Similitudes directes dans le plan
Cours et exercices corrigés

Une similitude a comme raison d'être le fait de transformer une figure en une figure *semblable*, c'est-à-dire une figure qui a la même forme, en plus grand ou en plus petit, et qui peut avoir tourné par rapport à la figure originelle. C'est ce qui va transparaître à partir des notions de cours qui suivent.[1]

1. Définition

Une similitude directe de rapport $k > 0$ (dans le plan) est une transformation qui multiplie les distances par k et qui conserve les angles orientés.

Problème : en existe-t-il ? Oui, car on en connaît déjà :

- les translations avec $k = 1$
- les rotations avec $k = 1$
- les homothéties de rapport k positif.
- les composées des transformations précédentes. Notamment une homothétie de rapport négatif $-k$ est aussi une similitude directe, comme composée d'une homothétie de rapport positif k et d'un demi-tour de même centre que l'homothétie.

2. Un cas particulier, particulièrement important : la similitude à centre

Il s'aagit de la composée d'une rotation r de centre I et d'angle θ et d'une homothétie h de même centre I et de rapport $k > 0$. Il s'agit bien d'une similitude directe puisque les longueurs sont multipliées par k et que les angles orientés sont conservés.

Faisons $r \circ h$: $M \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{r} M'$ avec $\mathbf{IM_1} = k\,\mathbf{IM}$ puis IM'= IM$_1$ et $(\mathbf{IM_1}, \mathbf{IM'}) = \theta$ (*figure 1*).

Remarquons que si l'on fait $h \circ r$, soit :

$M \xrightarrow{r} M_1' \xrightarrow{h} M'$ on trouve le même point final M'. Dans le cas présent, la composition des deux transformations est commutative.

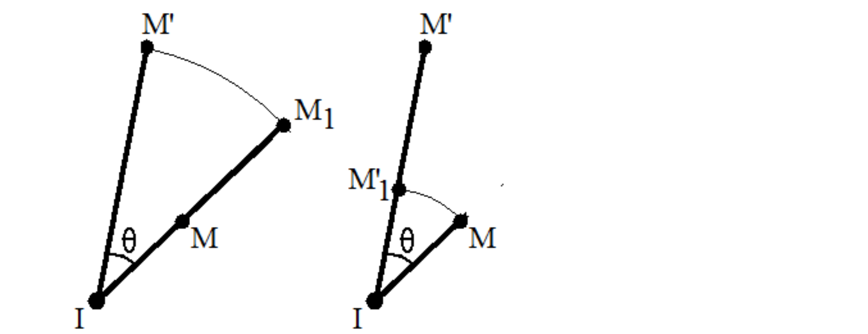


Figure 1 : Passage de M à M' par $r \circ h$ à gauche ou par $h \circ r$ à droite.

Finalement, la similitude directe fait passer de M à M' avec :

[1] Ce cours reprend essentiellement ce qui est enseigné en classe de Terminale au lycée, en utilisant plus les nombres complexes que la géométrie pure. Il y manque des notions essentielles, notamment comment construire le centre d'une similitude, et comment caractériser des triangles semblables, notamment le fait que deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les même angles.

$$\begin{cases} IM' = k\ IM \\ (\boldsymbol{IM}, \boldsymbol{IM}') = \theta \end{cases}$$

Passons dans le plan complexe. Avec I d'affixe z_0, M d'affixe z et M' d'affixe z', le vecteur **IM** a pour affixe $z - z_0$ et **IM**' d'affixe $z' - z_0$. On passe de **IM** à **IM**' en multipliant la longueur par k et en tournant de θ, ce qui se traduit par l'écriture en complexes de cette similitude :

$$z' - z_0 = k\, e^{i\theta} (z - z_0)$$

Cette similitude à centre est caractérisée non seulemant par son rapport $k > 0$, mais aussi par son centre I et son angle θ, à savoir l'angle de la rotation r sous-jacente. Nous verrons plus tard qu'une telle similitude joue un rôle essentiel.

3. Propriété caractéristique

1) La composée d'une isométrie positive (translation ou rotation) et d'une homothétie de rapport $k > 0$ est une similitude directe.

2) Une similitude directe est toujours la composée d'une isométrie positive et d'une homothétie.

Démonstration du 1° : l'isométrie conserve les longueurs et l'homothétie les multiplie par k, leur composée les multiplie par k. D'autre part, l'isométrie positive et l'homothétie conservent les angles orientés, leur composée aussi.

Démonstration du 2° : Donnons-nous une similitude directe s de rapport $k > 0$. Puis prenons une homothétie h de même rapport k et de centre I quelconque. Son inverse h^{-1} est une homothétie de rapport $1/k$ et de même centre I. Formons $s \circ h^{-1}$: cette transformation conserve les longueurs car $(1/k)\,k = 1$ ainsi que les angles orientés. Il s'agit d'une isométrie positive (rotation ou translation) d, ce qui donne : $s \circ h^{-1} = d$. Composons des deux côtés par h à droite : $s \circ h^{-1} \circ h = d \circ h$, ou $s = d \circ h$. La similitude est bien la composée d'une homothétie de même rapport et d'une isométrie positive. Et comme le centre de l'homothétie est quelconque, on peut changer de centre, ce qui donne une infinité de possibilités, et la similitude s'écrit comme composée d'une isométrie positive et d'une homothétie d'une infinitié de façons.

Lorsque l'isométrie est une rotation de centre J et que l'homothétie a pour centre I, ces deux centres peuvent donc varier avec J dépendant de I qui est quelconque, et il peut arriver que les deux centres soient confondus, ce qui donnera une similitude à centre. On verra que cela va se produire en général, sauf cas exceptionnel. Mais pour le voir, mieux vaut travailler en complexes.

4. Ecriture d'une similitude directe en complexes

Une similitude s fait passer de M d'affixe z à M' d'affixe z' par une relation de la forme :

$z' = a\, z + b$ avec a et b complexes et a différent de 0.

Démonstration :

Une translation s'écrit en complexes $z' = z + b$. Une rotation s'écrit $z' = e^{i\theta} z + b$ lorsque l'angle de la rotation θ n'est pas nul (sinon ce serait une translation). Ainsi une isométrie positive s'écrit :

$z' = e^{i\theta} z + b$ avec θ quelconque, ou encore $z' = a\, z + b$ avec $|a| = 1$.

Une homothétie de rapport k positif et $\neq 1$ s'écrit $z' = k\,z + b$ (pour $k = 1$ ce serait une translation).

On sait qu'une similitude s peut toujours s'écrire comme composée d'une isométrie positive et d'une homothétie, soit $s = h \circ d$, avec $d : z' = e^{i\theta} z + b_1$ et $h : z' = k\,z + b_2$:

$$\begin{array}{lllll} M & \xrightarrow{d} & M_1 & \xrightarrow{h} & M' \\ z & \rightarrow & z_1 = e^{i\theta} z + b_1 & \rightarrow & z' = k\,z_1 + b_2 = k\,(e^{i\theta} z + b_1) + b_2 = k\,e^{i\theta} z + k\,b_1 + b_2 \end{array}$$

qui est bien de la forme $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$ (puisque $k > 0$). Notons que $|a| = k$ rapport de la similitude, et arg $a = \theta$, angle de la rotation sous-jacente lorsque $\theta \neq 0$.

Passons au problème inverse, avec ce résultat :

> Une transformation qui s'écrit en complexes $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$ est une similitude s. Et seuls deux cas sont possibles : soit s est une translation si $a = 1$, soit s est une similitude à centre si $a \neq 1$.

Démonstration : partons de $z' = a\,z + b$ et cherchons les points invariants éventuels z_0, soit
$z_0 = a\,z_0 + b$, $(1 - a)\,z_0 = b$. On distingue deux cas :

- $a = 1$, s'où $z' = z + b$ qui correspond à une translation.
- $a \neq 1$, $z_0 = b / (1 - a)$. Il existe un point fixe unique.

Avec $z' = a\,z + b$
$z_0 = a\,z_0 + b$ on déduit par soustraction : $z' - z_0 = \mathrm{a}\,(z - z_0)$ et l'on retrouve l'écriture d'une similitude à centre, telle qu'on l'a vue précédemment.

Finalement, on constate que toute similitude s est une similitude à centre, sauf dans le cas exceptionnel où il s'agit d'une translation. Autrement dit, parmi toutes les écritures d'une similitude comme composée d'une rotation de centre J et d'une homothétie de centre I il existe en règle générale un cas où les centres I et J sont confondus.

Donnons enfin une propriété qui peut s'avérer utile.

5. Propriété

> Soit deux points distincts A et B, ainsi que deux points distincts A' et B'. Alors il existe une similitude directe unique telle que $A \rightarrow A'$ et $B \rightarrow B'$.

Prenons une similitude s qui s'écrit $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$, et imposons lui de faire passer de A à A' et de B à B' :
$z_{A'} = a\,z_A + b$
$z_{B'} = a\,z_B + b$
Par soustraction : $z_{B'} - z_{A'} = a\,(z_B - z_A)$. Comme $z_B \neq z_A$, on trouve a unique :
$a = (z_{B'} - z_{A'}) / (z_B - z_A)$, qui est non nul puisque $z_{B'} \neq z_{A'}$, et on déduit b lui aussi unique à partir d'une des équations. On a bien trouvé une similitude unique.

A ce stade, on peut considérer que le cours est fini, du moins sous sa forme minimaliste. Il reste à l'appliquer dans des exercices.

6. Exercices corrigés

****6.1. *Dans un repère orthonormé direct d'origine O, on considère l'homothétie h de centre O et de rapport 2, et la rotation r de centre I (1, 1) et d'angle π/2.*

1) Donner l'écriture en complexes de ces deux transformations.

L'homothétie h s'écrit, pour M (z) → M' (z') : $z' = 2z$

La rotation r fait passer de M à M' en faisant tourner le vecteur **IM** de π/2 pour avoir **IM'**, ce qui revient en complexes à multiplier l'affixe de **IM** par i = [1, π/2] pour obtenir **IM'**, soit en complexes :
$z' - (1 + i) = i\,(z - (1 + i))$, ou $z' = iz - i + 1 + 1 + i$,
$z' = i\,z + 2$

2) On pose s = r o h. Quelle est la nature de la transformation s. Donner ses caractéristiques.

$$M \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{r} M'$$
$$z \to z_1 \to z' \quad \text{avec } z_1 = 2\,z \text{ et } z' = i\,z_1 + 2 = 2\,i\,z + 2$$

On sait que la composée d'une homothétie et d'une isométrie positive, ici une rotation, est une similitude directe, ce qui est confirmé par l'écriture en complexes de la forme $z' = az + b$ avec $a \neq 0$. Son rapport est celui de l'homothétie, soit 2 et son angle celui de la rotation, soit π/2. Comme ce n'est pas une translation, il s'agit d'une similitude à centre. Celui-ci est un point fixe J d'affixe z_0 qui vérifie :

$z_0 = 2\,i\,z_0 + 2$, $z_0 = 2 / (1 - 2\,i) = 2\,(1 + 2\,i) / 5$,
d'où J (2/5, 4/5).

3) Quelle est l'image de la droite D d'équation x = 1 par la transformation s ?

La transformée d'une droite par la similitude est une droite qui se déduit de la droite initiale en tournant de l'angle π/2. On trouve donc une droite D' d'équation y = constante. Le point J se projette en K sur la droite d'équation $x = 1$, d'où $JK = 3/5$ avec (JK) parallèle à (Ox). Lors de la transformation, [JK] devient [JK'] avec (JK') perpendiculaire à D' par conservation des angles, et $JK' = 2 \times 3/5 = 6/5$. L'équation de D' est $y = 4/5 + 6/5 = 2$.

On trouverait le même résultat par le calcul : un point M (1, y) de D devient le point M' (x', y') avec $x' + i\,y' = 2\,i\,(1 + i\,y) + 2$, d'où $x' = -2\,y + 2$ et $y' = 2$. M' se trouve sur la droite D' d'équation $y = 2$, et il la décrit totalement puisque x', comme y, décrit **R**.

4) A-t-on r o h = h o r ?

En général, l'opération o n'est pas commutative. C'est le cas ici, puisque la similitude $s' = h$ o r s'écrit en complexes $z' = 2\,z + 4$, ce qui diffère de l'écriture de s. Elle a le même rapport et le même angle que s mais son centre J' est différent de J. On trouve en effet J' (4/8, 8/5) et l'on a en vecteurs **OJ'** = 2 **OJ**.

****6.2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on définit l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec z' = – j z + i, où j = exp(i 2 π /3).*

1) Montrer que f admet exactement un point invariant I que l'on précisera, puis caractériser l'application f.

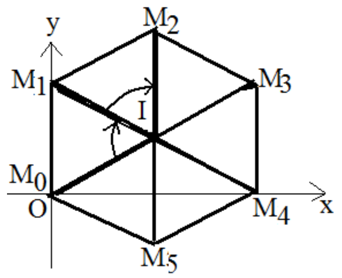
$z' = -j\,z + i$ est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$ (ce n'est pas une translation). Il s'agit d'une rotation d'angle arg a = arg $(-j) = 2\pi/3 - \pi = -\pi/3$. Son centre est le point fixe I dont l'affixe z_I vérifie : $z_I = -j\,z_I + i$,

$$z_I = \frac{i}{1+j} = \frac{i}{1+e^{i2\pi/3}} = \frac{i}{e^{i\pi/3}(e^{-i\pi/3}+e^{i\pi/3})} = \frac{i}{2\,e^{i\pi/3}\cos(\pi/3)} = i\,e^{-i\pi/3} = i\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

où l'on a utilisé la formule d'Euler sur le cosinus.

Ainsi $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, soit $OI = 1$ et $(\mathbf{Ox}, \mathbf{OI}) = \pi/6$.

2) On définit la suite de points M_n par $M_0 = O$ et la relation de récurrence $M_{n+1} = f(M_n)$ avec n entier naturel. Placer sur un dessin les points I, M_0, M_1, M_2, M_3, ...



A cause des rotations répétées autour de I, les points M_n forment un hexagone régulier de centrre I, avec $M_0 = M_6 = M_{12}$, ...

3) On pose z_n l'affixe de M_n et l'on définit le point Q_n d'affixe Z_n tel que $Z_n = z_n - \exp(i\pi/6)$. Quelle est la nature de la transformation t faisant passer de M_n à Q_n ? Déterminer Z_{n+1} en fonction de Z_n et en déduire la nature de la transformation R faisant passer de Q_n à Q_{n+1}..

$Z_n = z_n - e^{i\pi/6}$ est de la forme $z' = z + b$. C'est une translation de vecteur d'affixe $b = e^{i\pi/6}$, de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Il s'agit du vecteur **OI**.

$$Z_{n+1} = z_{n+1} - e^{i\pi/6} = e^{-i\pi/3}z_n + i - e^{i\pi/6} = e^{-i\pi/3}(Z_n + e^{i\pi/6}) + i - e^{i\pi/6}$$
$$= e^{-i\pi/3}Z_n + e^{-i\pi/6} + i - e^{i\pi/6}$$

Avec $e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6} = 2i\sin(\pi/6) = i$, il reste $Z_{n+1} = e^{-i\pi/3}Z_n$, soit la rotation R de centre O et d'angle $-\pi/3$.

4) Déterminer la nature de la transformation $t \circ f \circ t^{-1}$ et préciser ses caractéristiques.

$t \circ f \circ t^{-1}$: $Q_n \xrightarrow{t^{-1}} M_n \xrightarrow{f} M_{n+1} \xrightarrow{t} Q_{n+1}$ d'où $Q_{n+1} = t \circ f \circ t^{-1}\, Q_n$. On retrouve la rotation R.

5) On considère l'homothétie de centre O et de rapport 9/10. Quelle est la nature de $h \circ R$? Donner ses caratéristiques. Que se passe-t-il si l'on répète cette transformation n fois à partir du point P_0 de coordonnées (1, 0) ?

h et r ayant même centre O, la composée $h \circ R$ est une similitude à centre, de centre O, et son écriture en complexes est $z' = (9/10)\,e^{-i\pi/3}z$. Le point P_0 est transformé en point P_1 d'affixe
$z_1 = (9/10)\,e^{-i\pi/3}$

Sous l'effet répété de cette transformation, on obtient le point P_n d'affixe
$z_n = (9/10)^n\,e^{-i\,n\,\pi/3}$.

Les points P_1, P_2,..., P_n tournent à chaque étape de $-\pi/3$ autour de O, avec une distance qui diminue, puisqu'elle est multipliée par 9/10 à chaque fois. Lorsque n augmente, le point P_n se rapproche en spirale du point O.

******6.3.** *Dans le plan complexe avec un repère orthonormé d'origine O, on se donne les points A et B d'affixe respectives 12 et 9i, ainsi que l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z définie par* $Z = -\frac{3}{4}iz + 9i$.

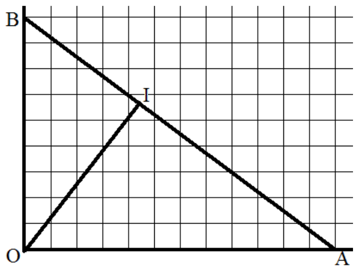
1) Montrer que f admet un point infariant I et déterminer ses coordonnées. Démontrer que f est une similitude directe dont on déterminera les caractérisitques.

Un point fixe d'affixe z_0 doit vérifier

$$z_0 = \frac{9i}{1+3/4i} = \frac{9i(1-(3/4)i)}{1+9/16} = \frac{27/4+9i}{25/16} = 108/25 + i(144/25)$$

On trouve bien un point fixe unique, soit I (108/25, 144/25).

La relation $Z = -\frac{3}{4}iz + 9i$ est de la forme $Z = az + b$ avec $a \neq 0$. Il s'agit d'une similitude directe, plus précisément d'une similitude à centre, ici I, avec un rapport $k = |a| = 3/4$ et un angle égal à arg a = arg($-i$) = $-\pi/2$.



2) Quelles sont les images par f des points A et B ? Montrer que I est un point commun aux cercles C_1 et C_2 de diamètres [OA] et [OB]. Montrer que I est le pied de la hauteur issue de O dans le traingle AOB et que $IA \times IB = \mathrm{IO}^2$.

Le point image de A par f a pour affixe $z' = -\frac{3}{4}iz_A + 9i = 0$. C'est le point O. Et le point image de O par f a pour affixe $9i$. C'est B. Comme la similitude a pour angle $-\pi/2$, on a (**IA**, **IO**) = $-\pi/2$, et I est sur le cercle C_1 de diamètre [OA]/ De même (**IO**, **IB**) = $-\pi/2$, I est aussi sur le cercle C_2. Ces deux cercles se coupent en deux points, l'un est O, l'autre est I. On a aussi (**IA**, **IB**) = $-\pi/2 - \pi/2 = -\pi$. Les points A, I, B sont alignés et avec l'angle droit en I, I est le pied de la hauteur [IO] du triangle OAB.

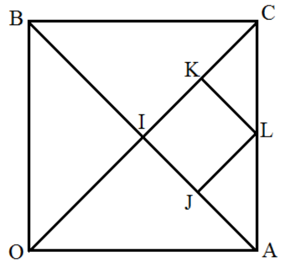
On sait que dans un triangle rectatngle, ici OAB, on a la relation $IA \times IB = IO^2$. On peut aussi retrouver ce résultat en utilisant le rapport 3/4 de la similitude : $IO / IA = 3/4$ et $IB / IO = 3/4$, d'où
$IO / IA = IB / IO$, $IA \times IB = IO^2$.

3) Quelle est la nature de la transformation f^2 (= $f \circ f$) ?

Il s'agit de la similitude de centre I, de rapport $(3/4)^2 = 9/16$ et d'angle $-\pi/2 - \pi/2 = -\pi$.

6.4. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O. On considère le carré OACB avec A (1, 0), B(0, 1), C(1, 1), de centre I. On place le point J milieu de [IA], L miileu de [AC], K milieu de [IC].*

1) Montrer que IJLK est un carré.



En vertu du théorème des milieux (théorème de Thalès élargi) dans le triangle *CIA*, on a *KL* / *IA* = 1/2, ou *KL* = *IJ* et aussi *JL* / *IC* = 1/2 ou *JL* = *IK*. Dans le carré OABC, les demi-diagonales ont même longueur, *IA* = *IC*, d'où *IJ* = *IK* = *KL* = *JL*. Le quadrilatère *IJLK* a ses quatre côtés de même longueur : c'est un losange. Il a en plus un angle droit en *I*, c'est un carré.

2) Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme le carré OACB et IJLK, avec O → I, A → J, C→ L, B → K. Pour cela on devra commencer par montrer qu'il existe une similitude unique telle que O → I, A → J, puis on montrera qu'alors C→ L et B → K par cette similitude.

On sait qu'il existe une similitude directe *s* unique telle que *O → I, A → J* puisque *O* et *A* sont distincts, ainsi que *I* et *J*. Cette similitude transforme un carré en carré. Le carré direct *OACB* devient le carré direct dont un côté est [*IJ*]. Il ne peut que s'agir du carré *IJLK*, d'où *C→ L et B → K.*

3) Ecrire cette similitude en complexes, et déterminer ses caractéristiques.

On peut déjà dire que le rapport de la similitude est $k = IJ / OA = IJ = (1/4)\, AB = \sqrt{2}/4$, et que son angle est (**OA**, **IJ**) = – π/4. Mais pour trouver son centre, commençons par écrire la similitude en complexes, soit $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$. On sait déjà que :

$a = (\sqrt{2}/4)\, e^{-i\pi/4} = (\sqrt{2}/4)\, (\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2 = (1/4)(1-i)$
Il suffit d'imposer que *O* soit transformé en *I* pour avoir *b*, soit $z_I = a\ z_O + b$, $z_I = b$,
$b = (1/2)\,(1 + i)$.

* *Autre méthode (moins bonne), où l'on n'a pas calculé préalablement a :*

Pour avoir *a* et *b*, imposons que *O → I et A → J* :

$$\begin{cases} z_I = a\ z_O + b \\ z_J = a\ z_A + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1/2) + (1/2)i = b \\ \quad (3/4) + (1/4)i = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = (1/2)(1+i) \\ a = (1/4)(1-i) \end{cases}$$

Cherchons le point fixe d'affixe z_0 qui va être le centre de la similitude :

$z_0 = a\ z_0 + b$
$z_0 = b\ /\ (1 - a) = \dfrac{(1/2)(1+i)}{1-(1/4)(1-i)} = \dfrac{(1/2)(1+i)}{(3/4)+(1/4)i} = \dfrac{2(1+i)}{3+i} = \dfrac{2(1+i)(3-i)}{10} = (4/5) + i\ (2/5)$. Le centre *D* de la similitude a pour coordonnées (4/5, 2/5).

4) Pourquoi y a-t-il 4 similitudes directes exactement transformant le carré OACB en IJLK ?

On a déjà vu la similitude *s* telle que : $O \to I$, $A \to J$, $C \to L$, $B \to K$. Il existe aussi trois autres similitudes où le carré direct *OACB* est transformé en carré direct, soit :

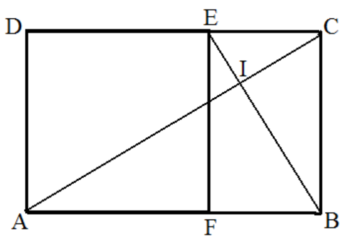
s' : $O \to J$, $A \to L$, $C \to K$, $B \to I$
s'' : $O \to L$, $A \to K$, $C \to I$, $B \to J$
s''' : $O \to K$, $A \to I$, $C \to J$, $B \to L$

****6.5.** *On considère le rectangle ABCD dont le côté AB a pour longueur* $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ *et pour largeur BC = 1, avec l'angle (AB, AD) = π/2. On prend le point F sur [AB] tel que AF = 1, et le point E sur [DC] tel que DE = 1, AFED étant un carré. On pose aussi φ' = 1 / φ.*

1) Vérifier que φ est une solution de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$*, et que l'autre solution est – φ'.En déduire que φ = 1 + φ'.*

L'équation $X^2 - X - 1 = 0$ a pour discriminant 5 positif. Elle admet deux solutions $(1 \pm \sqrt{5})/2$. On trouve bien la solution *φ*, et l'autre solution est $(1-\sqrt{5})/2 = -\dfrac{4}{2(1+\sqrt{5})} = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\varphi} = -\varphi'$. La somme des racines vaut 1, soit $\varphi - \varphi' = 1$, $\varphi = 1 + \varphi'$.

2) Montrer qu'il existe une similitude directe s unique faisant passer des points A, B, C, D aux points B, C, E, F respectivement. Déterminer son rapport et son angle.



On sait qu'il existe une similitude *s* unique telle que :
$A \to B$
$B \to C$ puisque *A* et *B* sont distincts ainsi que *B* et *C*.

Son rapport est $BC / AB = 1 / \varphi = \varphi'$, et son angle est (**AB**, **BC**) = π/2.

Le rectangle direct *ABCD* est transformé en rectangle direct par cette similitude, et un de ses côtés est [*BC*], ce qui donne un rectangle *BCE' F'*. Le point *E*' est sur [*CD*] et *F*' est sur [*BA*]. D'autre part, *CE*'/ *BC* = *φ*' à cause de la similitude, soit *CE*' = *φ*'. On a aussi *CE* = *φ* – 1 = *φ*', les points *E* et *E*' sont confondus, et par suite *F* et *F*' aussi. Le rectangle *ABCD* est bien transformé en *BCEF*.

3) Montrer que cette similitude s a pour centre le point d'intersetion I de (AC) et (EB).

Cette similitude *s* n'est manifestement pas une translation. Il s'agit d'une similitude à centre. Le centre *I* est tel que (**IA**, **IB**) = *π*/2 puique $A \to B$, et (**IB**, **IC**) = *π*/2 puisque $B \to C$, d'où (**IA**, **IC**) = *π*, ce qui signifie que *I* est sur [*AC*].

D'autre part, la diagonale [AC] du rectangle ABCD est transformée en [BE] diagonale de BCEF, et ces deux diagonales sont perpendiculaires, (**AC**, **BE**) = *π*/2 ou (**IC**, **BE**) = *π*/2. Comme $C \to E$, on a aussi (**IC**, **IE**) = *π*/2. On en déduit que (**BE**, **IE**) = 0, les points *B*, *I*, *E* sont alignés.

Finalement le point *I* est bien le point d'intersection de (*AC*) et (*EB*).

Autre méthode :
Faisons la composée $s \circ s$: c'est aussi une similitude de centre *I*, avec un rapport φ'^2 et un angle *π*.
Il s'agit donc de l'homothétie de centre *I* et de rapport $-\varphi'^2$.
Comme $A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{s} C$, *A* devient *C* par cette homothétie, d'où *I* est sur [*AC*].
De même $B \to C \to E$, *B* devient *E* par l'homothétie, et *I* est sur [*BE*].
I est bien le point d'intersection de [*AC*] et [*BE*].

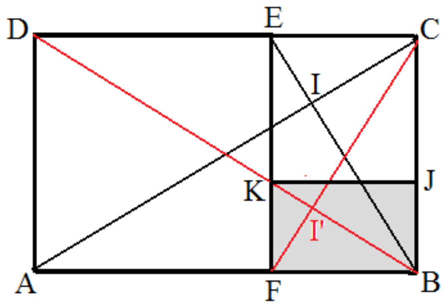
4) On considère la similitude s' faisant passer des points A, B, C, D aux points E, F , B , C respectivement. Donner ses caractéristiques. Pour déterminer son centre, on pourra utiliser la composée s' ₒ s'.

Il existe une similitude directe s' unique telle que $A \rightarrow E$ et $B \rightarrow F$. Son rapport est $EF / AB = 1 / \varphi = \varphi'$ et son angle (**AB**, **EF**) $= -\pi/2$.

Appelons I' son centre. Lorsque l'on fait $s' \circ s'$, on obtient une homothétie de centre I' et de rapport φ'^2. Par $s' \circ s'$: $C \rightarrow B \rightarrow F$, donc I' est sur $[CF]$. Et comme $D \rightarrow C \rightarrow B$, I' est aussi sur $[DB]$. Le point I' est le point d'intersection de $[CF]$ et $[DB]$.

Le rectangle direct *ABCD* est transformé en un rectangle direct dont un côté est $[EF]$. Il s'agit du rectangle *EFBC* puisque le rapport longueur sur largeur des deux rectangles est le même.

5) Quelle est la nature de la composée s' ₒ s des deux similitudes ? Déterminer ses caractéristiques en s'intéressant notamment à l'image de B. Dessiner l'image FBJK du rectangle ABCD sous l'effet de s' ₒ s et vérifier que JCEK est un carré de côté φ'.



La composée de deux similitudes directes est toujours une similitude directe. La similitude $s' \circ s$ a pour rapport φ'^2 et pour angle $\pi/2 - \pi/2 = 0$. Il s'agit donc d'une homothétie de rapport φ'^2.

On constate que $B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{s'} B$, et le point fixe B est le centre de l'homothie.

Par cette homothétie on a aussi $A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{s'} F$, soit **BF** $= \varphi'^2$ **BA**. Le rectangle *ABCD* direct devient un rectangle direct *FBJK* dont un côté est $[FB]$, avec J sur $[BC]$ et K sur $[FE]$ à cause des angles droits. Plus précisément, $FK / AD = \varphi'^2$, soit $FK = \varphi'^2$, tout comme BJ. Comme **BK** $= \varphi'^2$ **BD** par l'homothétie, le point K se trouve sur $[BD]$.

Le quadrilatère *JCEK* est un rectangle, avec $KJ = FB = \varphi'$. D'autre part $JC = BC - BJ = 1 - \varphi'^2$. On sait que $-\varphi'$ est solution de $X^2 - X - 1 = 0$, soit $\varphi'^2 + \varphi' - 1 = 0$, ou $\varphi' = 1 - \varphi'^2$. D'où $JC = KJ = \varphi'$. Le rectangle *JCEK* ayant deux côtés successifs de même longueur est un carré.