car $Z = \sqrt{1+z}$ entraîne $1+z = Z^2$, $1+\bar{z} = \bar{Z}^2$ et $\sqrt{\bar{Z}^2} = \bar{Z}$ car on se place sur la partie supérieure de l'ovale. On vient de trouver la fonction associée à f mais jouant sur s . On dit que cette fonction est la conjuguée de f par le biais de $\sqrt{1+z}$. Et ce que l'on a fait avec f peut aussi être fait avec g , ce qui donne

$$Z' = \sqrt{1+z'} = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1+z}}} = \sqrt{1-\sqrt{1-Z}}$$

Finalement la frontière supérieure de l'ovale s s'obtient en faisant jouer de façon répétée les fonctions :

$$\begin{cases} z' = \sqrt{1+\sqrt{1-\bar{z}}} \\ z' = \sqrt{1-\sqrt{1-z}} \end{cases} \text{ à partir du point } z_0 = \sqrt{1+ib}$$

Considérons maintenant S comme symétrique de s par rapport à (Oy) . On passe de z ou z' sur s à Z ou Z' sur S par $Z = -\bar{z}$ ou $Z' = -\bar{z}'$. Avec $z' = \sqrt{1+\sqrt{1-\bar{z}}}$, on trouve $Z' = -\sqrt{1+\sqrt{1+\bar{Z}}}$, et avec $z' = \sqrt{1-\sqrt{1-z}}$ cela donne $Z' = -\sqrt{1-\sqrt{1+Z}}$.

La formule donnant la partie supérieure de la frontière de S est donc :

$$\begin{cases} z' = -\sqrt{1+\sqrt{1+\bar{z}}} \\ z' = -\sqrt{1-\sqrt{1+z}} \end{cases} \text{ à partir de } z_0 = -\sqrt{1-ib}$$

6.3.2. Deuxièmes ovales S' et s'

On passe de s à s' en faisant jouer la fonction $\sqrt{1+z}$. De la formule donnant s , on trouve la formule conjuguée pour s' , par le même type de calcul que précédemment :

$$\begin{cases} z' = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2-\bar{z}^2}}} \\ z' = \sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{2-z^2}}} \end{cases} \text{ à partir de } z_0 = \sqrt{1+\sqrt{1+ib}}$$

Puis on conjugue ces fonctions par le biais de $Z = -\bar{z}$ pour avoir la formule de S' :

$$\begin{cases} z' = -\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2-\bar{z}^2}}} \\ z' = -\sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{2-z^2}}} \end{cases} \text{ à partir de } z_0 = -\sqrt{1+\sqrt{1-ib}}$$

Pour avoir les parties inférieures de ces ovales, il suffit de faire une symétrie par rapport à OX . Mais on peut aussi relancer les fonctions précédentes à partir de $z_0 = \sqrt{1-\sqrt{1+ib}}$ pour s' et $z_0 = -\sqrt{1+\sqrt{1+ib}}$ pour S' .

6.3.3. Premiers bulbes

Le bulbe B est le transformé de S' par $\sqrt{1+z}$. On en déduit sa formule de construction :

$$\begin{cases} z' = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2\bar{z}^2 - \bar{z}^4}}} } \\ z' = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 - \sqrt{1 + 2z^2 - z^4}}} } \end{cases} \quad \text{à partir de } z_0 = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 - ib}}}$$

mais il s'agit là de la partie droite du bulbe, sa partie gauche s'obtenant par symétrie par rapport à Oy .

Le bulbe b est, si l'on veut, le conjugué de B , d'où la formule pour sa partie droite :

$$\begin{cases} z' = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2z^2 - z^4}}} } \\ z' = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 - \sqrt{1 + 2\bar{z}^2 - \bar{z}^4}}} } \end{cases} \quad \text{à partir de } z_0 = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 + ib}}}$$

Certains des bulbes suivants n'ont plus de symétrie par rapport aux axes de coordonnées. Pour avoir les deux parties de leur frontière, il convient d'utiliser deux valeurs initiales de z_0 , à partir de celles vues précédemment, par exemple pour S' . Ainsi le bulbe B donne naissance à deux bulbes qui vont se coller symétriquement par rapport à Oy , l'un sur S , l'autre sur s . On constate notamment que les bulbes de plus en plus petits qui vont se coller progressivement sur le tronç T ont des points de contact qui correspondent au développement, étage par étage, de l'arbre binaire ayant défini la frontière du tronç T .

On a de la sorte réussi à démonter l'ensemble de Julia-Fatou, à le mettre en pièces détachées, chaque pièce ayant sa propre formule sous forme de récurrences (*figure 14*). Les formules s'allongent au fur et à mesure, mais l'algorithme est facile à mettre en oeuvre et à réaliser sur ordinateur. Répétons que tout provient de la seule formule du tronç.

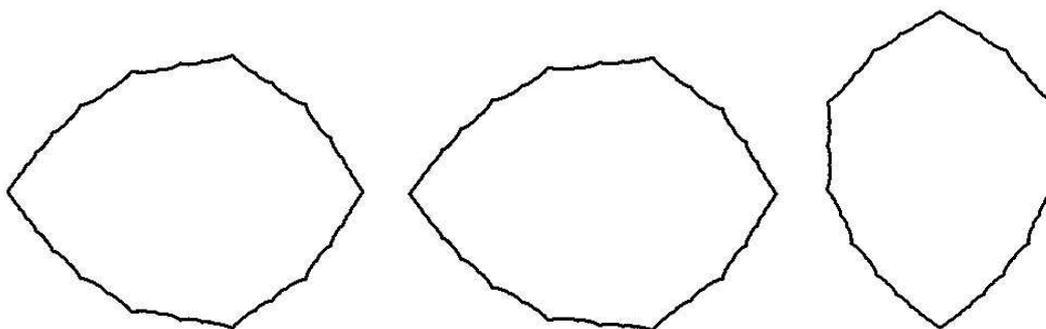


Figure 14 : De gauche à droite, tracé de l'ovale s , de l'ovale s' et du bulbe B , avec des zooms de plus en plus élevés.

6.4. Non dérivabilité de la frontière du tronç

Par non dérivabilité, nous entendons que la courbe frontière de T admet en une infinité de ses points des ruptures de pente de part et d'autre. Pour cela nous allons nous placer au point limite d'abscisse $-\varphi'$ sur Ox , et montrer que la courbe présente en son voisinage, au-dessus et au-dessous de lui, une rupture de pente. Cette rupture se répercute ensuite sur ses transformés sous l'effet répété des fonctions f et g , ou par l'action de la fonction inverse telle que $z' = z^2 - 1$, et cela une infinité de fois. Et comme on a vu que le tronç T engendre toute la fractale de Julia, celle-ci va présenter partout des ruptures de pente.

Considérons la fonction $h(z) = -\sqrt{1+z}$. Celle-ci admet le point fixe attracteur $-\varphi'$.² Il en est de même pour la fonction $g(z) = -\sqrt{1-\sqrt{1+z}} = h^2(z)$. En partant du point ib sur Oy , les itérés successifs sous l'effet de g convergent bien vers le point $A(-\varphi', 0)$ (figure 15).

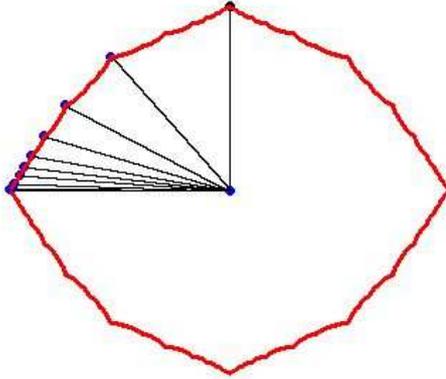


Figure 15 : Action répétée de la fonction g à partir du point ib sur la frontière du tronç.

Par exemple, à la 10^{ème} itération, on trouve le point M d'affixe z , de coordonnées $x = -0,6167$, $y = 0,0021$. Ainsi le segment $[AM]$ fait un angle de l'ordre de 57° avec l'axe horizontal. Le vecteur \mathbf{AM} a pour affixe $z + \varphi'$. Sous l'effet de g , z devient $z' = -\sqrt{1-\sqrt{1+z}}$ dont l'image est M' . Le vecteur \mathbf{AM}' a pour affixe $z' + \varphi'$. Faisons le calcul :

$$\begin{aligned} z' + \varphi' &= -\sqrt{1-\sqrt{1+z}} + \sqrt{1-\sqrt{1-\varphi'}} \text{ en utilisant la définition de } \varphi' \\ &= \frac{-\sqrt{1-\varphi'} + \sqrt{1+z}}{\sqrt{1-\sqrt{1-\varphi'}} + \sqrt{1-\sqrt{1+z}}} \approx \frac{\sqrt{1-\varphi'} - \sqrt{1+z}}{2\varphi'} \text{ car avec le point } M \text{ très proche de } A, \text{ on peut} \end{aligned}$$

assimiler $\sqrt{1-\sqrt{1+z}}$ et φ' .

Recommençons, toujours grâce à la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1-\varphi'} - \sqrt{1+z}}{2\varphi'} = \frac{z + \varphi'}{2\varphi'(\sqrt{1-\varphi'} + \sqrt{1+z})} \approx \frac{z + \varphi'}{4\varphi'^2} \text{ car } z \text{ est très proche de } -\varphi'.$$

On trouve que $\mathbf{AM}' \approx \frac{1}{4\varphi'^2} \mathbf{AM}$. Ainsi \mathbf{AM}' fait le même angle que \mathbf{AM} avec l'axe des x , et cela

se répète avec les itérés suivants. Finalement, le point A de la courbe frontière a une demi-tangente faisant un angle de 57° au-dessus de (Ox) , et aussi au-dessous de (Ox) à cause de la symétrie du tronç. On a bien une rupture de pente très nette.

Ce que nous avons fait pour $c = -1$, nous allons maintenant le généraliser à d'autres valeurs réelles de c .

7. Généralisation pour c réel négatif

Posons $c' = -c$. Lorsque c' varie de 0 à 2, avec notamment le cas particulier précédent où $c' = 1$, on sait, grâce à B. Mandelbrot, que les ensembles de Julia-Fatou forment une surface connectée de points. Et sur cet intervalle, il se produit un phénomène de bifurcations pour les points fixes ou

² Un point fixe z vérifie $z = -\sqrt{1+z}$, d'où $z^2 - z - 1 = 0$, $z = \varphi$ ou $z = -\varphi'$. Mais φ ne convient pas, il reste $z = -\varphi'$. On constate que $|h'(z)| = 1/(2\varphi') < 1$. Le point est attracteur.

cycliques de la fonction $z' = z^2 + c$, à l'image de l'application logistique. Au-delà de $c' = 2$, il subsiste seulement une poussière de points. Rappelons que ces ensembles ont tous pour centre O et pour axes de symétries Ox et Oy . Nous supposons dans ce qui suit que c' reste compris entre 0 et 2.

7.1. Points extrêmes de la fractale

Considérons un ovale de centre O , d'axes de symétrie Ox et Oy , ayant comme demi-longueurs a et b sur les axes. Nous voulons qu'il reste globalement invariant sous l'effet de la fonction $z' = \pm\sqrt{z+c'}$. Si $a < c'$, il est transformé en deux ovales, et cela n'est pas acceptable quand nous voulons avoir un ovale compatible avec une fractale de Julia-Fatou. Il est nécessaire que $a > c'$. Dans ce cas, l'ovale est transformé en un ovale ayant les mêmes symétries, avec comme demi-longueurs sur les axes :

$$a' = \sqrt{a+c'} \text{ et } b' = \sqrt{a-c'}.$$

Imposons que $a' = a$ et $b' = b$, ce qui entraîne d'abord que $a^2 - a - c' = 0$, d'où

$a = \frac{1+\sqrt{1+4c'}}{2}$, l'autre racine étant négative. Comme la fonction $h(x) = x^2 - x - c'$ est négative entre les racines, et que $h(c') = c'(c'-2) < 0$ pour c' entre 0 et 2, la condition $a > c'$ est bien remplie.

On a d'autre part $b = \sqrt{a-c'}$.

Nous venons d'obtenir les points de l'ensemble de Julia situés sur les axes, puisque celui-ci est par définition l'ensemble globalement invariant sous l'effet de $z' = \pm\sqrt{z+c'}$.³

7.2. Points fixes et points périodiques

Rappelons que les points fixes ou les cycles fixes de points sont les mêmes pour la fonction $z' = \pm\sqrt{z+c'}$ et pour son inverse $z' = z^2 + c = z^2 - c'$, et que s'ils sont attracteurs pour l'une, ils sont repousseurs pour l'autre.

Utilisons la fonction la plus simple dans le cas présent : $z' = z^2 - c'$. Ses points fixes vérifient $z^2 - z - c' = 0$, ce qui donne deux points fixes :

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{1+4c'}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1-\sqrt{1+4c'}}{2}$$

En posant $z' = f(z)$, on a $f'(z) = 2z$. On en déduit que $|f'(z_1)| > 1$, le point z_1 est repousseur. D'autre part, $|f'(z_2)| = |1-\sqrt{1+4c'}|$. Quand c' va de 0 à 2, $|f'(z_2)|$ va de 0 à 2, et vaut 1 pour $c' = 3/4$. Ainsi, pour $c' < 3/4$, $|f'(z_2)| < 1$, le point est attracteur, et pour $c' > 3/4$, $|f'(z_2)| > 1$, le point est repousseur.

Passons maintenant aux points cycliques d'ordre deux, qui sont aussi les points fixes de la fonction f répétée deux fois. Ils vérifient l'équation $z^4 - 2c'z^2 + c'^2 = 0$, qui s'écrit aussi, puisque l'on retrouve les points fixes précédents : $(z^2 - z - c')(z^2 + z + 1 - c') = 0$. Le trinôme $z^2 + z + 1 - c'$ admet deux racines z_3 et z_4 égales à $\frac{-1 \pm \sqrt{4c'-3}}{2}$ réelles ou complexes selon que c' est supérieur ou inférieur à $3/4$.

Avec $f^2(z_3)' = f'(f(z_3))f'(z_3) = 2z_3 \cdot 2z_3 = 4(1-c')$, tout comme $f^2(z_4)'$, on trouve que $|f^2(z_3)'| < 1$ pour c' compris entre $3/4$ et $5/4$ et dans ce cas le cycle $z_3 z_4$ est attracteur. Sinon il est repousseur.

³ Ce ne démontre pas pour autant que la fractale est bordée et encadrée par le rectangle ayant pour demi-longueur des côtés les valeurs de a et b trouvées, ni non plus qu'elle est à l'intérieur de l'ellipse ayant comme demi-longueurs de ses axes a et b .

On pourrait continuer de la sorte en suivant le schéma classique des bifurcations mais les calculs se compliquent singulièrement.

Résumons. Sous l'action répétée de $z' = z^2 - c'$:

- pour $c' < 3/4$, le point z_1 est attracteur
- pour c' entre $3/4$ et $5/4$, le cycle $z_3 z_4$ est attracteur
- juste après $5/4$, on aura un cycle attracteur de 4 points.

Cela se vérifie expérimentalement (*figure 16*).

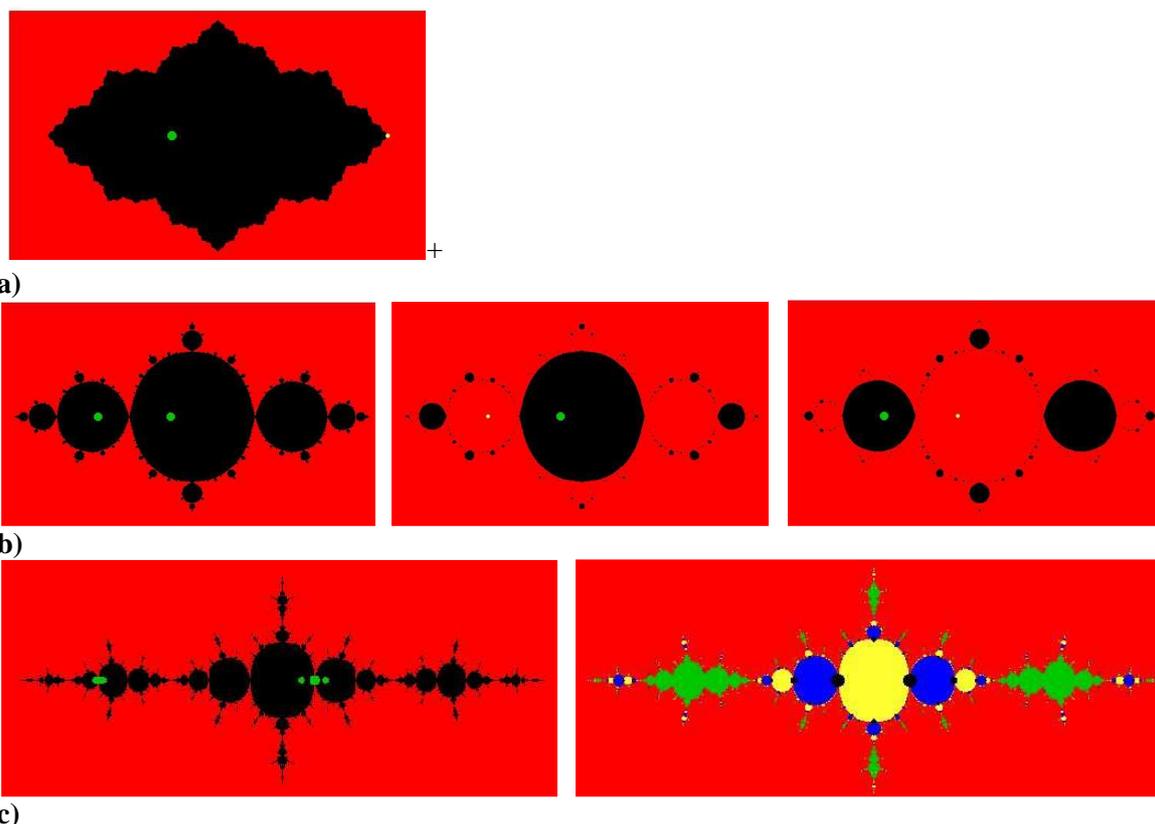


Figure 16 : (a) pour $c' = 0,5$, le point fixe z_1 attracteur pour la fonction $f: z' = z^2 - c'$, et son bassin d'attraction en noir, qui est l'ensemble rempli de Julia-Fatou ; (b) pour $c' = 0,85$, à gauche le cycle attracteur des deux points fixes z_3 et z_4 en vert, et leur bassin d'attraction en noir, au centre le bassin d'attraction de z_3 sous l'effet de la fonction répétée deux fois f^2 , à droite le bassin d'attraction de z_4 sous l'effet de f^2 ; (c) pour $c' = 1,26$, à gauche le cycle attracteur des quatre points en vert et leur bassin d'attraction en noir, à droite, les bassins d'attraction de chacun des quatre points sous l'effet de f^4 , en bleu, jaune, vert et noir.

Prenons maintenant la fonction telle que $z' = -\sqrt{z + c'}$, qui est l'inverse partiel de la fonction précédente. On trouve comme seul point fixe le point z_2 d'affixe réelle $\frac{1 - \sqrt{1 + 4c'}}{2}$ qui est attracteur pour $c' > 3/4$ et repousseur pour $c' < 3/4$.⁴ Quant au cycle $z_3 z_4$, il est repousseur pour c' entre $3/4$ et $5/4$ et attracteur pour $c' < 3/4$. Cela nous servira dans ce qui suit.

⁴ On ne peut pas trouver d'autres points fixes que ceux de la fonction inverse $z' = z^2 + c$. Mais dans le cas présent, le point fixe z_1 ne convient pas car ce nombre est un réel positif, ce qui n'est pas possible pour $z = -\sqrt{z + c'}$.

7.3. Recherche de l'ensemble T globalement invariant tous les deux coups et pas à chaque coup

Si cet ensemble existe, il s'agit d'une partie de l'ensemble précédent, avec les mêmes axes de symétrie. Considérons un ovale T de demi-longueurs a et b sur les axes. Deux cas se présentent selon que a est supérieur ou inférieur à c' .

Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir $a > c'$. Car si tel était le cas, le transformé de l'ovale serait un ovale avec O restant à l'intérieur. Le point extrême $(a, 0)$ aurait un transformé d'abscisse positive $\sqrt{a+c'}$. On doit alors supposer que a est différent de $\sqrt{a+c'}$ sinon on retomberait sur toute la fractale de Julia, comme on l'a vu dans ce qui précède. Puis ce nouvel ovale aurait comme transformé un ovale avec comme demi-longueur $\sqrt{c'+\sqrt{a+c'}}$ sur l'axe des x . Si l'on veut un ovale qui resterait globalement invariant tous les deux coups, il serait nécessaire que $a = \sqrt{c'+\sqrt{a+c'}}$, ce qui implique que $a^4 - 2c'a^2 - a + c'^2 - c' = 0$, soit $(a^2 - a - c')(a^2 + a + 1 - c') = 0$. Le premier trinôme donne comme seule solution positive celle qui vérifie $a^2 = a + c'$ dont on ne veut plus. Le deuxième trinôme, de discriminant $4c' - 3$ n'a de solution réelle que pour $c' > 3/4$, et dans ce cas, la seule solution positive serait $a = \frac{-1 + \sqrt{4c' - 3}}{2}$, mais alors on constate que l'on n'a plus $a > c'$.

Supposons désormais que $a < c'$. L'ovale de départ a un transformé formé de deux ovales. Celui de gauche est le seul qui puisse prétendre redonner au coup suivant l'ovale initial. Il coupe l'axe des x aux points $-\sqrt{a+c'}$ et $-\sqrt{c'-a}$. Lorsque l'on effectue ensuite la translation de vecteur c' , l'ovale obtenu a pour extrémités $c' - \sqrt{a+c'}$ et $c' - \sqrt{c'-a}$. Sous réserve que O soit à l'intérieur de cet intervalle, ce qui signifie que $c' - \sqrt{a+c'} < 0$ et $c' - \sqrt{c'-a} > 0$, le passage aux racines carrées donne l'ovale d'extrémités $\pm\sqrt{c' - \sqrt{c'-a}}$ sur (Ox) . Imposons alors comme condition nécessaire d'invariance :

$\sqrt{c' - \sqrt{c'-a}} = a$. Cela implique, après une double élévation au carré, que a vérifie l'équation :
 $a^4 - 2c'a^2 + a + c'^2 - c' = 0$ ou encore $(a^2 + a - c')(a^2 - a + 1 - c') = 0$.

Le premier facteur donne une seule solution positive $a = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4c'}}{2}$ vérifiant aussi $a = \sqrt{c'-a}$.

Vérifions que cette solution convient pour répondre à toutes les conditions posées par la recherche de T :⁵

- $a < c'$: en effet $a - c' = \frac{\sqrt{1 + 4c'} - (1 + 2c')}{2}$ qui est, grâce à l'utilisation de la quantité conjuguée, du signe de $1 + 4c' - 1 - 4c'^2 - 4c' = -c'^2 + 2c' = -4c'^2 < 0$.
- $c' - \sqrt{c'-a} > 0$: en effet $c' - \sqrt{c'-a} = c' - a > 0$.
- $c' - \sqrt{c'+a} < 0$: $c' - \sqrt{c'+a}$ a le même signe que $c'^2 - c' - a = (2c'^2 - 2c' + 1 - \sqrt{1 + 4c'})/2$ qui a aussi le même signe que $4c'^4 + 4c'^2 + 1 - 8c'^3 + 4c'^2 - 4c' - 1 - 4c' = 4c'(c'^3 + 2c' - 2)$. On vérifie que la fonction $h(x) = x^3 + 2x - 2$ est croissante et reste négative lorsque x va de 0 à $5/4$, les valeurs de c' qui vont nous concerner précisément. On a bien $c' - \sqrt{c'+a} < 0$.

⁵ A partir du moment où cette solution convient, on peut considérer qu'aucune autre ne convient. Autrement dit, la seule solution pouvant être positive du deuxième facteur, à savoir $a = \frac{-1 + \sqrt{4c' - 3}}{2}$, ne convient pas. En effet elle ne serait valable que pour $c' > 1$, et l'on vérifie alors que $c' - \sqrt{c'+a} > 0$, ce qui n'est pas acceptable

La frontière de l'ensemble T , s'il existe, coupe donc nécessairement les axes Ox et Oy aux points :

$$\pm a = \pm \frac{-1 + \sqrt{1 + 4c'}}{2} \text{ et } \pm b = \pm \sqrt{\sqrt{c' + a} - c'}, \text{ au moins pour } c' \text{ compris entre } 0 \text{ et } 5/4.$$

Nous allons maintenant reprendre ce que nous avons fait avec $c' = 1$ pour essayer de déterminer la frontière de T , ce qui nous assurera de son existence. Pour cela, faisons jouer la double récurrence des fonctions f et g à partir du point ib , avec $f(z) = \sqrt{c' - \sqrt{c' + z}}$ et $g(z) = -\sqrt{c' - \sqrt{c' + z}}$. On assiste à la formation d'un arbre binaire de points qui s'intercalent entre eux par dichotomie. Mais ces points vont-ils descendre jusqu'à l'axe des x pour donner une courbe fermée, comme c'était le cas pour $c' = 1$? Nous sommes amenés à distinguer deux cas :

a) c' entre 0 et 3/4

On sait que dans ce cas, la fonction telle que $z' = -\sqrt{z + c'}$ admet un point fixe repousseur z_2 et un cycle attracteur de deux points fixes d'affixes complexes conjuguées z_3 et z_4 . Or la fonction $g(z)$ n'est autre que la fonction précédente répétée deux fois, elle admet comme points fixes attracteurs z_3 ou z_4 selon qu'on part d'un point au-dessus de l'axe des x ou au dessous. Lorsque l'on part du point ib , on sait que le point $gggg\dots$ est l'extrémité gauche des points de l'arbre binaire. Il s'agit forcément du point z_3 , d'abscisse $-1/2$ et d'ordonnée $\sqrt{3 - 4c'}/2$. Comme ce point n'est pas sur Ox , l'infinité des points de l'arbre binaire forme un arc totalement troué dans le quadrant nord-ouest, avec une extrémité ib sur l'axe des y et l'autre extrémité en z_3 . On n'a pas trouvé de frontière fermée à l'ensemble T (figure 17).

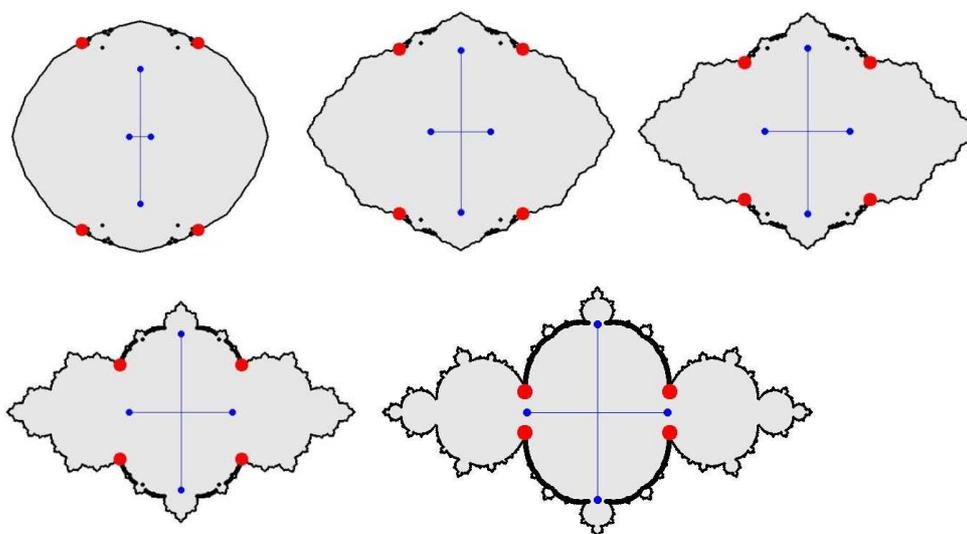


Figure 17 : Fractales obtenues pour $c' < 3/4$. Les valeurs successives de c' sont 0,1, 0,3 , 0,45, 0,6, 0,73. Sur chaque dessin, l'ensemble de Julia est en gris. Les points de T situés sur Ox et Oy sont en bleu. Les points limites des fonctions f et g sont en rouge. Les points de l'arbre binaire sont de gros points en noir.

Mais maintenant partons du point z_2 repousseur. En partant de points infiniment proches de z_2 , on trouve sous l'action répétée de g une succession de points convergeant vers le point attracteur z_3 , ces points formant une courbe lisse. Par symétrie par rapport à Ox , on obtient à gauche une courbe lisse joignant les points z_3 et z_4 , sous réserve que la courbe admette une tangente verticale en z_2 .

Pour le vérifier prenons un point M proche du point A d'affixe z_2 , de coordonnées $(-a, 0)$ et à la verticale de ce point, soit $M(-a, dy)$ avec dy petit, ce qui correspond au nombre complexe de module $OM = a$ et d'argument $\pi - \theta = \pi - dy/a$ puisque θ est petit (figure 18). Sous l'effet de la translation de vecteur $(c', 0)$, M devient $N(-a + c', dy)$. Le nombre complexe correspondant a pour module $ON \approx -$

$a + c'$ et pour argument θ' lui aussi petit. Or dans le triangle OMN , on a la relation $\theta / ON = \theta' / OM$, d'où $\theta' \approx \theta OM / ON = dy / (-a + c')$. En prenant l'opposé de la racine carrée complexe de ce nombre, on trouve le nombre de module $\sqrt{-a + c'}$ et d'argument $\pi - \theta'/2$, affixe du point P . L'abscisse du point P est sensiblement égale à $-\sqrt{-a + c'}$ et l'on sait que $\sqrt{-a + c'} = a$. Le point P est lui aussi à la verticale du point A , et il s'agit du transformé de M sous l'effet de $z' = -\sqrt{z + c'}$. En répétant cette transformation, ce qui revient à faire la fonction g , on trouve un point lui aussi à la verticale de A et d'ordonnée positive comme OM . On a bien une tangente verticale à la courbe en A .

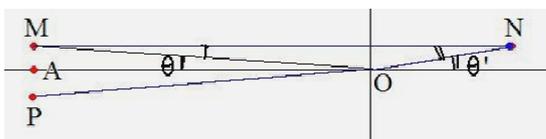


Figure 18 : La tangente à la courbe en A est verticale.

On trouvera sur la *figure 19* le tracé de la courbe lisse C joignant z_3 et z_4 , ainsi que sa symétrique par rapport à Oy qui n'est autre que sa transformée sous l'effet de $z' = \sqrt{z + c'}$.

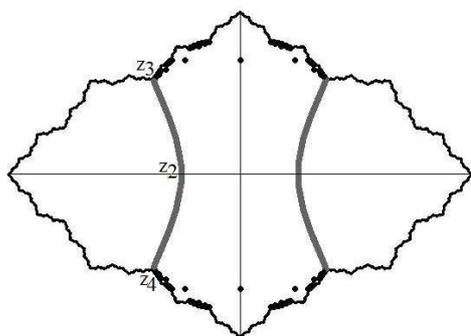
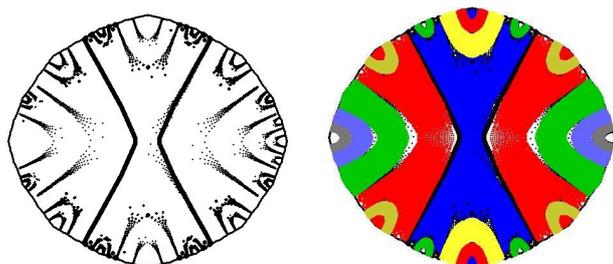


Figure 19 : La frontière de T apparaît, avec la courbe C et sa symétrique, mais il reste des trous sur les parties supérieure et inférieure.

Soumettons maintenant cette courbe C aux mélanges des transformations $z' = \sqrt{z + c'}$ et $z' = -\sqrt{z + c'}$. On obtient de nouveaux morceaux de courbes, dont certains vont remplir les zones jusqu'à présent trouées laissées par l'arbre binaire des points situés en haut et en bas. On trouve ainsi une frontière fermée pour T . Cet ensemble de points globalement invariant tous les deux coups exactement existe bel et bien et sa surface a une forme d'ovale non convexe, avec des parties lisses et d'autres fractales, pour $c' > 0$. Sous l'effet des transformations, il donne d'autres surfaces collées les unes aux autres non par par des points isolés mais suivant des courbes lisses, elles-mêmes issues des transformations de la courbe C . L'ensemble T génère ainsi tout l'ensemble rempli de Fatou-Julia. Ces résultats sont montrés sur la *figure 20*.

Dans le cas exceptionnel où $c' = 0$, avec son ensemble de Julia circulaire, l'ensemble T est formé de deux secteurs angulaires symétriques (*figure 21*).



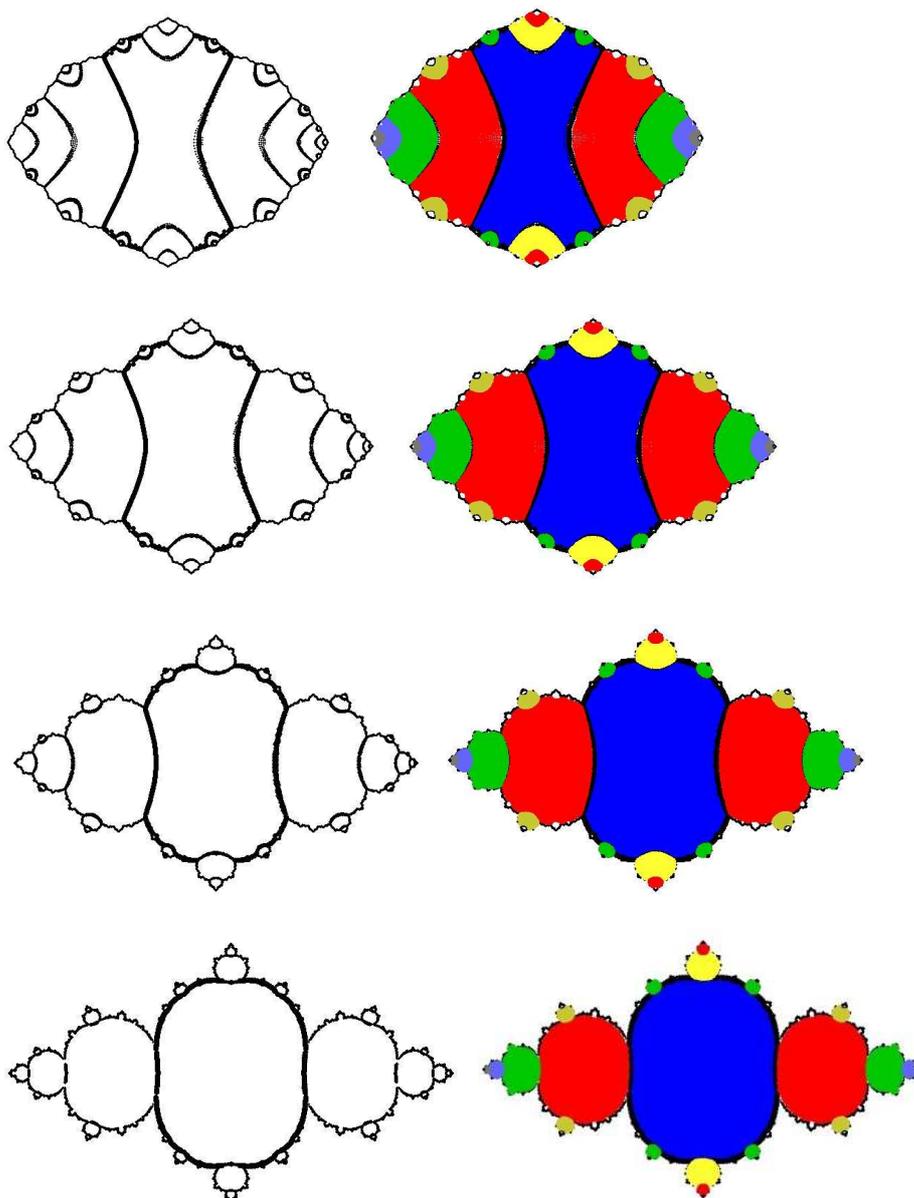


Figure 20 : Pour les mêmes valeurs de c' que sur la figure 17, on a à gauche plusieurs courbes qui sont les transformées de la courbe C , et à droite la surface de la fractale se trouve découpée en morceaux, le morceau central en bleu étant l'ensemble T , et les autres ses transformés.

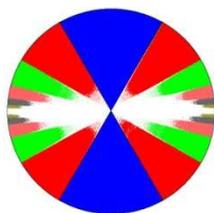


Figure 21 : Cas où $c' = 0$, avec en bleu l'ensemble T , et ses transformés successifs en d'autres couleurs.

b) c' entre $3/4$ et $5/4$

Maintenant le point fixe attracteur est le point d'affixe z_2 il est situé sur l'axe des x et il s'agit du point $gggg\dots$, tout comme le point $fggg\dots$ son symétrique sur l'axe des x . Le développement de l'arbre binaire à partir du point $(0, b)$ forme une courbe fractale, et dans ces conditions l'ensemble T ,

globalement invariant tous les deux coups exactement, existe et il est défini à partir de sa frontière fermée. Tout se passe comme nous l'avons fait pour $c' = 1$.⁶ On trouvera sur la *figure 22* l'évolution de cet ensemble pour plusieurs valeurs de c' .

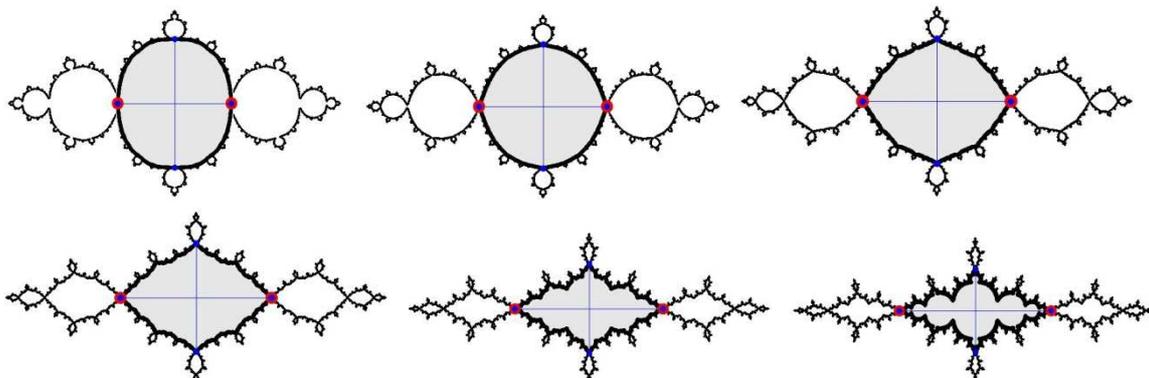
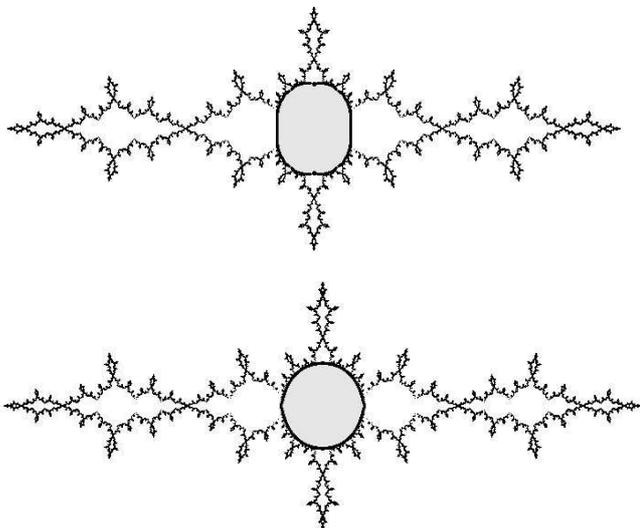


Figure 22 : L'ensemble T en gris pour les valeurs successives de c' : 0,8, 0,9, 1, 1,1, 1,2, 1,24.

Un nouveau phénomène apparaît alors. Lorsque l'on part de $c' = 0$ jusqu'à $c' = 0,75$, l'ensemble rempli de Julia-Fatou, ensemble globalement invariant à chaque coup, part d'une forme circulaire lisse et convexe à une forme hérissée formée finalement d'une multitude d'ovales convexes et juste connectés. Puis, lorsque c' va de 0,75 à 1,25, c'est au tour de l'ensemble T globalement invariant tous les deux coups de suivre une évolution analogue, passant d'une forme ovale lisse à une multitude d'ovales convexes et juste connectés. Et le processus se poursuit au-delà. Pour c' allant de 1,25 à 1,38 environ, on constate expérimentalement que c'est l'ensemble globalement invariant tous les quatre coups qui suit une évolution analogue, comme indiqué sur la *figure 23*.⁷ Ainsi, derrière la complexité de l'évolution globale de la fractale, se cache un processus répétitif et immuable avec un motif de base qui subit toujours le même destin.



⁶ Pour déterminer les façons d'obtenir les morceaux séparément, il suffit de remplacer 1 par c' dans les formules précédemment données.

⁷ Cet ensemble est obtenu en pratiquant les deux fonctions répétées :

$$\begin{cases} z' = \sqrt{c' - \sqrt{c' + \sqrt{c' - \sqrt{c' + z}}}} \\ z' = -\sqrt{c' - \sqrt{c' + \sqrt{c' - \sqrt{c' + \bar{z}}}}} \end{cases}$$

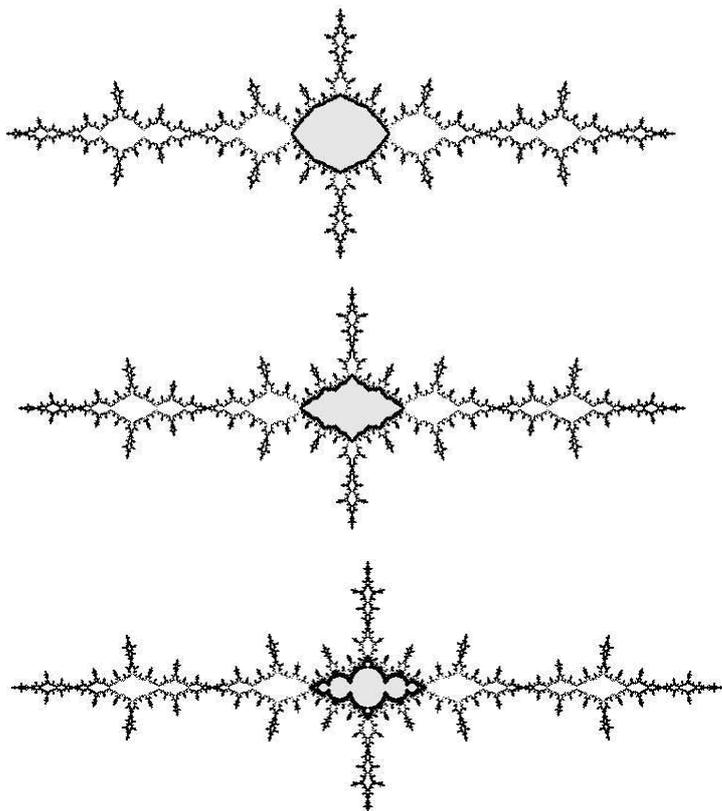


Figure 23 : Ensemble globalement invariant tous les quatre coups exactement, en gris, pour des valeurs de c' allant de 1,25 à 1,38, ici pour les valeurs successives 1,251, 1,28, 1,32, 1,35, 1,37.

Références bibliographiques

- Le texte qui précède est une reprise légèrement développée d'un chapitre de ma thèse *Calcul, chaos, modulo* (1998).
- Pour la démonstration des théorèmes associés aux travaux de P. Fatou (1917), G Julia (1918), P. Montel (1927), et plus récemment de B. Mandelbrot, on pourra se reporter au livre de S.G. Hoggar, *Mathematics for Computer Graphics*, Cambridge University Press, 1992.
- Pour aller plus loin, on pourra consulter les travaux de J.C. Yoccoz et J.H. Hubbard.