Barycentres, produit scalaire.
Cours et exercices corrigés

A priori, les notions de barycentre et de produit scalaire sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Mais leur utilisation en commun va nous donner un certain nombre de propriétés intéressantes. Nous commençons par les barycentres. Un barycentre est tout simplement un point d'équilibre. Il est étroitement associé à la notion de centre de gravité, ou de centre d'inertie comme on le nomme en physique. Mais comment le définir ?

1. Les deux définitions d'un barycentre

Première définition

Le barycentre G de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (des nombres positifs ou négatifs) dont la somme est différente de 0, est le point qui vérifie l'équation vectorielle : $a_1\,\mathbf{GA_1} + a_2\,\mathbf{GA_2} + \ldots + a_n\,\mathbf{GA_n} = \mathbf{0}$.[1]

A ce stade rien ne nous dit que cette définition est valide. On ne sait pas du tout pourquoi ce pont G est unique. L'équation vectorielle ne permet pas de le construire. Il pourrait très bien ne pas exister de point G. Il pourrait aussi en exister plusieurs. Mais introduisons un point O quelconque, et transformons l'équation grâce à la formule de Chasles :

$a_1\,\mathbf{GA_1} + a_2\,\mathbf{GA_2} + \ldots + a_n\,\mathbf{GA_n} = \mathbf{0}$
$a_1\,(\mathbf{GO} + \mathbf{OA_1}) + a_2\,(\mathbf{GO} + \mathbf{OA_2}) + \ldots + a_n\,(\mathbf{GO} + \mathbf{OA_n}) = \mathbf{0}$
$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,\mathbf{GO} + a_1\,\mathbf{OA_1} + a_2\,\mathbf{OA_2} + \ldots + a_n\,\mathbf{OA_n} = \mathbf{0}$
$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,\mathbf{OG} = a_1\,\mathbf{OA_1} + a_2\,\mathbf{OA_2} + \ldots + a_n\,\mathbf{OA_n}$
Et comme la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ des coefficients est supposée différente de 0 :

$$\mathbf{OG} = \frac{a_1\,\mathbf{OA_1} + a_2\,\mathbf{OA_2} + \ldots + a_n\,\mathbf{OA_n}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

On vient d'obtenir un point G unique, que cette formule permet aussi de construire.[2] D'où une autre définition.

Deuxième définition

Le barycentre G de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dont
la somme est différente de 0, est le point tel que :
$$\mathbf{OG} = \frac{a_1\,\mathbf{OA_1} + a_2\,\mathbf{OA_2} + \ldots + a_n\,\mathbf{OA_n}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$ où O est un point « origine » quelconque.[3]

[1] Les vecteurs, comme $\mathbf{GA}_1$ ou le vecteur nul $\mathbf{0}$, sont notés en gras dans le texte.

[2] Remarquons que si la somme des coefficients est nulle, le barycentre n'existe pas. Le barycentre n'existe que si la somme des coefficients (aussi appelés poids ou masses) est non nulle. Même si le terme de « poids » n'est pas vraiment adapté pour désigner les coefficients, nous parlerons de points pondérés en les écrivant sous forme de couples (A_i, a_i).

[3] Mais on doit se demander si, en prenant un point O' autre que O, on retrouve bien le même point G. Supposons qu'à partir du point O' on obtienne un point G'. Celui-ci est tel que :

De ces deux définitions, la deuxième est bien meilleure, car elle permet de choisir le point *O* là où on le désire. C'est cette définition que l'on utilise dans 90% des cas. Dans un repère (*Ox*, *Oy*) du plan elle donne les coordonnées du barycentre, soit :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \ldots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \ldots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \end{cases}$$

ou en complexes,

$$z_G = \frac{a_1 z_{A_1} + a_2 z_{A_2} + \ldots + a_n z_{A_n}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

D'autre part, avec le point *O*, qui évoque un point origine que l'on se fixe, rien n'empêche qu'on puisse lui donner un autre nom si l'on veut. Appelons-le *M*, ce qui évoque un point qui bouge. La deuxième définition s'écrit alors :

$$\boxed{a_1\, \boldsymbol{MA_1} + a_2\, \boldsymbol{MA}_2 + \ldots + a_n\, \boldsymbol{MA}_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, \boldsymbol{MG}}$$

Cette formule joue un nouveau rôle : elle permet de transformer une somme de plusieurs vecteurs en un seul vecteur.

Pour le moment, rien n'indique le lien entre barycentre et point d'équilibre. Celui-ci va apparaître en étudiant le cas le plus simple, où seuls deux points interviennent. On pourra constater que la définition mathématique du barycentre n'est rien d'autre que le théorème des moments en physique.

2. Barycentre de deux points

Cherchons le barycentre des deux points pondérés (*A*, *a*) et (*B*, *b*) avec $a + b \neq 0$. Avec O pris comme point origine quelconque, cela s'écrit **OG** = (*a* **OA** + *b* **OB**) / (*a* + *b*). Prenons *O* en *A*. La formule devient $\boldsymbol{AG} = \dfrac{b}{a+b}\boldsymbol{AB}$. Le point *G* est sur la droite (*AB*) suivant une certaine proportion.

Exemple 1 : *Construction du barycentre de* (*A*, 2), (*B*, 3)

Avec **AG** = (3/5) **AB**, le point *G* est aux 3/5 du segment [*AB*] à partir de *A*. Cela correspond au point d'équilibre entre deux masses de 2 et 3 en *A* et *B*, correspondant à la position du pivot d'une balance en équilibre, comme sur la figure ci-dessous.

$$\boldsymbol{O'G'} = \frac{a_1\, \boldsymbol{O'A_1} + a_2\, \boldsymbol{O'A}_2 + \ldots + a_n\, \boldsymbol{O'A}_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

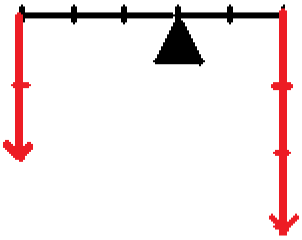
A partir du point *O* on avait trouvé le point *G* tel que :

$\boldsymbol{OG} = \dfrac{a_1\, \boldsymbol{OA_1} + a_2\, \boldsymbol{OA}_2 + \ldots + a_n\, \boldsymbol{OA}_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$. Intercalons *O*' :

$$\boldsymbol{OG} = \frac{a_1 (\boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'A_1}) + a_2 (\boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'A}_2) + \ldots + a_n (\boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'A}_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

$$= \boldsymbol{OO'} + \frac{a_1\, \boldsymbol{O'A_1} + a_2\, \boldsymbol{O'A}_2 + \ldots + a_n\, \boldsymbol{O'A}_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'G'} = \boldsymbol{OG'}$$

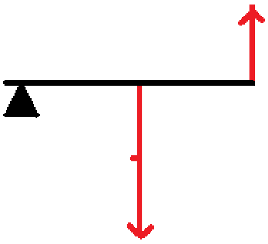
Finalement *G*' = *G*.



Dans le cas général, avec deux coefficients *a* et *b* de même signe, le point *G* est entre *A* et *B*. Dans le cas où *a* et *b* sont des nombres entiers naturels, il suffit de diviser le segment [*AB*] en *a* + *b* parts, et le point *G* est à une distance de *b* parts à partir de *A*.

Exemple 2 : Construction du barycentre de (A, 2), (B, –1)

Grâce à la formule précédente, on trouve **AG** = – **AB**, *A* est le milieu de [*GB*].
En plaçant un pivot en *G* sous une tige rigide *GB*, on retrouve le principe du levier. Il suffit d'une force unité en *B* pour soulever un poids double situé en *A*, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Ensemble des barycentres de deux points

Commençons par montrer cette équivalence :

AM = *k* **AB** équivaut à : *M* barycentre de (*A*, 1 – *k*), (*B*, *k*)

En effet **AM** = *k* **AB** s'écrit aussi bien **AM** = *k* (**AM + MB)**, soit (1 – *k*) **MA** + *k* **MB** = **0**, ce qui signifie que *M* est le barycentre de (*A*, 1 – *k*), (*B*, *k*) d'après la définition du barycentre (la première).

Lorsque le nombre *k* décrit l'ensemble des nombres réels, *M* décrit la droite (*AB*) et comme *M* est toujours un certain barycentre, et qu'il n'y a pas de barycentre ailleurs que sur la droite (*AB*), les barycentres de *A* et *B* décrivent la droite (*AB*) ou encore :

L'ensemble des barycentres de deux points *A* et *B* est la droite (*AB*)

3. Les deux propriétés des barycentres

1) Le barycentre ne change pas si l'on multiplie tous les coefficients par un même nombre non nul. 2) Théorème du barycentre partiel : Pour obtenir le barycentre *G* de *n* points pondérés, on peut remplacer une partie de ces points par leur barycentre *g*, puis en affectant à ce barycentre partiel la somme des coefficients des points correspondants, le point *G* est le barycentre de ce point *g* ainsi pondéré et des points pondérés restants.

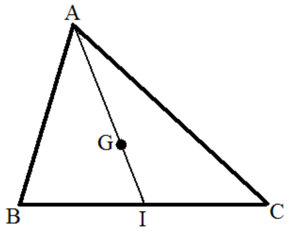
Ce dernier théorème est fondamental, car il permet de regrouper des paquets de points, et en répétant l'opération, de finir par n'avoir à chercher que le barycentre de deux points, ce qui est le cas le plus simple. Le cours sur les barycentres est fini. Passons aux exercices.

4. Exercices sur les barycentres

Exercice 1 : Isobarycentre de trois points et centre de gravité d'un triangle

Lorsque les points ont tous les même poids, par exemple 1 ou n'importe quel nombre non nul, le barycentre de ces points est appelé isobarycentre.

1) Déterminer l'isobarycentre G de trois points A, B, C sommets d'un triangle.



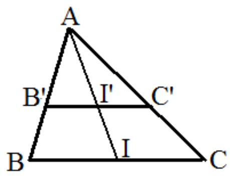
Commençons par prendre le barycentre de (*B*, 1), (*C*, 1). Il s'agit du milieu *I* de [*BC*]. Grâce à la règle du barycentre partiel, le point *G* est aussi le barycentre de *I* affecté du coefficient 2 et de (*C*, 1). Il est tel que **OG** = (2 **OI** + **OC**) / 3 avec *O* point origine quelconque. En plaçant *O* en *A*, cela fait **AG** = (2/3) **AI**. Le point *G* est situé aux deux-tiers de la médiane [*AI*] à partir de *A*.

2) En déduire que les trois médianes sont concourantes en G, appelé centre de gravité du triangle.

Ce que l'on a fait avec le milieu *I* de [*BC*], on peut aussi le faire avec le milieu *J* de [*CA*] ou le milieu *K* de [*AB*]. Le point *G* est aussi aux deux-tiers des médianes [*BJ*] et [*CK*] à partir des sommets *B* et *C*. Les trois médianes sont concourantes en *G*.

3) Considérons maintenant le triangle ABC vu comme une surface triangulaire découpée dans un matériau homogène, avec une densité constante en tout point. Ici les points qui forment le triangle sont des micro-surfaces de dimension infinitésimale ayant toutes le même poids lui aussi infinitésimal. Il s'agit de démontrer que le point d'équilibre de cette plaque triangulaire –son centre de gravité ou l'isobarycentre de ses points– est le même point G que précédemment

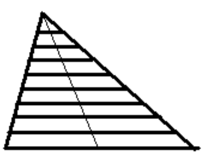
a) Question préliminaire : Dans le triangle ABC avec sa médiane [AI], montrer que tout segment [B'C'] parallèle à (BC) avec B' sur [AB] et C' sur [AC], a son milieu I' sur cette médiane.



Appelons *I'* le point d'intersection de [*AI*] et [*B'C'*]. Il s'agit de montrer que c'est le milieu. Dans le triangle *ABI*, le théorème de Thalès élargi permet d'écrire : *AI'* / *AI* = *B'I'* / *BI*, et de même dans le triangle *AIC* :

AI' / *AI* = *I'C'* / *IC*, d'où *B'I'* / *BI* = *I'C'* / *IC* et comme *BI* = *IC*, on a aussi *B'I'* = *I' C'*.

b) Découper le triangle ABC en tranches très fines horizontales (parallèles à (BC)) et de même épaisseur. Déterminer où se trouve l'isobarycentre d'une tranche quelconque.



Une tranche très fine peut être assimilée à un rectangle lui aussi très fin. L'isobarycentre d'une telle tranche, très proche d'un segment, est situé en son centre, quasiment confondu avec le milieu du segment.

c) En déduire que le centre de gravité G de la plaque est le point de concours des trois médianes du triangle.

Les « points » du triangle étant regroupés par tranches, la règle de l'isobarycentre partiel, appliquée à chaque tranche, permet d'affirmer que le point G est le barycentre des centres des tranches rectangulaires, affectés des coefficients qui sont les poids de chaque plaque. Comme tous les centres sont sur la médiane [AI] grâce au *a)*, leur barycentre est aussi sur [AI]. Ce que l'on a fait avec la médiane [AI] peut être refait avec les deux autres médianes, et le point G est aussi sur elles. Il est donc leur point de concours.

Finalement le point d'équilibre de trois poids égaux situés aux sommets A, B, C d'un triangle est aussi celui de la surface triangulaire homogène ABC.

Exercice 2 : Barycentre de trois points et aires

Soit un triangle ABC et G le barycentre du système de points pondérés (A,α), (B,β), (C,γ) avec α, β et γ tous trois ***strictement positifs****.*

1) *Montrer que G est intérieur (strictement) au triangle ABC. On pourra pour cela utiliser le barycentre P des deux points pondérés (B,β), (C,γ) en précisant de quelles droites il est le point d'intersection.*

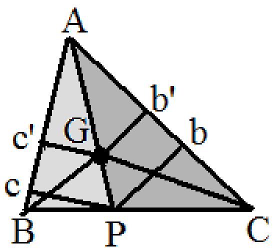
Avec α et β positifs, le barycentre P est situé sur le segment $]BC[$. Grâce à la règle du barycentre partiel, le point G est aussi le barycentre de $(P,\ \alpha + \beta)$ et $(A,\ \alpha)$. Comme ces deux points ont des coefficients positifs, G est situé sur le segment $]AP[$, il est à l'intérieur du triangle ABC tout comme $]AP[$.

2) *Montrer que $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{\gamma}{\beta}$, puis que P est aussi le barycentre de B et C affectés des coefficients respectifs Aire(PAC) et Aire(PBC), où Aire(…) désigne l'aire du triangle mis entre les parenthèses.*

Par définition du barycentre P, on a $\beta\ \mathbf{PB} + \gamma\ \mathbf{PC} = \mathbf{0}$, ou $\beta\ \mathbf{BP} = \gamma\ \mathbf{PC}$. Comme β et γ sont positifs, cela s'écrit en longueurs : $\beta\ BP = \gamma\ PC$, soit $PB / PC = \gamma / \beta$. Comme les coefficients d'un barycentre sont à un facteur près, et que PB et PC sont proportionnels à γ et β, on peut dire que P est le barycentre de $(B,\ PC)$ et $(C,\ PB)$.

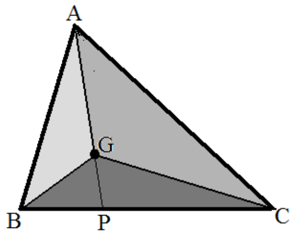
Les deux triangles PAB et PAC ont la même hauteur de longueur h issue de A. Les aires Aire(PAB) = (1/2) $h\ PB$ et Aire(PAC) = (1/2) $h\ PC$ sont proportionnelles à PB et PC, on a aussi P barycentre de (B, Aire(PAC)) et (C, Aire(PAB)).

3) *En s'aidant des hauteurs issues l'une de B dans PAB, et l'autre de C dans PAC, montrer que β et γ sont aussi respectivement proportionnels aux aires des triangles GAC et GAB.*



Appelons Pb la hauteur issue de P dans le triangle APC et Gb' celle issue de G dans GAC. Grâce au théorème de Thalès élargi, on a $Gb' / Pb = AG / AP$, soit $Gb' = k\ Pb$ en posant $k = AG / AP$. Comme les triangles PAC et GAC ont la même base AC, on a Aire(GAC) = k Aire(PAC). En faisant de même dans PAB, on a aussi Aire(GAB) = k Aire(PAB). Les aires de GAC et GAB étant proportionnelles à celles de PAC et PAB, G est aussi le barycentre de (B, Aire(GAC)) et (C, Aire(GAB)). Ce qui signifie que β et γ sont proportionnels à Aire(GAC)) et Aire(GAB).

***4)** En déduire que les coefficients α, β et γ sont respectivement proportionnels aux aires des triangles GBC, GCA et GAB.*



Ce que l'on a fait à partir du point P sur $]BC[$, on peut le refaire avec un point Q sur $]CA[$. Tout comme β et γ, γ et α sont proportionnels à Aire(GAB)) et Aire(GBC). Avec γ en commun dans les deux cas, le rapport de proportionnalité est le même, ainsi α, β et γ sont proportionnels aux aires des triangles *GBC*, *GCA* et *GAB*.

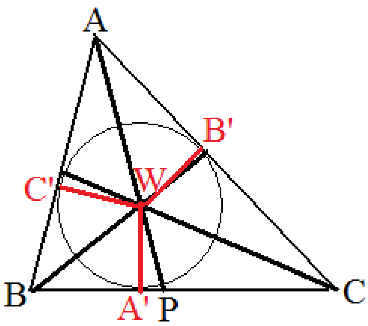
5) Que se passe-t-il dans le cas particulier où G est le centre de gravité de ABC ?

Le centre de gravité de *ABC* est aussi l'isobarycentre de *A*, *B*, *C*. Comme les coefficients des trois points sont égaux, les aires de *GAB*, *GBC* et *GCA* sont égales.

Exercice 2' : Centre du cercle inscrit, centre du cercle circonscrit, orthocentre d'un triangle, vus comme des barycentres

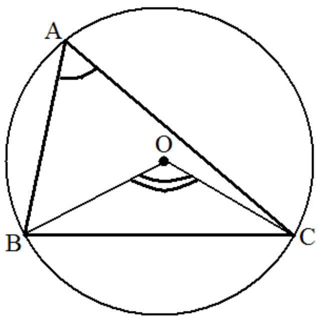
Cet exercice est une suite de l'exercice 2, dont il utilise les résultats.

***1)** On pose a = BC, b = CA, c = AB. Montrer que le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC est le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c). On rappelle que le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point d'intersection des bissectrices du triangle, c'est-à-dire qu'il est équidistant des trois côtés du triangle.*



Appelons W le centre du cercle inscrit, et menons à partir de lui les trois perpendiculaires aux côtés. On a $WA' = WB' = WC'$ (*voir dessin*), et ce sont les trois hauteurs des triangles *WBC*, *WCA*, *WAB*. Etant égales, les aires de ces triangles sont proportionnelles aux côtés a, b et c. On a vu dans l'exercice précédent qu'il s'agit des coefficients du barycentre W. Ainsi le centre du cercle inscrit est le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c).

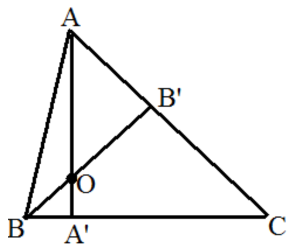
2) Montrer que le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC dont les trois angles sont aigus[4] *est le barycentre de (A, sin 2A), (B, sin 2B), (C, sin 2C). On rappelle cette formule donnant l'aire d'un triangle de côtés a, b, c : Aire = (1/2) b c sin A.*



Toujours grâce à l'*exercice 2*, le point O est le barycentre de (A, aire(OBC)), (B, aire(OCA)), (C, aire(OAB)). L'aire de OBC est égale à (1/2) OB OC sin(BOC) avec $OB = OC$ comme rayon R du cercle circonscrit. Pour le cercle circonscrit, l'angle BOC est un angle au centre, dont on sait qu'il est le double de l'angle inscrit correspondant, ici l'angle A. Ainsi sin(BOC) = sin 2A. En faisant de même pour les deux autres triangles, les trois aires ont un facteur commun (1/2) R^2. Elles sont proportionnelles à sin(2A), sin(2B), sin(2C). O est bien le barycentre de (A, sin 2A), (B, sin 2B), (C, sin 2C).

[4] Avec les angles aigus, le point O est à l'intérieur du triangle *ABC*, ce qui permet d'appliquer les résultats de l'*exercice 2*. Mais même si le triangle *ABC* a un angle obtus, la formule donnant le centre du cercle circonscrit reste valable, nous ne le démontrerons pas ici.

3) Montrer que l'orthocentre H d'un triangle ABC ayant ses trois angles aigus est le barycentre de (A, tan A), (B, tan B), (C, tan C). On rappelle que l'orthocentre est le point de concours des trois hauteurs du triangle.



Considérons la hauteur [*AA*']. Le point *A*' est le barycentre de (*B*, *A'C*), (*C*, *A'B*), comme on l'a vu dans l'*exercice 2 - question 1*. Dans le triangle rectangle *ABA*', on a tan *B* = *AA*' / *A'B*, et dans le triangle *ACA*' tan *C* = *AA*' / *A'C*.

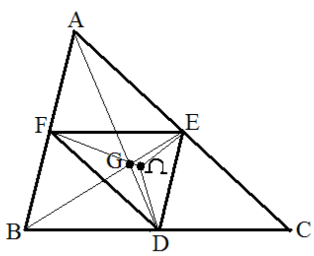
Ainsi tan *B* / tan *C* = *A'C* / *A'B* : tan *B* et tan *C* sont proportionnels à *A'C* et *A'B*. Le point *A*' est aussi le barycentre de (*B*, tan *B*), (*C*, tan *C*). Prenons le point *H*' barycentre de (*A*, tan *A*), (*B*, tan *B*), (*C*, tan *C*). Grâce à la règle du barycentre partiel, ici *A*', ce point *H*' se trouve sur la hauteur [*AA*']. A son tour, en prenant la hauteur [*BB*'], *B*' est le barycentre de (*A*, tan *A*), (*C*, tan *C*), et par la règle du barycentre partiel, le point *H*' se trouve aussi sur cette hauteur. Le point *H*' est l'orthocentre du triangle, *H*' = *H*.

Exercice 3 : Isobarycentre d'un triangle fil de fer

Soit ABC un triangle dont les trois côtés sont formés de tiges très fines de fil métallique homogène dont la masse volumique - ou plutôt linéaire dans le cas présent- est K (ainsi une tige métallique de longueur L a une masse égale à $K \times L$ *).*

1) Déterminer le centre d'inertie Ω *d'un tel triangle. Pour cela, on utilisera le fait que la règle des barycentres partiels fonctionne même pour une infinité de points pesants, ce qui permet de remplacer chaque côté -chaque tige- par son barycentre affecté de sa masse. On utilisera aussi le fait que le centre du cercle inscrit ABC d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c est le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c) (cf. exercice 2').*

La tige [*BC*] a pour centre d'inertie son milieu *D* et son poids est *K a*. Il en est de même avec les deux autres tiges dont les milieux sont *E* et *F*. Grâce à la règle du barycentre partiel, le point Ω est le barycentre de (*D*, *K a*), (*E*, *K b*), (*F*, *K c*) ou encore de (*D*, *a*), (*E*, *b*), (*F*, *c*).



On est censé savoir que le triangle des milieux *DEF* a ses côtés parallèles à ceux de *ABC* avec une longueur moitié, soit *EF* = *a* / 2, *FD* = *b* / 2 et *DE* = *c* / 2. Comme un barycentre a ses coefficients à un facteur près, le point Ω est aussi le barycentre de (*D*, *a* / 2), (*E*, *b* / 2), (*F*, *c* / 2). Il s'agit donc du centre du cercle inscrit du triangle *DEF*.

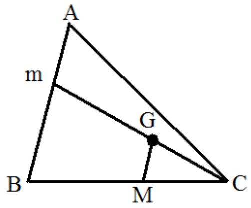
2) Montrer que ce point Ω *est distinct (sauf cas exceptionnel) du centre de gravité G du triangle ABC.*

Rappelons que l'on passe du triangle *ABC* au triangle *DEF* par l'homothétie de centre *G* et de rapport –1/2. Comme l'homothétie conserve les barycentres, *G* est aussi le centre de gravité du triangle *DEF*, il n'est donc pas confondu avec le centre du cercle inscrit, sauf cas exceptionnel (*ABC* équilatéral).

Exercice 4 : Construction du barycentre de 3 points

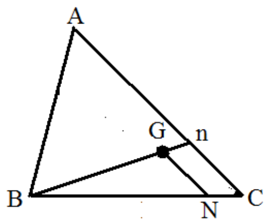
Considérons un vrai triangle ABC (points non confondus et triangle non aplati) et donnons aux points A, B, C les coefficients a, b, c avec a + b + c = 1. On appelle G le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c). En faisant varier a, b, c, on obtient tous les barycentres G possibles de A, B, C *puisque les coefficients sont tous à un facteur non nul près, ce qui permet de prendre a + b + c = 1 sans perte de généralité.*

1) On suppose ici que a + b ≠ 0. Dans ces conditions le barycentre m de (A, a), (B, b) existe. En appelant M la projection de G sur (BC) parallèlement à (AB), montrer que ***BM** = c* ***BC**.*



Grâce à la règle du barycentre partiel, *G* est aussi le barycentre de (*m*, *a* + *b*), (*C*, *c*) ou encore (*m*, 1 – *c*), (*C*, *c*). Cela signifie que :
mG = *c* **mC** comme on l'a vu en cours. Lors de la projection sur (*BC*) cette relation vectorielle est conservée, et l'on a :
BM = *c* **BC**.

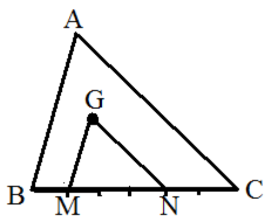
2) On suppose en plus que a + c ≠ 0. En appelant N la projection de G sur (BC) parallèlement à (AC), montrer que ***NC** = b* ***BC**.*



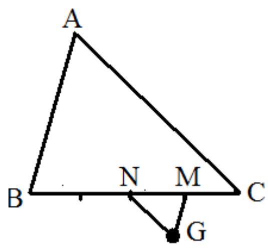
Appelons *n* le barycentre de (*A*, *a*), (*C*, *c*) qui existe puisque *a* + *c* ≠ 0. Grâce à la règle du barycentre partiel, *G* est aussi le barycentre de (*n*, *a* + *c*), (*B*, *b*), ou (*n*, 1 – *b*), (B, *b*), ce qui signifie que **nG** = *b* **nB**. Par projection sur (*BC*), cela devient : **CN** = *b* **CB** ou **NC** = *b* **BC**.

3) En déduire qu'avec a + b ≠ 0 et a + c ≠ 0 on a ***BM** = c* ***BC, MN** = a* ***BC, NC** = b* ***BC.** Cela donne un moyen de construire le barycentre. Construire par exemple le barycentre de (A, 3), (B, 2), (C, 1) puis celui de (A, 2), (B, – 1), (C, 3)*

On sait déjà que **BM** = *c* **BC** et **NC** = *b* **BC**. On en déduit que **MN** = **MB** + **BC** + **CN** = – *c* **BC** + **BC** – *b* **BC** = (1 – *b* – *c*) **BC** = *a* **BC**.

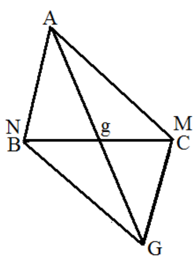


Le barycentre *G* de (*A*, 3), (*B*, 2), (*C*, 1) est aussi celui de (*A*, 3/6), (*B*, 2/6), (*C*, 1/6) où la somme des coefficients vaut 1. En découpant le segment [*BC*] en six parts, on place le point *M* à une unité à partir de *B* puis *N* à deux unités de *C*. En menant à partir de ces deux points les parallèles aux deux côtés (*AB*) et (*AC*) on trouve un point qui n'est autre que *G* grâce à ce qui précède.



Le barycentre *G* de (*A*, –1), (*B*, 2), (*C*, 3) est aussi celui de (*A*, – 1/4), (*B*, 2/4), (*C*, 3/4). En découpant le segment [*BC*] en quatre parts, on place le point *M* à 3 unités à partir de *B* puis *N* à deux unités de *C*. En menant à partir de ces deux points les parallèles aux deux côtés (*AB*) et (*AC*) on trouve un point qui n'est autre que *G* grâce à ce qui précède.

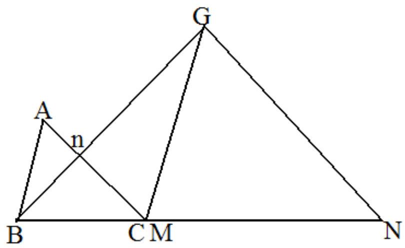
4) Traiter maintenant le cas exceptionnel où a + b = 0 et a + c = 0, et vérifier que la construction de G est la même que précédemment.



Les conditions imposent que *a* = –1, *b* = 1 et *c* = 1. Le barycentre de (*B*, 1), (*C*, 1) est le milieu *g* de [*BC*]. Grâce à la règle du barycentre partiel, *G* est le barycentre de (*g*, 2), (*A*, –1), ce qui signifie que **OG** = 2 **Og** – **OA** avec *O* point origine quelconque. En prenant *O* en *A*, **AG** = 2 **Ag**, ainsi *ABGC* est un parallélogramme, ses diagonales se coupant en leur milieu. En appelant *M* et *N* les projetés de *G* tels qu'ils ont été définis précédemment, on trouve que *M* est en *C* et *N* en *B*, et l'on a encore

BM = 1 **BC =** c **BC**, **NC** = 1 **BC =** b **BC** (et par suite **MN** = –**BC** = a **BC**).

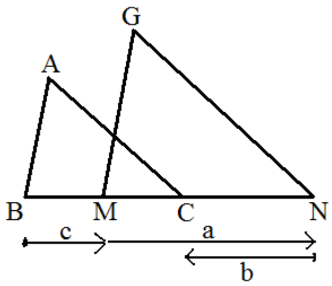
5) Traiter enfin le cas où a + b = 0 et a + c ≠ 0, et vérifier que la construction de G est la même que précédemment.



On a dans le cas présent c = 1, et b = –a avec a différent de –1. On peut prendre le barycentre n de (A, a), (C, 1) et G est tel que **nG** = b **nB =** –a **nB**, puis par projection comme précédemment **NC** = –a **BC**.

Le barycentre de (A, a), (B, – a), (C, 1) est aussi tel que a **GA** – a **GB** + **GC** = **0**, a(**GA** – **GB**) + **GC** = **0**, a **BA** + **GC** = **0**, **GC** = a **AB**, (GC) est parallèle à (AB) et le projeté M est en C. Avec **BM** = 1 **BC =** c **BC**, et **NC** = –a **BC,** la construction de G est toujours la même.

6) Prendre un point G quelconque du plan, et montrer qu'il s'agit d'un barycentre de A, B, C, en précisant ses coefficients.



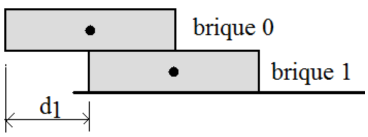
A partir de G on mène les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent (BC) en M et N. En prenant a, b et c tels que **BM** = c **BC**, **NC** = b **BC** et **MN** = a **BC**, G est le barycentre associé à ces coefficients.

Finalement l'ensemble des barycentres de trois points est le plan engendré par ces trois points.

Exercice 5 : Empilage de briques en porte-à-faux

On dispose de briques identiques rectangulaires, de longueur égale à 2 pour simplifier les calculs, et de hauteur quelconque. Il s'agit de les poser les unes sur les autres, sans les coller, en les mettant en porte-à-faux de façon à obtenir un surplomb le plus grand possible. Par surplomb on entend la distance horizontale séparant la brique la plus haute et la brique la plus basse. Remarquons que dans ce problème seules les distances horizontales interviennent, les hauteurs verticales n'ont pas d'influence sur l'équilibre.

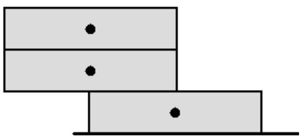
1) Traiter le cas de deux briques en limite d'équilibre.

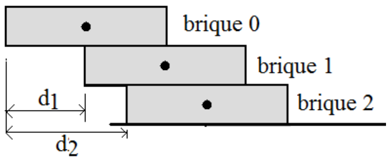


Pour que la brique 0 (*voir figure*) ne bascule pas, il convient que son centre d'inertie -le centre du rectangle- soit au-dessus de la base de la brique 1 qui est en dessous d'elle, soit $d_1 \geq 1$ puisque chaque brique a pour longueur 2. A la limite (équilibre instable), on a $d_1 = 1$, ce qui correspond au surplomb maximal. Remarquons que dans ce problème seules les distances horizontales interviennent, les hauteurs verticales n'ont pas d'influence sur l'équilibre.

2) Traiter le cas de trois briques en limite d'équilibre.

Gardons la configuration des deux briques précédentes, et rajoutons une troisième brique au-dessus. Pour respecter l'équilibre, le mieux que l'on puisse faire est de la mettre exactement au-dessus de la brique 0. Le surplomb ne change pas, et il en serait de même en ajoutant de nouvelles briques au-dessus. Ce n'est pas ainsi qu'il faut agir.





Nous allons mettre la brique 2 au-dessous de la brique 1. Pour qu'il n'y a ait pas basculement du bloc des briques 0 et 1 par rapport à la brique 2, il convient que leur barycentre soit au-dessus de la brique 2, c'est-à-dire à une distance horizontale au moins égale à d_2. Le barycentre de la brique 0 est à la distance $d_0 + 1$ avec $d_0 = 0$, celui de la brique 1 est à la distance $d_1 + 1$. Le barycentre des deux briques de même poids est à la distance $(d_0 + 1 + d_1 + 1) / 2$, par définition du barycentre et de la propriété des barycentres partiels. On est à la limite de l'équilibre lorsque :

$d_2 = (d_0 + 1 + d_1 + 1) / 2.$

3) Traiter le cas d'un nombre quelconque de briques, de façon à obtenir le surplomb maximal en limite d'équilibre. On prendra N + 1 briques numérotées de 0 à N, avec d_i désignant l'écart de la brique i par rapport à la brique 0, et l'on montrera que $d_i = d_{i-1} + 1 / i$ à partir de $d_0 = 0$. En déduire d_N.

Supposons que l'on ait placé les k briques de 0 à $k - 1$ en limite d'équilibre, et ajoutons en-dessous la brique k à la distance d_k. Pour qu'il n'y a ait pas basculement du bloc des k briques au-dessus de la brique k, le barycentre de ce bloc doit être à une distance au moins égale à d_k. Grâce à la règle du barycentre partiel, ce barycentre est à la distance horizontale :
$(d_0 + 1 + d_1 + 1 + d_2 + 1 + \ldots + d_{k-1} + 1) / k.$
La limite d'équilibre est obtenue lorsque $d_k = (d_0 + 1 + d_1 + 1 + d_2 + 1 + \ldots + d_{k-1} + 1) / k.$

$k\, d_k = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1} + k$
On a aussi au rang précédent $k - 1$:
$(k - 1)\, d_{k-1} = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-2} + k - 1$
Par soustraction, il reste :
$k\, d_k - (k - 1)\, d_{k-1} = d_{k-1} + 1$
$k\, d_k - k\, d_{k-1} = 1$
$d_k - d_{k-1} = 1 / k$, $d_k = d_{k-1} + 1 / k$

Appliquons cette formule de $k = 1$ jusqu'à $k = N$:
$d_1 = d_0 + 1$ (avec $d_0 = 0$)
$d_2 = d_1 + 1 / 2$
…
$d_N = d_{N-1} + 1 / N$
Par addition membre à membre, seul subsiste :
$d_N = 1 + 1 / 2 + 1 / 3 + \ldots + 1 / N$

4) Les nombres H_n de la forme $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$ sont appelés nombres harmoniques.

a) Montrer que H_n tend vers l'infini pour n infini. Pour cela, regrouper les termes qui forment H_n par groupes successifs de 1, 2, 4, 8, 16 termes, etc., et montrer que chaque groupe est supérieur à 1/2. En déduire que le surplomb limite obtenu par l'empilage des briques peut être rendu aussi grand que l'on veut.

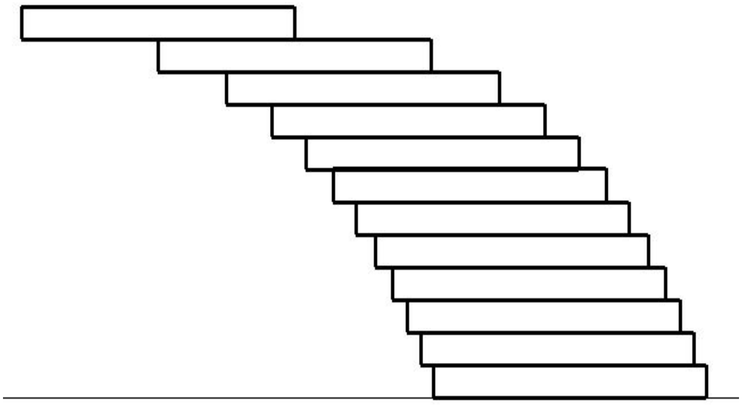
$H_n = \underline{1} + \underline{1/2+1/3} + \underline{1/4+1/5+1/6+1/7} + \underline{1/8+1/9+1/10+1/11+1/12+1/13+1/14+1/15} + 1/16+ \ldots$
Le premier groupe 1 est supérieur à 1/2, le deuxième groupe $\underline{1/2+1/3}$ a chacun de ses 4 termes supérieur à 1/4 , il est supérieur à 1/2, le troisième groupe a chacun de ses 8 termes supérieur à 1/16, il est supérieur à 1/2, et ainsi de suite. Quand n tend vers l'infini, le nombre de groupes de termes augmente indéfiniment, et comme chacun est supérieur à 1/2, leur somme tend vers l'infini.

Revenons à l'empilage des briques. Lorsque N tend vers l'infini, le surplomb limite $d_N = H_N$ tend vers l'infini.

b) Faire le programme qui visualise l'empilage des briques. Traiter les exemples de 12 briques, puis de 1000 briques. Qu'observe-t-on ?

```
/* se donner le nombre N, la hauteur d'une brique hbrique, déclarer d[] sur N+1 cases */
d[0]=0; h=0.;
  rectangle(xorig,yorig,xorig+ zoom*2.,yorig-zoom*hbrique,black); /* dessin de la brique 0 */

  for(i=1;i<=N;i++)
     { d[i]=d[i-1]+1./(float)i; h-=hbrique;
       rectangle(xorig+zoom*d[i],yorig-zoom*h,xorig+ zoom*(d[i]+2.),yorig-zoom*(h+hbrique),black);
     }
```



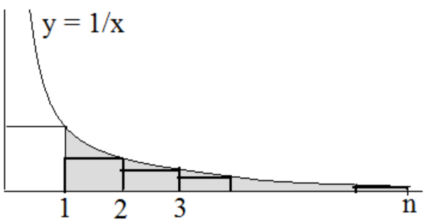
Cas de 12 briques en limite d'équilibre

Cas de 1000 briques

Si l'exemple des 12 briques est intéressant, celui des 1000 briques est particulièrement décevant, car le surplomb reste particulièrement faible, et l'on est loin de ce que la théorie pourrait faire croire.

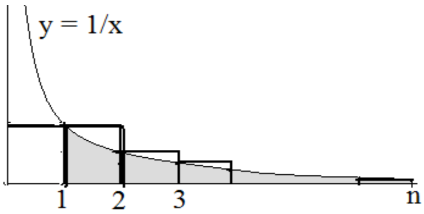
c) En s'aidant de la définition du logarithme népérien et de considérations d'aires, montrer que $\ln n < H_n < 1 + \ln n$*. Conclure quant à la croissance de* d_N*.*

On sait que ln x est la primitive de $1/x$ qui s'annule en 1 (avec $x > 0$). Pour $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$, et il s'agit de l'aire délimitée par la courbe $y = 1/x$ et l'axe des x entre 1 et x.



Ainsi ln n est l'aire dessinée *en gris sur la figure*. Cette surface contient celles de rectangles de base 1 et de hauteur 1/2, 1/3, etc., soit :

$$1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n < \ln n, \text{ ou } H_n < 1 + \ln n.$$



En prenant les rectangles supérieurs on a aussi :
$1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/(n-1) > \ln n$,
et a fortiori
$H_n > \ln n$.

L'encadrement de H_n indique que sa croissance est du même type que celle, désespérément lente, du logarithme. Cela explique que le surplomb d_N obtenu pour $N = 1000$ reste faible.

Exercice 6 : Jeu de barycentres

Règle pratique : Un point A de poids a peut être remplacé par deux points pondérés,(A, a_1), (A, a_2) avec $a_1 + a_2 = a$. L'exercice suivant invite à utiliser cette règle.

Prendre un triangle ABC. Soit I le point aux 5/8 de [BC] à partir de B, K le point aux 3/5 de [AB] à partir de A, et J le milieu de [CK]. Construire le barycentre G de (A, 12), (B, 3), (C, 5), et montrer que A, G, J, I sont alignés, avec G au milieu de [AJ] et J aux 4/5 de [AI] à partir de A.

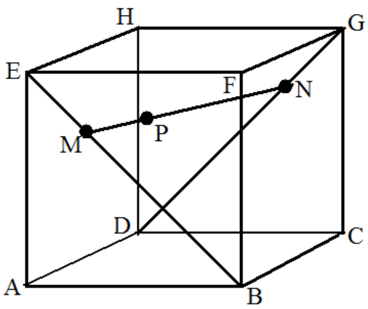
De par sa position, *K* est le barycentre de (*A*, 2), (*B*, 3). Prenons maintenant le barycentre de (*A*, 2), (*B*, 3), (C, *5*), en profitant du fait que 2 + 3 = 5. Grâce à la règle du barycentre partiel, c'est aussi le barycentre de (*K*, 5), (*C*, 5), c'est-à-dire le milieu de [*CK*] qui n'est autre que *J*.

Venons-en au barycentre *G* qui est aussi le barycentre des 4 points (*A*, 10), (*A*, 2), (*B*, 3), (*C*, 3). Le regroupement des trois derniers points donnant *J* (avec une somme de poids égale à 10), le point *G* est le barycentre de (*A*, 10), (*J*, 10), c'est-à-dire le milieu de [*AJ*], soit **AG** = (1/2) **AJ**.

A son tour, par sa définition, *J* est le barycentre de (*B*, 3), (*C*, 5). Toujours grâce à la règle du barycentre partiel, *G* est le barycentre de (*A*, 12), (*J*, 8). Il est donc situé aux 2/5 de [*AJ*] à partir de *A*, soit **AG** = (2/5) **AI**.

Avec **AG** = (1/2) **AJ** et **AG** = (2/5) **AI**, les points *A*, *G*, *J*, *I* sont alignés, et l'on vérifie aisément que **AJ** = (4/5) **AI**.

Exercice 7 : Mouvement d'un barycentre dans un cube



On considère un cube ABCDEFGH de base ABCD horizontale et de côté unité (voir figure). Un point M décrit [EB] avec ***EM*** *= t* ***EB****, le paramètre t variant de 0 à 1 (si t est le temps, M décrit [EB] à vitesse constante). De même un point N décrit |[GD] avec* ***GN*** *= t* ***GD****. Enfin un point P est pris sur [MN] avec* ***MP*** *= t* ***MN****.*

1) Montrer que M est le barycentre de (E, 1 – t), (B, t), et faire de même pour N ainsi que pour P.

On sait que **EM** = *t* **EB** signifie que *M* est le barycentre de (*E*, 1 – *t*), (*B*, *t*). De même **GN** = *t* **GD** signifie que *N* est le barycentre de (*G*, 1 – *t*), (*D*, *t*), et *P* est le barycentre de (*M*, 1 – *t*), (*N*, *t*).

2) En s'aidant du 1°, montrer que P est un certain barycentre des points E, B, G, D avec des coefficients que l'on précisera.

Lorsque l'on prend *M* comme barycentre de (*E*, 1 – *t*), (*B*, *t*), la somme des coefficients vaut 1, alors que *M* pèse 1 – *t* lorsque l'on prend *P*. Alors multiplions par 1 – *t*, et *M* est aussi le barycentre de (E, $(1 - t)^2$, (B, $(1 - t)\, t$) avec une somme des coefficients égale à $1 - t$. De même N est le barycentre de (G, $1 - t$), (D, t) et aussi, en multipliant par t, de (G, $t\,(1 - t)$), (D, t^2) avec une somme des coefficients égale à t.[5] En regroupant E et B ainsi que G et D, la règle du barycentre partiel nous donne M comme barycentre de (E, $(1 - t)^2$, (B, $(1 - t)\, t$), (G, $t\,(1 - t)$), (D, t^2).

3) Montrer que la trajectoire de M, qui part de E pour arriver en D, passe par O centre du cube.

Pour $t = 1/2$, le point M est au centre de la face carrée $ABFE$, et N au centre de la face opposée $CGHD$. Le point P est alors au milieu de [MN] qui est bien le centre O du cube.[6]

4) En prenant le repère orthonormé (A, ***AB****,* ***AD****,* ***AE****), déterminer les coordonnées x, y, z de P en fonction de t.*

Par définition de P comme barycentre de E, B, G, D, en prenant comme origine A, on a
$\mathbf{AP} = (1 - t)^2\, \mathbf{AE} + (1 - t)\, t\, \mathbf{AB} + t\,(1 - t)\, \mathbf{AG} + t^2\, \mathbf{AD}$, la somme des quatre coefficients valant 1. On en déduit que :

$$\begin{cases} x = (1-t)t + t(1-t) = 2t - 2t^2 \\ y = t(1-t) + t^2 = t \\ z = (1-t)^2 + t(1-t) = 1 - t \end{cases}$$

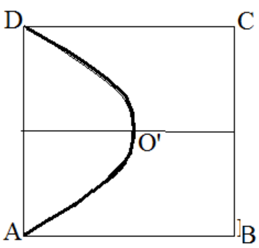
On vient d'obtenir les équations paramétriques de la courbe décrite par P quand t va de 0 à 1.

5) Montrer que la trajectoire de P est dans un plan que l'on précisera.

On constate que $y + z = 1$. Dans le plan yOz correspondant à la face $ADHE$, $y + z = 1$ est la droite (ED). Dans l'espace 3D, comme x est ici quelconque, $y + z = 1$ est l'équation du plan $EDCF$.

6) Montrer que la projection de la trajectoire de P sur un plan horizontal est un arc de parabole dont le sommet est O' projection du centre O du cube.

Il s'agit de trouver une relation entre x et y. En éliminant t, on obtient $x = 2y - 2y^2$. Dans le plan de base, le point O' a pour coordonnées (1/2, 1/2). Faisons un changement de repère par translation avec A allant en O'. Pour un point de coordonnées (x, y) dans le repère initial et (X, Y) dans le nouveau repère, la formule de passage est $x = X + 1/2$, $y = Y + 1/2$. L'équation $x = 2y - 2y^2$ devient :



$X + 1/2 = 2(Y + 1/2) - 2(Y + 1/2)^2$, soit $X = -2\,Y^2$. Il s'agit de l'équation d'une parabole de centre O' et d'axe parallèle à (AB). Comme la trajectoire de P est dans un plan et qu'elle se projette suivant une parabole, elle aussi est parabolique.

[5] Au sens strict, on ne peut faire cela que si t est différent de 0 et de 1. Mais le résultat obtenu pour M comme barycentre des quatre points reste valable en $t = 0$, puisque P est en E, ainsi que pour $t = 1$ avec M en D.

[6] Si l'on ne veut pas considérer cela comme une évidence géométrique, on peut prendre O comme isobarycentre des 8 sommets du cube, puis en regroupant les points $ABFE$ et les points $EGHD$, le point O est aussi le barycentre des deux centres des faces avec des coefficients tous deux égaux à 4, d'où O milieu.

Exercice 8 : Courbe de Bézier dans le plan

Considérons n + 1 points A_k (distincts) dans un plan, avec k de 0 à n. A chacun de ces points A_k est affecté le coefficient $C_n^k\, t^k\, (1-t)^k$ où t est un nombre réel compris entre 0 et 1. Ces points ainsi pondérés ont pour barycentre G. Pour chaque valeur de t est obtenu un barycentre G. Lorsque t décrit [0 1], les barycentres G décrivent une courbe appelée courbe de Bézier des n + 1 points.

1) Montrer que la somme des poids vaut toujours 1. Donner l'expression du vecteur ***OG*** *avec O point origine quelconque. Ecrire l'affixe complexe z_G de G par rapport aux affixes a_k des points A_k.*

Les C_n^k sont les coefficients binomiaux (ou nombre de combinaisons de k objets pris parmi n). Grâce à la formule du binôme, on a comme somme des poids :

$$C_n^0 (1-t)^n + C_n^1\, t\, (1-t)^{n-1} + C_n^2\, t^2 (1-t)^{n-2} + \ldots + C_n^n\, t^n = ((1-t)+t)^n = 1$$

Par définition du barycentre G avec comme paramètre t :

$$\mathbf{OG} = C_n^0 (1-t)^n\, \mathbf{OA}_0 + C_n^1\, t\, (1-t)^{n-1}\, \mathbf{OA}_1 + C_n^2\, t^2 (1-t)^{n-2}\, \mathbf{OA}_2 + \ldots + C_n^n\, t^n\, \mathbf{OA}_n$$

ou en complexes :

$z_G = C_n^0\, (1-t)^n\, a_0 + C_n^1\, t\, (1-t)^{n-1}\, a_1 + C_n^2\, t^2\, (1-t)^{n-2}\, a_2 + \ldots + C_n^n\, t^n\, a_n$, ce qui constitue l'équation paramétrique de la courbe de Bézier (avec le paramètre t entre 0 et 1).

2) Montrer que la courbe de Bézier démarre en A_0 avec comme tangente (A_0A_1) et finit en A_n avec comme tangente $(A_{n-1}\, A_n)$. Que se passe-t-il si l'on change le paramètre t en t' = 1 – t ? Précisons que chaque poids devient prépondérant à tour de rôle lorsque t augmente. C'est pour cela que la courbe de Bézier, allant de A_0 à A_n, passe à proximité des points A_1, A_2, …, comme si ceux-ci jouaient le rôle d'aimants.

Pour $t = 0$, seul le poids de A_0 n'est pas nul, le barycentre G est en A_0. De même pour $t = 1$ où G est en A_n.

Pour avoir les tangentes, prenons la dérivée de **OG** par rapport à t :
$d\mathbf{OG}/dt = -n\, C_n^0 (1-t)^{n-1}\, \mathbf{OA}_0 + C_n^1\, (1-t)^{n-1}\, \mathbf{OA}_1 + t\,(\ldots)$, ce qui donne, pour $t = 0$:
$d\mathbf{OG}/dt_{\ (1/2)} = -n\, \mathbf{OA}_0 + n\, \mathbf{OA}_1 = n\, \mathbf{A_0A_1}$. La tangente est bien (A_0A_1).

Effectuons le changement de paramètre $t' = 1 - t$, et utilisons le fait que $C_n^k = C_n^{n-k}$. La formule donnant **OG** devient :
$\mathbf{OG} = C_n^n\, t'^{\,n}\, \mathbf{OA}_0 + C_n^{n-1}\, t'^{\,n-1} (1-t')\, \mathbf{OA}_1 + \ldots + C_n^0 (1-t')^n\, \mathbf{OA}_n$
$= C_n^0 (1-t')^n\, \mathbf{OA}_n + C_n^1 (1-t')^{n-1}\, \mathbf{OA}_{n-1} + \ldots + C_n^{n-1}\, t'^{\,n-1} (1-t')\, \mathbf{OA}_1 + C_n^n\, t'^{\,n}\, \mathbf{OA}_0$
C'est la même courbe de Bézier mais parcourue en marche arrière de A_n à A_0 quand t' va de 0 à 1.

Il en découle notamment que la tangente en A_n est (A_nA_{n-1}).

3) En utilisant la formule du triangle de Pascal $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, montrer que le point G à l'instant t de la courbe de Bézier des n + 1 points A_k est aussi le point à l'instant t de la courbe de Bézier de n points B_k (k de 0 à n – 1) avec $\mathbf{A_kB_k} = t\, \mathbf{A_kB_{k+1}}$. Ce procédé récursif peut être répété pour aboutir au point unique G.

Dans le calcul du barycentre G à l'instant t, on remplace chaque point A_k avec k entre 1 et $n-1$, et de poids $C_n^k\, t^k\, (1-t)^{n-k}$, par deux points notés A_k* et A_k** confondus avec A_k et de poids respectifs $C_{n-1}^{k-1}\, t^k\,(1-t)^{n-k}$ et $C_{n-1}^{k}\, t^k\,(1-t)^{n-k}$. Pour les points extrêmes A_0 et A_n, on remplace seulement C_n^0 par C_{n-1}^0 lui aussi égal à 1, et de même C_n^n par C_{n-1}^{n-1}. On obtient :

$$\mathbf{OG} = C_{n-1}^0\,(1-t)^n\,\mathbf{OA}_0 + C_{n-1}^0\, t\,(1-t)^{n-1}\,\mathbf{OA}_1{*} + C_{n-1}^1\, t\,(1-t)^{n-1}\,\mathbf{OA}_1{**} + C_{n-1}^1\, t^2\,(1-t)^{n-2}\,\mathbf{OA}_2{*} + C_{n-1}^2\, t^2\,(1-t)^{n-2}\,\mathbf{OA}_2{**} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\, t^{n-1}\,(1-t)\,\mathbf{OA}_{n-1}{**} + C_{n-1}^{n-1}\, t^n\,\mathbf{OA}_n$$

Maintenant regroupons ces points deux par deux :

$$\mathbf{OG} = C_{n-1}^0\,(1-t)^{n-1}\,(\,(1-t)\mathbf{OA}_0 + t\,\mathbf{OA}_1{*}) + C_{n-1}^1\, t\,(1-t)^{n-2}\,(\,(1-t)\mathbf{OA}_1{**} + t\,\mathbf{OA}_2{*}) + C_{n-1}^2\, t\,(1-t)^{n-3}\,(\,(1-t)\,\mathbf{OA}_2{**} + t\,\mathbf{OA}_3{*}) + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\, t^{n-1}\,((1-t)\,\mathbf{OA}_{n-1}{**} + t\,\mathbf{OA}_n)$$

Prenons les points n points B_k barycentres de $(A_k,\ 1-t)$, $(A_{k+1},\ t)$, avec k entre 0 et $n-1$. Ils sont tels que $\mathbf{A}_k\mathbf{B}_k = t\,\mathbf{A}_k\mathbf{B}_{k+1}$. Puis remettons $A_k{*}$ et $A_k{**}$ sous la forme A_k :

$$\mathbf{OG} = C_{n-1}^0\,(1-t)^{n-1}\,\mathbf{OB}_0 + C_{n-1}^1\, t\,(1-t)^{n-2}\,\mathbf{OB}_1 + C_{n-1}^2\, t\,(1-t)^{n-3}\,\mathbf{OB}_2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\, t^{n-1}\,\mathbf{OB}_{n-1}$$

Le point G à l'instant t de la courbe de Bézier des $n+1$ points A_k est aussi le point G à l'instant t de la courbe de Bézier des n points B_k (k de 0 à $n-1$), avec ces points tels que $\mathbf{A}_k\mathbf{B}_k = t\,\mathbf{A}_k\mathbf{B}_{k+1}$. [7]

Cela donne un procédé de construction récursif. A l'instant t, on remplace les A_k par les B_k, puis les B_k par les C_k, etc., et il y a à chaque fois un point de moins. Quand il n'en reste qu'un, c'est le point G à l'instant t de la courbe de Bézier des A_k. Mais pour avoir la courbe de Bézier il convient de répéter ces calculs pour chaque valeur de t.

4) Appliquer le procédé récursif précédent à la courbe de Bézier de quatre points, en prenant $t = 1/2$, ce qui fera intervenir des milieux et des milieux de milieux. En déduire la tangente au point G à l'instant 1/2.

Avec les coefficients concernés, le barycentre $G(t)$ de $A_0\,A_1\,A_2\,A_3$ est tel que :
$\mathbf{OG} = (1-t)^3\,\mathbf{OA}_0 + 3\,t\,(1-t)^2\,\mathbf{OA}_1 + 3\,t^2\,(1-t)\,\mathbf{OA}_2 + t^3\,\mathbf{OA}_3$.
Grâce à la question précédente, G est aussi le barycentre des trois points
$(B_0, (1-t)^2)$, $(B_1, 2\,t\,(1-t))$, (B_2, t^2) avec $\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 = t\,\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 = t\,\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 = t\,\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$.
Et l'on recommence avec deux points seulement : G est le barycentre de $(C_0,\ 1-t)$, $(C_1,\ t)$ avec $\mathbf{B}_0\mathbf{C}_0 = t\,\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 = t\,\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$.

Faisons $t = 1/2$, ce qui donne : $\mathbf{OG}_{(1/2)} = (1/8)\,(\mathbf{OA}_0 + 3\,\mathbf{OA}_1 + 3\,\mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3)$.
C'est aussi le barycentre de $(B_0, 1/4)$, $(B_1, 1/2)$, $(B_2, 1/4)$ soit
$\mathbf{OG}_{(1/2)} = (1/4)\,(\mathbf{OB}_0 + 2\,\mathbf{OB}_1 + \mathbf{OB}_2)$, avec B_0, B_1, B_2 milieux de $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$.

C'est aussi le barycentre de $(C_0, 1/2)$, $(C_1, 1/2)$, avec C_0, C_1 milieux de $[B_0B_1]$, $[B_1B_2]$. Finalement G est le milieu de $[C_0C_1]$ pour $t = 1/2$.

En notant en lettres minuscules les affixes des points concernés, on trouve :

$b_0 = (1/2)(a_0 + a_1)$

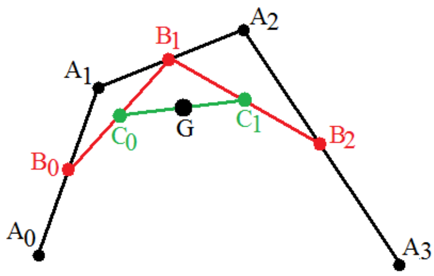
$b_1 = (1/2)(a_1 + a_2)$

$b_2 = (1/2)(a_2 + a_3)$

$c_0 = (1/4)(a_0 + 2a_1 + a_2)$

$c_1 = (1/4)(a_1 + 2a_2 + a_3)$

$g = (1/8)(a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3)$



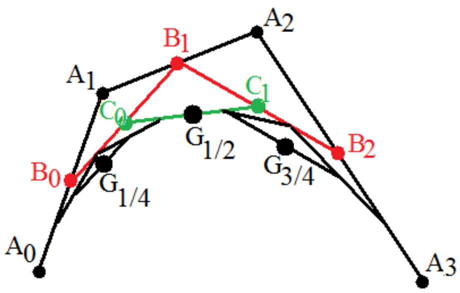
[7] Remarquons qu'à la différence des points fixes A_k, les points B_k dépendent de t.

On a aussi l'affixe de $\mathbf{C_0C_1} = (1/4)\,(-a_0 - a_1 + a_2 + a_3)$

Pour montrer qu'il s'agit de la tangente, dérivons $\mathbf{OG}_t$:
$d\mathbf{OG}/dt = -3(1-t)^2\,\mathbf{OA}_0 + (3\,(1-t)^2 - 6\,t\,(1-t))\,\mathbf{OA}_1 + (6t\,(1-t) - 3\,t^2)\,\mathbf{OA}_2 + 3\,t^2\,\mathbf{OA}_3$
et pour $t = 1/2$,
$d\mathbf{OG}/dt_{\,(1/2)} = -3/4\,\mathbf{OA}_0 - 3/4\,\mathbf{OA}_1 + 3/4\,\mathbf{OA}_2 + 3/4\,\mathbf{OA}_3 = 3\,\mathbf{C_0C_1}$.

5) Toujours avec la courbe de Bézier de quatre points, réutiliser le même procédé utilisant les milieux sur les quatre points déjà obtenus A_0, B_0, C_0, G (voir figure ci-dessus), puis sur les quatre points G, C_1, B_2, A_3, et vérifier que l'on a ainsi les points G aux instants $t = 1/4$ et $t = 3/4$. Pourquoi ce nouveau procédé récursif est-il intéressant ?

Prenons les milieux pour les quatre points A_0, B_0, C_0, G, soit d'abord D_0, D_1, D_2 milieux de $[A_0\,B_0]$, $[B_0\,C_0]$, $[C_0\,G]$, d'où les affixes :



$d_0 = (1/4)\,(3a_0 + a_1)$
$d_1 = (1/8)\,(3a_0 + 4a_1 + a_2)$
$d_2 = (1/16)\,(3a_0 + 7a_1 + 5a_2 + a_3)$
Puis les milieux E_0 et E_1 de $[D_0\,D_1]$ et $[D_1\,D_2]$
$e_0 = (1/16)\,(9a_0 + 6a_1 + a_2)$
$e_1 = (1/32)\,(9a_0 + 15a_1 + 7a_2 + a_3)$
Et enfin G' milieu de $[E_0\,E_1]$
$g' = (1/64)\,(27a_0 + 27a_1 + 9a_2 + a_3)$

Or le point $G_{1/4}$ de la courbe de Bézier pour $t = 1/4$ est tel que
$\mathbf{OG}_{1/4} = (27/64)\,\mathbf{OA}_0 + (27/64)\,\mathbf{OA}_1 + (9/64)\,\mathbf{OA}_2 + (1/64)\,\mathbf{OA}_3$. On trouve bien le point G'.

Grâce à l'effet miroir que l'on a vu en remplaçant t par $1 - t$, le point $G_{3/4}$ à l'instant $t = 3/4$ s'obtient à partir des points A_3, B_2, C_1, G par le même découpage en milieux que pour $t = 1/4$. Par ce procédé, on obtient aussi les tangentes en $G_{1/4}$ et $G_{3/4}$ comme on l'avait eue pour $G_{1/2}$. On a là un nouveau procédé récursif grâce aux milieux, où le calcul sur 4 points se rappelle deux fois sur quatre points, avec en plus une ligne brisée de segments presque collée à la courbe de Bézier. En répétant cette construction récursive sur trois ou quatre étapes, la ligne brisée de segments obtenus se confond quasiment avec la courbe de Bézier. Avec seulement des divisions par deux répétées, cette méthode est particulièrement performante.

Conclusion : Lorsque l'on désire tracer la courbe de Bézier d'un grand nombre de points, on a intérêt à les regrouper quatre par quatre. Par exemple pour 7 points, on prend les quatre points $A_0\,A_1\,A_2\,A_3$, puis les quatre points $A_3\,A_4\,A_5\,A_6$, en appliquant le procédé récursif sur les milieux, et si l'on veut éviter une rupture de pente au point commun A_3, on fait en sorte que les trois points $A_2\,A_3\,A_4$ soient alignés.[8]

Exercice 9 : Barycentre d'une plaque carrée de densité non homogène

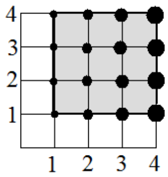
On rappelle que
$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$ et
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)/6$.

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $M\,(m, p)$ de coordonnées m et p, avec m et p entiers appartenant à l'ensemble $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. On obtient

[8] Pour plus de détails, ainsi que des programmes de construction, voir sur mon site rubrique *enseignements-algorithmique- récursif et itératif*, ainsi que *travaux complémentaires-algorithmes-courbe de Bézier en mouvement*.

ainsi un réseau carré de n^2 points. Chaque point M (m, p) est affecté d'une masse m égale à son abscisse.

a) Déterminer les coordonnées du barycentre G_m de la colonne des n points pondérés M (m, p) ayant tous la même abscisse m (avec $1 \le m \le n$).



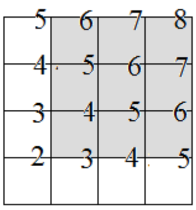
Sur la colonne d'abscisse m se trouvent n points ayant la même masse m. Le barycentre G_m de ces points a aussi la même abscisse, et il est situé au milieu de la colonne, soit $x_{Gm} = m$ et $y_{Gm} = (n + 1)/2$.

b) Déterminer les coordonnées du barycentre G des n^2 points pondérés M (m, p).

Grâce à la règle du barycentre partiel, le barycentre G des n^2 points est aussi le barycentre des n barycentres G_m de chaque colonne affectés de la masse $n\,m$, quand m va de 1 à n. Remarquons que tous ces barycentres G_m ont la même ordonnée, d'où G aussi.

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{m=1}^{n} n\,m\,m}{\sum_{m=1}^{n} n\,m} = \dfrac{n\sum_{m=1}^{n} m^2}{n\sum_{m=1}^{n} m} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)2}{6n(n+1)} = \dfrac{2n+1}{3} \\ y_G = \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

2) On affecte maintenant chaque point M (m, p) du réseau carré de la masse m + p. Déterminer le barycentre G' de ces n^2 points pondérés.



Remplaçons chaque point M par deux points M, l'un avec une masse m et l'autre avec une masse p. G' est le barycentre de ces 2 n^2 points. Or le barycentre des n^2 points pondérés (M, m) est G ((2n + 1)/3, (n + 1)/2) et celui des n^2 points pondérés (M, p) est G_1 ((n + 1)/2), (2n + 1)/3) par symétrie évidente. Par la règle du barycentre partiel, G' est le milieu de $[GG_1]$, soit

G' ((7n +5)/12, (7n + 5)/12).

5. Produit scalaire de deux vecteurs

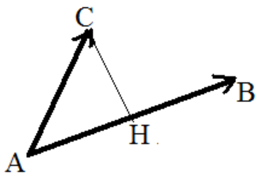
5.1. Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs **V** et **V'** est le nombre égal au produit de leur longueur par le cosinus de leur angle θ (orienté ou pas), soit **V V'** = ||**V**|| ||**V'**|| cos θ, ou encore, en donnant aux deux vecteurs la même origine **AB . AC** = *AB AC* cos θ.

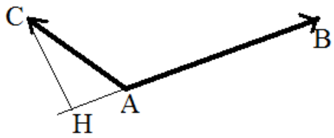
Le fait que l'angle θ soit l'angle orienté (**V**, **V'**) ou l'angle non orienté est dû au fait que cos ($-\theta$) = cos θ. D'autre part, le signe du produit scalaire dépend seulement de cos θ. Si l'angle est aigu, le produit scalaire est positif, s'il est obtus le produit scalaire est négatif.

Il en découle une autre définition :

AB AC = $\overline{AB}\ \overline{AH}$ avec *H* projection orthogonale de *C* sur (*AB*) [9]



produit scalaire positif



produit scalaire négatif

Signalons que le produit scalaire n'est autre que le travail d'une force, à savoir le produit de la projection de la force par le déplacement.[10] Si la force fait un angle aigu avec le déplacement, le travail est positif, ou moteur, et si elle fait un angle obtus, le travail est négatif, ou résistant.

5.2. Propriétés

1) **V V' = V' V**

2) **V V = ||V||², ou AB ² = *AB* ²**

3) **V V' = 0** signifie que les vecteurs sont orthogonaux (vecteurs perpendiculaires ou l'un nul).

4) **V (V'+ V'') = V V' + V V''**

La première propriété, évidente exprime que le produit scalaire est commutatif.
La deuxième propriété utilise le fait que $\theta = 0$, d'où cos $\theta = 1$.
La troisième utilise essentiellement le fait que $\theta = 90°$, soit cos $\theta = 0$.
La quatrième, la propriété de distributivité, se démontre en projetant les vecteurs **V'**, **V**'' et **V**' + **V**'' sur **V**, en donnant aux vecteurs une origine commune.

Contrairement à son apparence simpliste, la deuxième propriété est fondamentale. En effet elle permet de remplacer un carré de longueur par un carré de vecteurs, et d'appliquer la formule de Chasles aux vecteurs, chose impossible avec des longueurs. Et l'on utilise ensuite la distributivité.

5.3. Formule du produit scalaire en repère orthonormé

Avec **V** (*x*, *y*) et **V'** (*x*', *y*'), **V V'** = *x x*' + *y y*'

Dans le repère orthonormé (*O*, **i**, **j**), on a **V** = *x* **i** + *y* **j** et **V**' = *x*' **i** + *y*' **j**. Puis on applique la propriété de distributivité, en développant :

V V' = (*x* **i** + *y* **j**)(*x*' **i** + *y*' **j**) = *x x*' **i i** + *x y*' **i j** + *y x*' **j i** + *y y*' **j j** = *x x*' + *y y*' puisque **i j** = 0 et **i i** = **j j** = 1.

---

[9] Pour démontrer que cette définition est la même que la première, il suffit de constater qu'en valeur absolue les deux résultats sont les mêmes, puis de vérifier qu'avec un angle aigu, le produit $\overline{AB}\,\overline{AH}$ est positif, et qu'avec un angle obtus il est négatif. Rappelons que $\overline{AB}$ est une mesure algébrique, c'est-à-dire une longueur avec un signe en plus, ce qui impose d'avoir au préalable orienté la droite (*AB*). Mais que la droite soit orientée dans un sens ou dans l'autre, le produit $\overline{AB}\ \overline{AH}$ ne change pas.

[10] C'est d'ailleurs à partir de cette notion de travail qu'a ensuite été défini le produit scalaire.

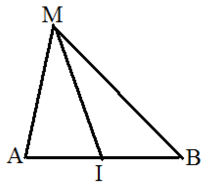
Une application du produit scalaire : les formules d'addition en trigonométrie

Nous allons démontrer la formule $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \text{sins } a \sin b$, les autres formules d'addtion s'en déduisant.

Pour cela, prenons le vecteur $\mathbf{OA}$ $(\cos a, \sin a)$ et le vecteur $\mathbf{OB}$ $(\cos b, \sin b)$ dans un repère orthonormé. Ces deux vecteurs ont une longueur unité et font respectivement les angles a et b avec l'axe des x. Leur produit scalaire est $\mathbf{OA}\ \mathbf{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Le point B se projette en H sur (OA), et l'on a aussi $\mathbf{OA}\ \mathbf{OB} = \overline{OA}\ \overline{OH} = \cos(a - b)$, puisque $OA = 1$, et $\overline{OA} = 1$ si l'on oriente la droite (OA) de O vers A, et que $\overline{OH} = \cos(a - b)$ puisque l'angle $(\mathbf{OA}, OB) = b - a$ et que $\cos(b - a) = \cos(a - b)$. La formule est démontrée.

6. Formules dans un triangle

C'est ici que le lien entre produit scalaire et barycentre va commencer à se faire, le barycentre concerné étant le milieu dans ce qui suit.



1) Soit un triangle MAB, avec I milieu de $[AB]$. Alors

$$\boxed{\mathbf{MA}\ \mathbf{MB} = MI^2 - AB^2 / 4}$$

En effet $\mathbf{MA}\ \mathbf{MB} = (\mathbf{MI} + \mathbf{IA})(\mathbf{MI} + \mathbf{IB}) = \mathbf{MI}^2 + \mathbf{MI}\ (\mathbf{IA} + \mathbf{IB}) + \mathbf{IA}\ \mathbf{IB}$. Avec $\mathbf{MI}^2 = MI^2$, $\mathbf{IA} + \mathbf{IB} = \mathbf{0}$, et $\mathbf{IA}\ \mathbf{IB} = -\mathbf{IA}^2 = -IA^2$, il reste $\mathbf{MA}\ \mathbf{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - AB^2 / 4$

2) Toujours avec I milieu de $[AB]$ dans MAB

$$\boxed{\begin{array}{l} MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + AB^2 / 2 \\ MA^2 - MB^2 = 2\ \overline{AB}\ \overline{IH} \quad \text{avec } H \text{ projeté de } M \text{ sur } (AB) \end{array}}$$

$MA^2 + MB^2 = \mathbf{MA}^2 + \mathbf{MB}^2 = (\mathbf{MI} + \mathbf{IA})^2 + (\mathbf{MI} + \mathbf{IB})^2 = 2\,\mathbf{MI}^2 + 2\,\mathbf{MI}\ (\mathbf{IA} + \mathbf{IB}) + \mathbf{IA}^2 + \mathbf{IB}^2$
$= 2\,MI^2 + 2\,IA^2 = 2\,MI^2 + AB^2 / 2$

$MA^2 - MB^2 = \mathbf{MA}^2 - \mathbf{MB}^2 = (\mathbf{MI} + \mathbf{IA})^2 - (\mathbf{MI} + \mathbf{IB})^2 = 2\,\mathbf{MI}\ (\mathbf{IA} - \mathbf{IB}) + \mathbf{IA}^2 - \mathbf{IB}^2$
$= 2\,\mathbf{MI}\ \mathbf{BA} = 2\,\mathbf{IM}\ \mathbf{AB} = 2\ \overline{AB}\ \overline{IH}$

3) Plus généralement

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Avec } a + b \neq 0 \text{ et } G \text{ barycentre de } (A, a), (B, b) \\ a\,MA^2 + b\,MB^2 = (a + b)\,MG^2 + a\,GA^2 + b\,GB^2 \end{array}}$$

$a\,MA^2 + b\,MB^2 = a\,\mathbf{MA}^2 + b\,\mathbf{MB}^2 = a\,(\mathbf{MG} + \mathbf{GA})^2 + b\,(\mathbf{MG} + \mathbf{GB})^2$
$= (a + b)\,\mathbf{MG}^2 + 2\,\mathbf{MG}\ (a\,\mathbf{GA} + b\,\mathbf{GB}) + a\,\mathbf{GA}^2 + b\,\mathbf{GB}^2$
C'est là que le barycentre provoque une simplification majeure : $a\,\mathbf{GA} + b\,\mathbf{GB} = \mathbf{0}$ par définition du barycentre.
$= (a + b)\,MG^2 + a\,GA^2 + b\,GB^2$

Insistons sur la méthode : grâce aux carrés on passe en vecteurs, puis à cause de la présence de a et b, on intercale le point qui s'impose, le barycentre G, puis on développe les carrés comme on a l'habitude de le faire avec des nombres, en profitant des règles de commutativité et de distributivité du produit scalaire. A la fin, les carrés sont remis en longueurs.

4) **Formule d'Al Kashi**

> Dans un triangle quelconque ABC avec $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, on a la relation :
> $a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$
> et de même avec les deux autres côtés

En effet, $a^2 = BC^2 = \mathbf{BC}^2 = (\mathbf{BA} + \mathbf{AC})^2 = \mathbf{BA}^2 + 2\,\mathbf{BA}\,\mathbf{AC} + \mathbf{AC}^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\mathbf{AB}\,\mathbf{AC}$
$= b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$ par définition du produit scalaire **AB AC**.

Cette formule généralise le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle, soit $a^2 = b^2 + c^2$ lorsque l'angle A vaut 90°, d'où **AB AC** = 0.

7. Exercices sur barycentre et produit scalaire

Exercice 10 : Barycentre et polygone régulier

Soit n un entier naturel non nul et q un nombre réel. Dans le plan complexe, on prend n points $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ *d'affixes respectifs* $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$*. On affecte à ces points les coefficients respectifs* $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}$.

1) Vérifier que le système des n points pondérés (A_k, q^k) *avec k compris entre 0 et n – 1 admet un barycentre G sauf dans quelques cas que l'on précisera. On rappelle la formule du cours sur la somme des termes d'une suite géométrique : pour q différent de 1, on a :*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Appelons M la somme des poids : $M = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$
Si $q = 1$, $M = n$, et si $q \neq 1$, $M = (1 - q^n) / (1 - q)$.
M ne peut s'annuler que pour $q \neq 1$ et $q^n = 1$, ce qui n'est possible que pour $q = -1$ avec n pair. Ce sont les seuls cas où M est nulle, et que le barycentre n'existe pas. Dans tous les autres cas, $M \neq 0$ et le barycentre G existe.

2) On suppose désormais que les n points sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité de centre O origine du plan complexe, avec $z_0 = 1$ *comme affixe de* A_0*, et* z_i *affixes des sommets. Déterminer l'affixe Z du point G, lorsqu'il existe, en fonction de n et de q.*

On ne prend pas $q = -1$ avec n pair. Par définition du barycentre, on a
$Z = (1 + q\, z_1 + q^2 z_2 \ldots + q^n z_n) / M$.
Mais on sait que les sommets du polygone régulier ont pour affixe les n racines $n^è$ de l'unité, et que si l'on prend z_1 comme racine principale, les racines $n^è$ s'écrivent toutes sous la forme z_1^k avec k compris entre 0 et $n - 1$. On distingue deux cas :

* Si $q = 1$, $Z = (1 + z_1 + z_1^2 \ldots + z_1^{n-1}) / n$ qui vaut 1 dans le cas spécial où $n = 1$, ou sinon $(1 - z_1^n) / (n(1 - z_1))$, et comme $z_1^n = 1$, $Z = 0$, G est en O, ce qui est normal puisque le centre du polygone régulier est aussi l'isobarycentre de ses n sommets.

* Si $q \neq 1$, $Z = (1 + qz_1 + q^2z_1^2 \ldots + q^{n-1}z_1^{n-1}) / M = (1 + qz_1 + (qz_1)^2 \ldots + (qz_1)^{n-1}) / M$
$= ((1 - q^nz_1^n) / (1 - qz_1))\ (1 - q) / (1 - q^n)$. Avec $z_1^n = 1$, il reste :
$Z = (1 - q) / (1 - qz_1)$ avec $z_1 = e^{i\,2\pi / n}$.

3) En déduire les coordonnées X et Y du point G. Peut-il arriver que le point G soit sur l'axe réel ?

Pour $n = 1$, $X = 1$, $Y = 0$. Sinon
pour $q = 1$ et $n > 1$, $X = Y = 0$
et pour $q \neq 1$, avec $Z = (1 - q) / (1 - q\cos(2\pi/n) - i\,q\sin(2\pi/n))$
$= (1 - q)\,(1 - q\cos(2\pi/n) + i\,q\sin(2\pi/n)) / (1 - 2\,q\cos(2\pi/n) + q^2)$

d'où $X = \dfrac{(1-q)(1-q\cos(2\pi/n))}{1-2q\cos(2\pi/n)+q^2}$ et $Y = \dfrac{(1-q)\ q\ \sin(2\pi/n)}{1-2q\cos(2\pi/n)+q^2}$

Le point G est sur (Ox) ssi $Y = 0$. Cela arrive déjà pour $n = 1$ avec G en A_0, et pour $q = 1$ ($n > 1$) avec G en O. Sinon pour $q \neq 1$ (et $n > 1$) cela arrive pour $q = 0$ avec $G = A_0$, ou pour $\sin(2\pi/n) = 0$, soit $2\pi / n = 0\ [\pi]$, ce qui ne peut avoir lieu que pour $n = 2$ avec G barycentre de $(A_0, 1)$, (A_1, q), ces deux points étant déjà sur (Ox).

4) Pour q donné, déterminer la limite de X et de Y lorsque n tend vers l'infini.

Lorsque $q = 1$, G reste en O pour n infini. Lorsque $q \neq 1$, $2\pi / n$ tend vers 0, $\cos(2\pi/n)$ tend vers 1 et $\sin(2\pi/n)$ tend vers 0, X est de la forme $(1 - q)^2 / ((1 - q)^2 = 1$. Ainsi X tend vers 1 et Y tend vers 0. Le point G tend vers A_0.[11]

5) Prendre le cas particulier où n = 4, et démontrer que le point G décrit un cercle de centre (1/2, – 1/2) lorsque q décrit l'ensemble des réels.

Les coordonnées de G sont $X = (1 - q) / (1 + q^2)$, $Y = q\,(1 - q) / (1 + q^2)$. En faisant le calcul, on s'aperçoit que $X^2 + Y^2 - X + Y = 0$, ce qui prouve que G est sur le cercle de centre $(1/2, -1/2)$ et de rayon $\sqrt{2} / 2$. Et comme $Y = q\,X$, le point G est sur une droite dont la pente q prend toutes les valeurs possibles. Donc G décrit le cercle.

6) On se place dans le cas particulier où n = 3 et q = 2 : les points A_0 A_1 A_2 forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité avec A_0 d'affixe 1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA_0^2 + 2\,MA_1^2 + 4\,MA_2^2 = 18$.

$MA_0^2 + 2\,MA_1^2 + 4\,MA_2^2 = 18$ s'écrit vectoriellement
$\mathbf{MA}_0^2 + 2\,\mathbf{MA}_1^2 + 4\,\mathbf{MA}_2^2 = 18$. Intercalons G :
$(\mathbf{MG} + \mathbf{GA}_0)^2 + 2\,(\mathbf{MG} + \mathbf{GA}_1)^2 + 4\,(\mathbf{MG} + \mathbf{GA}_2)^2 = 18$
$7\,\mathbf{MG}^2 + 2\,\mathbf{MG}\,(\mathbf{GA}_0 + 2\,\mathbf{GA}_1 + 4\,\mathbf{GA}_2) + \mathbf{GA}_0^2 + 2\,\mathbf{GA}_1^2 + 4\,\mathbf{GA}_2^2 = 18$
Avec $\mathbf{GA}_0 + 2\,\mathbf{GA}_1 + 4\,\mathbf{GA}_2 = 0$, il reste
$7\,MG^2 = 18 - GA_0^2 - 2\,GA_1^2 - 4\,GA_2^2$

C'est de la forme MG^2 = constante. Pour éviter les calculs, remarquons que si la constante est négative, l'ensemble des points M est vide, et si la constante est ≥ 0, on a un cercle de solutions. Or on constate que A_0 est solution. On n'a pas l'ensemble vide, on obtient donc le cercle de centre G et de rayon GA_0.

Exercice 11 : Formule $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

Remarquons qu'il s'agit d'un élargissement de la formule du 6.2.

---

[11] On pourrait plus précisément démontrer que les points G (pour q donné différent de 1) sont sur un demi-cercle de centre $(1/(q + 1), 0)$ et de rayon $q / (1 + q)$.

Soit ABC un triangle. On pose BC = a, CA = b, AB = c. On prend les points A' B' C' milieux respectifs de [BC], [CA], [AB] et le point G isobarycentre de ABC.

1) Montrer que $c^2 + b^2 = 2\,AA'^2 + (1/2)\,a^2$.

Il s'agit de la formule de 6.2, soit $AB^2 + AC^2 = 2\,AA'^2 + 1/2\,BC^2$.

2) Montrer que $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

Reprenons la formule du *1)* et appliquons-la aussi aux deux autres médianes :

$AA'^2 = (1/2)(b^2 + c^2 - a^2/2)$

$BB'^2 = (1/2)(c^2 + a^2 - b^2/2)$

$CC'^2 = (1/2)(a^2 + b^2 - c^2/2)$

Par addition membre à membre, il reste :

$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

3) En déduire que pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \mathbf{MA}^2 + \mathbf{MB}^2 + \mathbf{MC}^2$
$= (\mathbf{MG} + \mathbf{GA})^2 + (\mathbf{MG} + \mathbf{GB})^2 + (\mathbf{MG} + \mathbf{GA})^2$
$= 3\mathbf{MG}^2 + 2\,\mathbf{MG}\,(\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC}) + \mathbf{GA}^2 + \mathbf{GB}^2 + \mathbf{GC}^2$

G étant le centre de gravité de ABC, on a $\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} = \mathbf{0}$ et G est aux deux-tiers des médianes à partir des sommets : $GA = 2/3\,AA'$, etc.

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\mathbf{MG}^2 + (4/9)\,(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2)$
$= 3MG^2 + (4/9)(3/4)(a^2 + b^2 + c^2)$ grâce au 2)
$= 3MG^2 + (1/3)\,(a^2 + b^2 + c^2)$

4) On suppose ici que le triangle ABC est équilatéral. Montrer que les points M tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\,a^2$ *décrivent le cercle circonscrit à ABC.*

Grâce à la formule précédente $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\,a^2$ s'écrit
$3MG^2 + a^2 = 2\,a^2$, soit $3MG^2 = a^2$, $MG^2 = a^2/3$, $MG = a\sqrt{3}/3$.

On sait que la hauteur (ou la médiane) d'un triangle équilatéral mesure $a\sqrt{3}/2$. Comme le centre de gravité est aux 2/3, et que c'est aussi le centre du cercle circonscrit, le rayon R du cercle circonscrit est $(2/3)\,a\sqrt{3}/2 = a\sqrt{3}/3$. Ainsi $MG = R$ signifie que M décrit le cercle circonscrit.

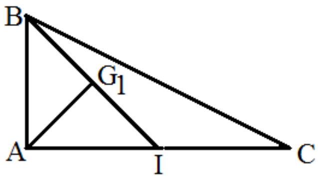
Exercice 12

On considère un triangle ABC rectangle en A et tel que les deux côtés de l'angle droit sont tels que AC = 2 AB. On pose AB = d et l'on appelle I le milieu de [AC], d'où AI = IC = d.

1) Construire le barycentre G_1 *du système de points (A, 1), (B, 2), (C, 1). Montrer que* G_1 *est le milieu de [BI].*

I est le barycentre de $(A, 1)$, $(C, 1)$. Grâce à la règle du barycentre partiel, G_1 est aussi le barycentre de $(I, 2)$, $(B, 2)$, c'est-à-dire le milieu de $[BI]$.

2) Montrer que l'angle $\widehat{G_1AC}$ = 45°. Calculer G_1A^2, G_1B^2 et montrer que $G_1C^2 = (5/2)\, d^2$.



Le triangle AIB est rectangle isocèle. Sa médiane (AG_1) est aussi la bissectrice de l'angle A, d'où G_1AC = 45°.

Puisque (AG_1) est aussi hauteur dans AIB, l'angle AG_1I vaut 90°. $AG_1 = AI \cos(45°) = d\sqrt{2} / 2$, $G_1A^2 = d^2 / 2$.

Toujours dans ABI, G_1 est le centre du cercle circonscrit, $G_1B = G_1A = d\sqrt{2}/2$, $G_1B^2 = d^2 / 2$.

Pour avoir G_1C^2, utilisons la formule d'Al Kashi dans G_1AC :
$G_1C^2 = G_1A^2 + AC^2 - 2\, G_1A\ AC \cos(45°) = d^2 / 2 + 4\, d^2 - 2\, d\, (\sqrt{2} / 2)\, 2\, d\sqrt{2} / 2 = (5 / 2)d^2$.

3) Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2\, MB^2 + MC^2 = 4\, k$, en faisant des distinctions suivant les valeurs du nombre réel k donné. Construire cet ensemble de points lorsque $k = (3/2)\, d^2$ et vérifier que dans ce cas le point I appartient à cet ensemble.

$MA^2 + 2\, MB^2 + MC^2 = 4\, k$ équivaut à
$\mathbf{MA}^2 + 2\, \mathbf{MB}^2 + \mathbf{MC}^2 = 4\, k$. Intercalons G_1 :
$(\mathbf{MG}_1 + \mathbf{G}_1\mathbf{A})^2 + 2\, (\mathbf{MG}_1 + \mathbf{G}_1\mathbf{B})^2 + (\mathbf{MG}_1 + \mathbf{G}_1\mathbf{C})^2 = 4\, k$. En développant :
$$4\, \mathbf{MG}_1^{\,2} + 2\, \mathbf{MG}_1\, \underbrace{(\mathbf{G}_1\mathbf{A} + 2\, \mathbf{G}_1\mathbf{B} + \mathbf{G}_1\mathbf{B})}_{= \mathbf{0} \text{ par définition du barycentre}} + \mathbf{G}_1\mathbf{A}^2 + 2\, \mathbf{G}_1\mathbf{B}^2 + \mathbf{G}_1\mathbf{B}^2 = 4\, k$$
$4\, MG_1^{\,2} = 4\, (k - d^2)$ après calcul utilisant les résultats du 2).
$MG_1^{\,2} = k - d^2$. On distingue deux cas :
* Si $k \geq d^2$, $MG_1 = \sqrt{k - d^2}$, M décrit le cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{k - d^2}$.
* Si $k < d^2$, il n'existe aucun point M, un carré n'étant jamais négatif.

Pour $k = (3/2)\, d^2$, on obtient un cercle, et l'on vérifie que $IA^2 + 2\, IB^2 + IC^2 = 6\, d^2 = 4\, k$, ce qui signifie que I est un des points M.

4) Construire le barycentre G_2 du système de points (A, 5), (B, 2), (C, –3). Montrer que (G_1G_2) est parallèle à (AC) et que $G_1G_2 = 2\, d$.

Commençons par prendre le barycentre g de (A, 5), (C, –3). Il est tel que
Og = (5 **OA** – 3 **OC**) / 2 avec O origine quelconque. Prenons O en A : **Ag** = (– 3/2) **AC**, ainsi g est sur (AC), de l'autre côté de C par rapport à A, avec $Ag = 3\, d$. A son tour, G_2 est le barycentre de (g, 2), (B, 2), c'est-à-dire que c'est le milieu de [Bg].

Grâce au théorème des milieux dans BIg, (G_1G_2) est parallèle à (AC), et G_1G_2 = (1/2) gI = (1/2) 4 d = 2 d.

5) Montrer que l'ensemble des points M vérifiant :
*(**MA** + 2 **MB** + **MC**)(5 **MA** + 2**MB** – 3 **MC**) = q, avec q réel donné, est soit un cercle soit l'ensemble vide, suivant les valeurs prises par q. On pourra utiliser le milieu K de [G_1G_2].*

MA + 2 **MB** + **MC =** 4 $\mathbf{MG}_1$ par définition du barycentre G_1.
5 **MA** + 2**MB** – 3 **MC** = 4 $\mathbf{MG}_2$ par définition du barycentre G_2.
L'équation en M : (**MA** + 2 **MB** + **MC**)(5 **MA** + 2**MB** – 3 **MC**) = q devient :
4 $\mathbf{MG}_1$ 4 $\mathbf{MG}_2$ = q, ou $\mathbf{MG}_1\, \mathbf{MG}_2 = q / 16$.

Appliquons la formule vue dans le triangle (*on a intérêt à la redémontrer dans le cas présent, car on ne la connaît pas par cœur, en introduisant le milieu K de [G_1G_2]*), soit

$\mathbf{MG_1}\ \mathbf{MG_2} = MK^2 - G_1G_2^{\,2} / 4 = MK^2 - d^2$.
L'équation devient : $MK^2 = q / 16 + d^2 = (q + 16\,d^2) / 16$.

Si $q \geq -16\,d^2$, M décrit le cercle de centre K et de rayon $\sqrt{q+16d^2}\,/\,4$, sinon il n'existe aucun point M.

Exercice 13

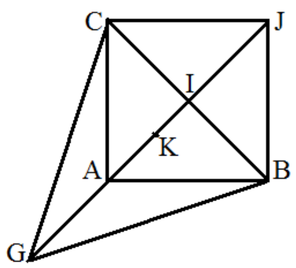
On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A, avec AB = AC = a, a étant un nombre positif donné. On appelle I le milieu de [BC].

1) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 4), (B, –1), (C, –1). Déterminer sa position. Puis déterminer l'ensemble des points M tels que $4\,MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$.

Ce genre de question ayant déjà été traité à plusieurs reprises, nous donnons seulement ici les résultats.

G est sur (AI) avec A milieu de [GI], et $AG = a\sqrt{2}\,/2$.
L'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon $a\sqrt{2}$. Notamment I est l'un des points M.

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que $2\,MA^2 - MB^2 - MC^2 = -a^2$.



La somme des coefficients présents étant nulle, on ne peut pas intercaler de barycentre comme on le fait en général. Alors intercalons le point A :

$2\,MA^2 - MB^2 - MC^2 = -a^2$ équivaut à :
$2\,\mathbf{MA}^2 - \mathbf{MB}^2 - \mathbf{MC}^2 = -a^2$
$2\,\mathbf{MA}^2 - (\mathbf{MA} + \mathbf{AB})^2 - (\mathbf{MA} + \mathbf{AC})^2 = -a^2$
$-2\,\mathbf{MA}\,(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) - \mathbf{AB}^2 - \mathbf{AC}^2 = -a^2$
$-2\,\mathbf{MA}\ \ \mathbf{AJ} = -a^2 + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2$ où J est tel que $ABJC$ est un carré.

Finalement $2\,\mathbf{AM}\ \ \mathbf{AJ} = a^2$

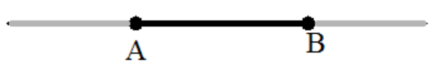
Appelons K le projeté de M sur (AI). Alors par définition du produit scalaire :
$\overline{AK}\ \overline{AJ} = a^2 / 2$. En orientant (AJ) de A vers J, cela donne $\overline{AK} = a^2 / (2AJ) = a / (2\sqrt{2}\,)$, et K est le milieu de [AI]. Comme le projeté de M reste fixé sur K, l'ensemble des points M est la droite perpendiculaire en K à (AJ).

8. Points *M* tels que *MA* / *MB* = *k*

On se donne deux points A et B et un nombre positif k.

8.1. Division harmonique

Il s'agit de trouver le ou les points éventuels M situés sur la droite (AB) tels que $MA / MB = k$. Cela équivaut à $MA = k\,MB$. Distinguons deux cas :

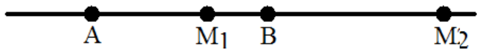


* M est entre A et B, sur [AB]. Dans ces conditions, $MA = k\,MB$ peut s'écrire vectoriellement $\mathbf{MA} = -k\,\mathbf{MB}$, ou $\mathbf{MA} + k\,\mathbf{MB} = \mathbf{0}$. Avec $1 + k \neq 0$, M est le

barycentre de (A, 1), (B, k). On vient de trouver un premier point solution de notre problème.

* M est sur la droite (AB), mais hors du segment [AB]. Qu'il soit sur l'une ou l'autre des demi-droites à l'extérieur de [AB], $MA = k\, MB$ peut s'écrire $\mathbf{MA} = k\,\mathbf{MB}$, ou $\mathbf{MA} - k\,\mathbf{MB} = \mathbf{0}$. Deux cas se présentent : si $k = -1$, il n'y a pas de barycentre, ni aucun point M, puisque l'on ne peut pas avoir $MA = MB$ (en fait le point M est relégué à l'infini). Mais si $k \neq -1$, $1 + k \neq 0$, et M est le barycentre de (A, 1), (B, $-k$). On vient de trouver un deuxième point solution de notre problème.

Finalement, il existe deux points M, notés M_1 et M_2, tels que $MA / MB = k$, sauf dans le cas exceptionnel où $k = 1$, où l'on obtient seulement le milieu de [AB] (mais on peut considérer que le deuxième point est envoyé à l'infini). On dit que les quatre points A, B, M_1, M_2 forment une division harmonique.



Division harmonique A, B, M_1, M_2 pour $k = 2$.

8.2. Points du plan tels que *MA* / *MB* = *k*

Lorsque $k = 1$, $MA = MB$ signifie que l'ensemble des points M est la médiatrice de [AB].

Supposons désormais $k \neq 1$, on connaît déjà deux points M, à savoir les points M_1 et M_2 qui forment une division harmonique avec A, B sur (AB). Reprenons l'équation $MA = k\, MB$. Tout étant positif, cela équivaut à $MA^2 = k^2\, MB^2$ ou encore $\mathbf{MA}^2 = k^2\,\mathbf{MB}^2$, soit $\mathbf{MA}^2 - k^2\,\mathbf{MB}^2 = 0$. Comme $1 - k^2$ n'est pas nul, le barycentre G de (A, 1), (B, $-k^2$) existe. Intercalons G dans l'équation : $(\mathbf{MG} + \mathbf{GA})^2 - k^2\,(\mathbf{MG} + \mathbf{GB})^2 = 0$, soit

$(1 - k^2)\,\mathbf{MG}^2 + 2\,\mathbf{MG}\,(\mathbf{GA} - k^2\,\mathbf{GB}) + \mathbf{GA}^2 - k^2\,\mathbf{GB}^2 = 0$. Avec $\mathbf{GA}^2 - k^2\,\mathbf{GB}$, il reste :
$(1 - k^2)\, MG^2 = GA^2 - k^2\, GB^2$,
$MG^2 = (GA^2 - k^2\, GB^2) / (1 - k^2)$. Comme on connaît déjà deux solutions M_1 et M_2, la constante à droite de l'égalité ne peut pas être négative. Etant ≥ 0, on en déduit que

$MG = \sqrt{\dfrac{GA^2 - k^2 GB^2}{1 - k^2}}$, soit MG = cte.

Le point *M* décrit un cercle de centre *G* et de rayon $\sqrt{\dfrac{GA^2 - k^2 GB^2}{1 - k^2}}$ **, ou encore de diamètre [M_1M_2], ces deux points étant en division harmonique avec *A* et *B*** ($M_1A / M_1B = M_2A / M_2B = k$). [12]

Précisons que la méthode que nous venons d'utiliser ne réussit que parce que nous avions auparavant trouvé deux points en division harmonique avec A et B. Il existe une autre méthode qui permet de s'en sortir sans cette connaissance préalable. Reprenons l'équation :

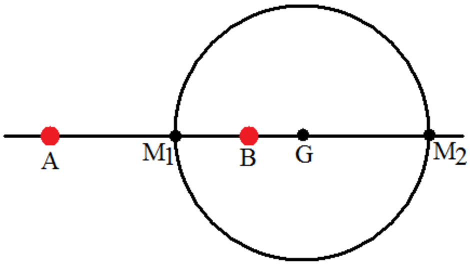
$\mathbf{MA}^2 - k^2\,\mathbf{MB}^2 = 0$, en supposant $k \neq 1$, et profitons de l'identité remarquable :
$(\mathbf{MA} + k\,\mathbf{MB})(\mathbf{MA} - k\,\mathbf{MB}) = 0$.

Avec M_1 barycentre de (A, 1), (B, k) et M_2 barycentre de (A, 1), (B, $-k$), l'équation devient, grâce à $\mathbf{MA} + k\,\mathbf{MB} = (1 + k)\,\mathbf{MM}_1$, et $\mathbf{MA} - k\,\mathbf{MB} = (1 - k)\,\mathbf{MM}_2$, par définition des barycentres :

---

[12] Remarquons que pour $k = 1$, on peut considérer la médiatrice comme un cercle de rayon infini, ce qui fait entrer ce cas particulier dans le cas général.

MM$_1$ **MM**$_2$ = 0, ce qui signifie que (MM_1) est orthogonal à (MM_2). A cause de cet angle droit, le point M décrit le cercle de diamètre [M_1 M_2]. [13]



Cercle qui est l'ensemble des points M tels que MA / MB = 2

9. Barycentres et calcul intégral

Plaçons-nous dans un repère *Oxy* orthonormé du plan. On connaît les formules donnant les coordonnées x_G et y_G du centre de gravité (ou barycentre) G de n points pondérés (A_i, α_i), les points A_i ayant pour coordonnées (x_i, y_i) :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \\[2ex] y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \end{cases}$$

On sait aussi qu'on peut regrouper les points par paquets en appliqant la règle du barycentre partiel. Mais comment faire lorsque l'on prend une surface plane homogène ou une courbe, qui possèdent une infinité de points ? Par « homogène », nous entendons que la surface a une densité d constante en chaque point, et dans le cas d'une courbe, qu'elle a aussi une densité linéaire constante. Plus la densité est grande, plus la surface ou la courbe pèsent lourd. Mais la position du centre de gravité est indépendante de cette densité, aussi prendrons-nous d = 1.

9.1. Centre de gravité d'une surface délimitée par une courbe

Plus précisément, nous prenons une surface délimitée par une courbe d'équation $y = f(x)$ et par l'axe des x, les abscisses des points étant comprises entre deux nombres a et b (*figure 1*).

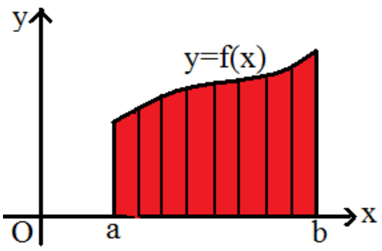


Figure 1 : Surface dont on veut connaître le centre de gravité.

Découpons la surface en n tranches verticales, comme indiqué sur le dessin, toutes de même épaisseur $dx = (a - b) / n$. Pour n suffisamment grand, chaque tranche peut être assimilée à un rectangle de hauteur $f(\mathbf{x_i})$, x_i étant l'abscisse d'un point situé dans la tranche i. Le centre de gravité

[13] Cette deuxième méthode nous permet de retrouver les points M_1 et M_2 faisant une division harmonique avec A et B.

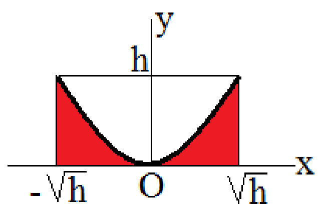
g_i de la tranche rectangulaire i a pour coordonnées (x_i, $f(x_i)/2$), et son poids est $f(x_i)\,dx$. Grâce à la règle du barycentre partiel, le centre de gravité G de la surface est aussi la barycentre des g_i pondérés par le poids $f(x_i)\,dx$ des tranches i, soit :

$$\begin{cases} x_G = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ x_i\ dx \ / \ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ dx \\ y_G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ f(x_i)\ dx \ / \ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ dx \end{cases}$$

Lorsque n augmente indéfiniment, avec dx qui tend vers 0, les sommations deviennent des intégrales, et l'on aboutit aux formules :

$$\begin{cases} x_G = \int_a^b x\ f(x)\ dx \ / \ \int_a^b f(x)\ dx \\ y_G = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2\, dx \ / \ \int_a^b f(x)\ dx \end{cases}$$

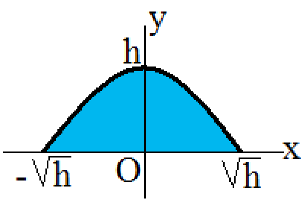
Exercice 14 : Centre de gravité d'une surface parabolique



1) Chercher le centre de gravité G de la surface délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$ et l'axe des x, entre $-\sqrt{h}$ et $\sqrt{h}$, h étant un nombre donné positif (h est d'ailleurs l'ordonnée maximale de cette surface).

Pour des raisons de symétrie, l'abscisse x_G de G est nulle. Calculons y_G :

$$y_G = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} x^4 dx \ / \ \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} x^2\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \ / \ \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \frac{h^2\sqrt{h}\,/\,5}{(2/3)\ h\sqrt{h}} = \frac{3}{10}h$$



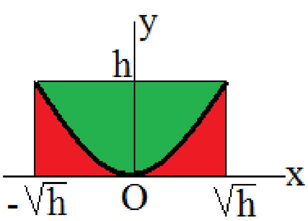
2) *Chercher le centre de gravité G de la surface délimitée par la parabole d'équation $y = -x^2 + h$ et l'axe des x, entre $-\sqrt{h}$ et $\sqrt{h}$.*

On a encore $x_G = 0$ et :

$$y_G = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (-x^2+h)^2\, dx \ / \ \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (-x^2+h)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2hx^3}{3} + h^2 x\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \ / \ \left[-\frac{x^3}{3} + hx\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \frac{(8/15)\ h^2\sqrt{h}}{(4/3)\ h\sqrt{h}} = \frac{2}{5}h$$

3) Comment vérifier que les résultats obtenus au 1° et 2° sont justes ?



Considérons le rectangle du dessin ci-contre, et découpons-le en deux surfaces. La surface rouge, vue au 1°, a pour centre de gravité G avec $y_G = (3\ /\ 10)\ h$ et elle pèse $(2\ /\ 3)\ h\ \sqrt{h}$. La surface verte, qui est la surface du 2° à l'envers, a son centre de gravité G' avec $y_{G'} = (3\ /\ 5)\ h$ et elle pèse $(4\ /\ 3)\ h\ \sqrt{h}$. Le centre de gravité g du rectangle peut être considéré comme le barycentre de (G, (2 / 3) $h\sqrt{h}$) et de (G', (4 / 3) $h\sqrt{h}$), d'où :

$$y_g = ((3 / 10)\, h\, (2 / 3)\, h\sqrt{h} + (3 / 5)\, h\, (4 / 3)\, h\sqrt{h}\,) / (2\, h\sqrt{h}\,) = h\; / 2.$$

On trouve bien le centre de gravité du rectangle.

Exercice 15 : Centre de gravité d'un secteur angulaire

On considère un secteur angulaire d'angle au centre 2a, et de rayon unité (figure 2). L'angle a est compris entre 0 et π. Déterminer le centre de gravité de sa surface. On aura intérêt à découper la surface en tranches comme indiqué sur le dessin.

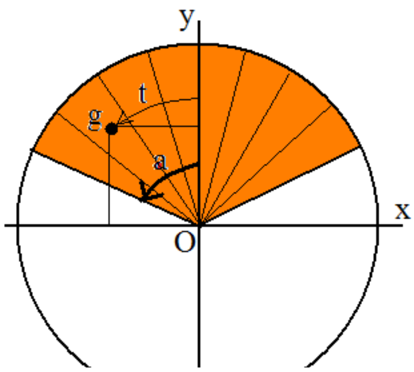


Figure 2 : Secteur angulaire d'angle 2a, découpé en tranches.

A cause de la symétrie, le centre de gravité G de cette surface, telle qu'elle est dessinée, a une abscisse nulle. Découpons le secteur angulaire en 2n tranches d'angle au centre dt = 2a / 2n. Pour n suffisamment grand, chaque tranche i, avec i prenant 2n valeurs allant de – n à n, est assimilable à un triangle isocèle, dont le centre de gravité g_i est à la distance 2/3 du centre O, et dont le poids est proportionnel à dt. Chaque point g_i a une ordonnée cos t_i, en prenant comme angle t_i = (Oy, Og_i) = $i\;dt$. On en déduit que :

$$y_G = \sum_{i=-n}^{n} \frac{2}{3} \cos(i\ dt)\ dt \ / \ \sum_{i=-n}^{n} dt$$
$$= \frac{2}{3}(\cos(-a) + \cos(-a + dt) + \cos(-a + 2dt) + \ldots + \cos a)\ dt\ /\ (2n\ dt)$$

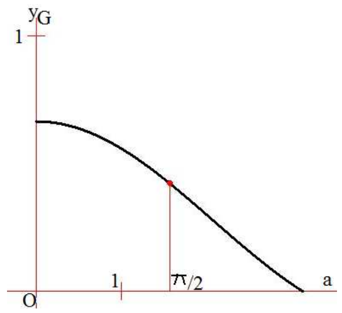
On a 2n dt = 2a, et la somme des cosinus multipliée par dt est assimilable à une intégrale, soit

$$\int_{-a}^{a} \cos t\ dt = [\sin t]_{-a}^{a} = 2\sin a$$

Finalement

$$y_G = \frac{4}{3}\sin a\ /\ (2a) = \frac{2}{3}\frac{\sin a}{a}$$

Lorsque a est proche de 0, on obtient y_G = 2/3. Lorsque a = π/2, on obtient un demi-cercle et y_G = 4 /(3 π). Pour a = π, on a le disque entier, et comme prévu y_G = 0. La courbe donnant y_G en fonction de l'angle a est donnée ci-dessous.



9.2. Centre de gravité d'une courbe plane

Considérons une courbe d'équation $y = f(x)$ avec x entre a et b de façon qu'elle ait une longueur finie. Puis découpons-la en n morceaux de même longueur ds. Avec une densité prise égale à 1, chaque morceau pèse ds, et le poids total est la longueur s de la courbe. Comment avoir s ?

Sur un morceau de longueur ds, x varie de dx et y de dy. En appliquant le théorème de Pythagore, on a $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Lorsque n est de plus en plus grand, ds est de plus en plus petit, et on peut écrire, à partir de $y = f(x)$, que $f'(x) = dy / dx$ et $dy = f'(x)\, dx$, d'où $ds^2 = dx^2 + f'(x)^2\, dx^2 = (1 + f'(x)^2)\, dx^2$, ou encore

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

La sommation des n morceaux ds, lorsque n tend vers l'infini, revient à faire

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

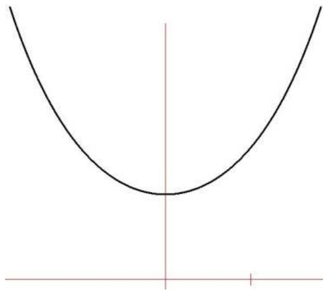
On notera qu'avec la présence de la racine carrée, le calcul de cette intégrale peut s'avérer complexe.

Sur chacun des n morceaux ds numérotés de 1 à n, prenons un point $M_i\,(x_i, y_i)$ avec i entre 1 et n. La sommation de ces points pondérés par leur poids, soit $\mathbf{OM}_i\, ds$, va aussi s'écrire sous forme d'intégrale, et l'on aboutit à la formule du centre de gravité de la courbe :

$$\begin{cases} x_G = \int_a^b x\, \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \Big/ \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \\ y_G = \int_a^b f(x)\, \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \Big/ \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \end{cases}$$

Exercice 16 : Centre de gravité d'une chaînette

1) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$*. Cette fonction est appelée cosinus hyperbolique, et elle s'écrit aussi* $ch\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$*. Montrer qu'il s'agit d'une fonction paire, et déterminer son sens de variations. Tracer sa courbe représentative entre x = - a et x = a, a étant un nombre donné, par exemple a = 1. Cette courbe est appelée chaînette, car elle a exactement la forme d'une corde (ou d'une chaîne) qu'on laisse pendre à partir de deux points de même hauteur.*



Définie sur **R**, la fonction vérifie $f(-x) = f(x)$. Elle est paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, et l'on peut réduire l'intervalle d'étude à **R**+. Sa dérivée est $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Sur **R**+, $e^x \geq 1$ et $e^{-x} \leq 1$, d'où $f'(x) \geq 0$, la fonction est croissante sur **R**+. Sur **R** la fonction admet un minimum égal à 1 en $x = 0$. On en déduit la courbe représentative, dessinée ci-contre pour $a = 2$, et qui a bien l'allure d'une corde qu'on laisse pendouiller..

2) On pose $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. *Cette fonction est appelée sinus hyperbolique, et elle s'écrit aussi :* $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. *Montrer que (ch(x))' = sh(x), et que (sh(x))' = ch(x). Vérifier aussi que* $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

On a déjà vu que $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$. D'autre part, avec $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, on a $(\mathrm{sh}(x))' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$. Enfin, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (1/4)\,(\,(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2) = (1/4)\,(2 + 2) = 1$.

3) Calculer la longueur s de la chaînette entre les points d'abscisse – a et + a. Cette longueur est aussi le poids de la chaînette en lui donnant une densité 1.

$$s = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + sh^2(x)}\ dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{ch^2(x)}\ dx = \int_{-a}^{a} ch(x)\ dx = \left[sh(x)\right]_{-a}^{a} = 2\ sh(a)$$

On a utilisé le fait que la fonction $sh(x)$ est impaire, et aussi que la fonction $ch(x)$ est toujours positive.

4) Déterminer le centre de gravité de la chaînette prise entre – a et a.

A cause de la symétrie, le centre de gravité G est sur Oy, avec $x_G = 0$. Pour avoir y_G, commençons par calculer le numérateur correspondant à sa formule, soit :

$$\int_{-a}^{a} ch(x)\ \sqrt{1 + sh^2(x)}\ dx = \int_{-a}^{a} ch^2(x)\ dx = \frac{1}{4}\int_{-a}^{a} (e^x + e^{-x})^2\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-a}^{a} (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\ dx = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{4}\left[sh(2x) + 2x\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2} sh(2a) + a$$

Finalement $y_G = \dfrac{sh(2a) + 2a}{4\ sh(a)}$

Un résultat est donné sur la *figure 3*.

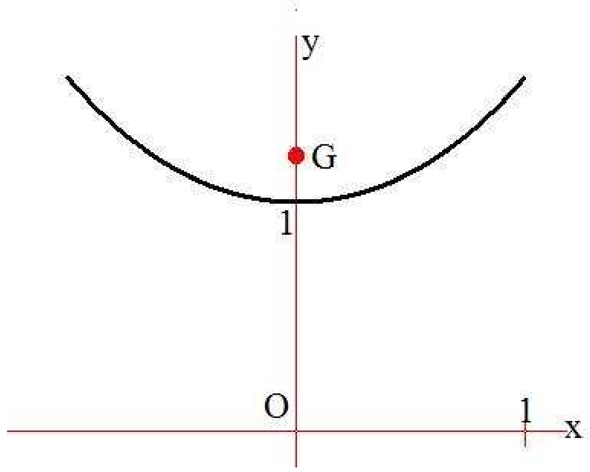
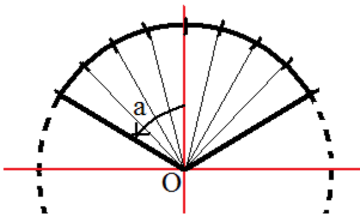


Figure 3 : La chaînette pesante pour a = 1, et son centre de gravité G..

Exercice 17 : Centre de gravité d'un arc de cercle



Considérer un arc de cercle pesant, d'angle au centre 2a (en radians) et de rayon unité, disposé dans le repère Oxy comme sur la figure ci-contre. Déterminer son centre de gravité.

La longueur s de l'arc de cercle est 2a, l'arc étant égal à l'angle lorsque le rayon vaut 1.

Maintenant, découpons l'arc en 2n petits morceaux de longueur ds, avec n qui va tendre vers l'infini. Chaque morceau, assimilable à un petit segment et numéroté i avec i entre –n et n, a son centre de gravité g_i en son milieu. En posant $s_i = (Oy, Og_i)$, cet angle variant entre – a et a, on a aussi $s_i = i\, ds$, avec i de – n à n. Le point g_i a pour coordonnées (- sin s_i, cos s_i). Comme l'abscisse de G est nulle pour des raisons de symétrie, il suffit de calculer y_G :

$$y_G = \frac{\sum_{i=-n}^{n} \cos(s_i)\, ds}{2a} = \frac{\sum_{i=-n}^{n} \cos(i\, ds)\, ds}{2a} \approx \frac{\int_{-a}^{a} \cos s\, ds}{2a} = \frac{[\sin s]_{-a}^{a}}{2a} = \frac{\sin a}{a}$$

Notamment pour un demi-cercle, cette ordonnée vaut 2 / π.