

## IX. Courbes issues de points hyperbolique : le signe du chaos

Nous allons considérer une application  $f$  faisant passer d'un point  $M$  à un point  $M' = f(M)$  dans le plan. A partir d'un point  $M_0$  quelconque, l'action répétée de l'application  $f$  donne une succession de points :  $M_0, M_1 = f(M_0), M_2 = f(M_1) = f^2(M_0), \dots, M_n = f^n(M_0)$ , etc., ce que l'on appelle la trajectoire du point  $M_0$ . Notre objectif est d'étudier ces trajectoires. Le cas le plus simple est celui où l'application  $f$  est linéaire, et nous allons commencer par là.

### 1) Application linéaire en deux dimensions

Une application linéaire  $f$  fait passer d'un point  $M(x, y)$  à un point  $M'(x', y') = f(M)$  par :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \text{ où } a, b, c, d \text{ sont quatre nombres réels donnés,}$$

ce qui s'écrit aussi sous forme matricielle  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ou  $X' = AX$ ,  $A$  désignant la matrice,  $X$

et  $X'$  étant les vecteurs colonnes correspondant aux vecteurs  $\mathbf{OM}$  et  $\mathbf{OM}'$ . La matrice  $A$  caractérise l'application linéaire dans le repère  $(O, x, y)$  que l'on s'est donné. Si l'on change de repère, en gardant la même origine mais en modifiant les axes, la matrice va changer, pour la même application linéaire.

#### 1.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Parmi tous les vecteurs  $\mathbf{OM}(x, y)$  que l'on peut prendre, les plus intéressants sont ceux, supposés non nuls, qui sont transformés en un vecteur qui leur est parallèle, voire nul.<sup>1</sup> On les appelle les vecteurs propres. Ils sont tels que  $\mathbf{OM}' = \lambda \mathbf{OM}$ , le nombre  $\lambda$  étant appelé valeur propre associée au vecteur propre. Les vecteurs propres  $X$  doivent obéir à  $AX = \lambda X$ , soit  $(A - \lambda I)X = 0$ . Ce système d'équations<sup>2</sup> a une solution unique  $X = 0$  lorsque le déterminant  $|A - \lambda I|$  est non nul, mais ce cas ne nous concerne pas, un vecteur propre n'ayant de signification que s'il n'est pas nul. Il reste l'autre cas, celui où  $|A - \lambda I| = 0$ , ce qui donne une infinité de solutions pour  $X$ . On appelle  $|A - \lambda I| = 0$  l'équation caractéristique, c'est elle qui va nous donner les valeurs propres, et à partir de là les vecteurs propres.

#### *Exercice 1 :*

*Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres associés à la matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 \\ -5 & 11/2 \end{pmatrix}$*

En développant le déterminant, l'équation caractéristique s'écrit  $(-2 - \lambda)(11/2 - \lambda) + 25/2 = 0$ , soit  $\lambda^2 - 7/2 \lambda + 3/2 = 0$ , qui a pour solutions  $\lambda = 1/2$  ou  $3$ .

Pour  $\lambda = 1/2$ , l'équation  $AX = \lambda X$ , formant un système de deux équations avec  $x$  et  $y$ , se réduit à une seule, soit  $-x + y = 0$ . On obtient une infinité de vecteurs propres, tous dans la direction donnée par le vecteur  $\mathbf{V}(1, 1)$ . Pour  $\lambda = 3$ , le système se réduit à une seule équation  $-2x + y = 0$ , d'où une infinité de vecteurs propres dans la direction donnée par le vecteur  $\mathbf{V}'(1, 2)$ .

<sup>1</sup> En fait nous verrons que c'est parfois plus subtil qu'un simple parallélisme.

<sup>2</sup> L'équation matricielle s'écrit sous forme d'un système de deux équations à deux inconnues  $x$  et  $y$ .

**Exercice 2 :**

Faire de même avec la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

L'équation caractéristique s'écrit  $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ . Elle n'a pas de solution réelle, mais deux solutions complexes conjuguées  $1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ . Les vecteurs propres correspondants sont à leur tour complexes, soit  $(1, i)$  et  $(1, -i)$ . L'équation de colinéarité des vecteurs propres  $AX = \lambda X$  demeure valable en complexes, mais elle ne correspond pas dans ce cas à la transformation d'un vecteur en un vecteur parallèle. Dans le cas présent, les vecteurs propres tournent de  $60^\circ$ . Ce résultat d'apparence compliquée traduit en fait un phénomène simple : la matrice  $A$  correspond à une rotation de  $\pi/3$  autour de  $O$ , et il est normal qu'aucun vecteur ne puisse être transformé en un vecteur parallèle. C'est dans ce cas notamment qu'apparaissent des valeurs propres et des vecteurs propres non réels.

Lorsque l'on effectue un changement de base, c'est-à-dire un changement de repère autour de l'origine  $O$ , la matrice  $A$  d'une application linéaire  $f$  est transformée en une matrice  $A'$  telle que  $A' = P^{-1}AP$ , où  $P$  est la matrice ayant pour vecteurs colonnes les nouveaux vecteurs de base par rapport aux anciens. Comme  $A'$  représente la même application linéaire que  $A$ , chacune dans son propre repère, on dit que  $A'$  est semblable à  $A$ . L'objectif est alors de trouver un repère permettant de simplifier au mieux la matrice de l'application. C'est là que l'on est amené à choisir les vecteurs propres, du moins quand ceux-ci sont réels et que l'on en trouve deux de direction différente, de façon à pouvoir les prendre comme nouveau repère. On en arrive à la classification suivante.

**1.2. Les trois types de matrices  $2 \times 2$** 

Éliminons les cas évidents des matrices de la forme  $aI = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  où tous les vecteurs  $\mathbf{V}$  du plan sont propres, avec  $\mathbf{V}' = a\mathbf{V}$ . Les matrices  $2 \times 2$  sont alors toutes semblables à l'un des trois types suivants :

- $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ . La matrice a été diagonalisée, ses deux valeurs propres  $a$  et  $b$  sont réelles et

distinctes, et deux vecteurs propres de direction différente constituent la nouvelle base.

- $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . On peut seulement rendre la matrice triangulaire lorsque les deux valeurs

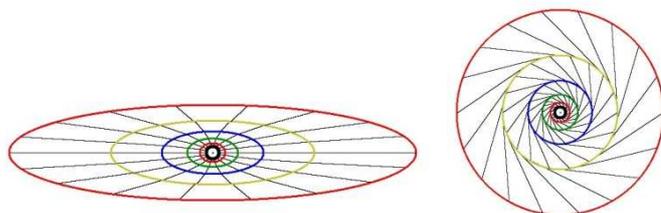
propres sont confondues, pour donner  $a$ , et l'on n'a qu'une direction de vecteurs propres, choisie pour donner l'un des deux axes du nouveau repère.

- $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  lorsque les deux valeurs propres sont complexes non réelles conjuguées ( $b$  est non nul), de la forme  $a \pm bi$ . L'application est une similitude directe : les vecteurs ont leur longueur multipliée par  $|a \pm bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$  (non nul) et ils tournent de l'angle  $\varphi = \text{Arg}(a+bi)$ . La matrice  $A$  peut s'écrire  $\sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ . Dans le cas où le déterminant  $|A| = 1$ , on retrouve une rotation autour de  $O$ .

**1.3. Les divers types de points fixes**

La classification précédente indique aussitôt qu'une application linéaire admet un seul point fixe, à savoir le point origine  $O$ , sauf dans le cas de l'identité  $I$ , où tous les points sont fixes. Considérons les points  $M$  situés au voisinage de l'origine, et soumettons chaque point  $M$  à l'action répétée de l'application  $f$ , ce que l'on appelle la trajectoire de  $M$ . On distingue les situations suivantes :

- Si les deux valeurs propres sont supérieures à 1 en valeur absolue, ou en module (dans le cas complexe), l'origine est une source, les trajectoires s'éloignent de l'origine, qui est un point repousseur (*figure 1*).



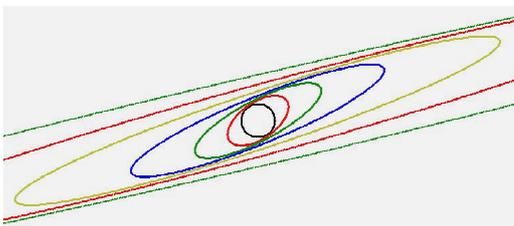
*Figure 1* : Source, à gauche, avec des images successives du petit cercle noir, et quelques lignes joignant les images successives de points, dans le cas de deux valeurs propres réelles distinctes et supérieures à 1. A droite, une source en spirale, dans le cas des valeurs propres non réelles conjuguées de module supérieur à 1. Sur cette figure, comme sur les suivantes, nous avons pris deux vecteurs propres formant la base d'un repère orthonormé. Le fait de prendre un repère quelconque ne modifie pas l'allure globale des résultats.

Dans le cas particulier où les deux valeurs propres sont confondues et supérieures à 1, on a aussi une source dans le cas des matrices  $aI$ . Il en est de même pour les matrices de la forme  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

avec  $|a| > 1$ , car on démontre que dans ce cas <sup>3</sup> :

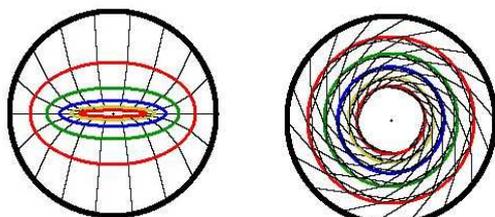
$$\begin{cases} x_n = a^n x_0 + a^{n-1} n y_0 \\ y_n = a^n y_0 \end{cases}$$

où le point  $(x_n, y_n)$  est le  $n^{\text{ème}}$  itéré du point  $(x_0, y_0)$ . Quel que soit le point de départ,  $x_n$  et  $y_n$  tendent tous deux vers l'infini, même si le phénomène met du temps à se produire, comme le montre la *figure 2*, avec les transformés elliptiques d'un cercle, les petits axes des ellipses tardant à augmenter.



*Figure 2* : Source spéciale, avec la formation d'ellipses successives dont le petit axe tarde à augmenter

- Si les deux valeurs propres sont inférieures à 1 en valeur absolue ou en module, l'origine est un puits, les trajectoires convergeant vers l'origine qui est un attracteur.



*Figure 3* : Puits, avec les images successives du cercle noir. A gauche cas de deux valeurs propres réelles distinctes et inférieures à 1, à droite, cas de deux valeurs propres complexes conjuguées de module inférieur à 1, avec phénomène de convergence en spirale

<sup>3</sup> Il suffit de faire un raisonnement par récurrence pour démontrer cette formule.

- Si une valeur propre est supérieure à 1 en valeur absolue et l'autre supérieure à 1 en valeur absolue, l'origine est une selle, ou point hyperbolique, les points situés sur une direction propre étant attirés vers l'origine, et ceux situés sur l'autre étant repoussés.

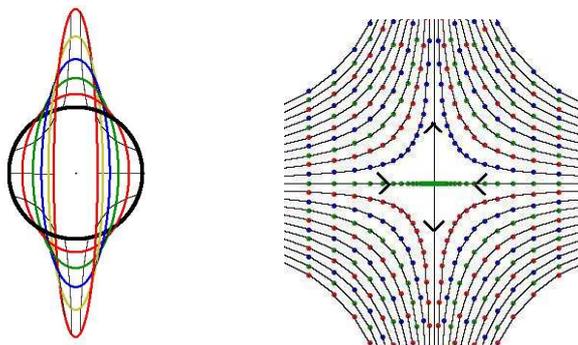


Figure 4 : Selle, ou point hyperbolique, dans le cas de deux valeurs propres réelles, l'une supérieure à 1 et l'autre inférieure à 1, en valeur absolue. A gauche, images successives du cercle noir, à droite, trajectoires de points autour de l'origine

- Si l'on est dans le cas des valeurs propres non réelles, et que leur module vaut 1, l'origine est un point elliptique, ou centre, ou tourbillon, car il s'agit d'une rotation autour de  $O$ , du moins lorsque l'on se place dans un repère orthonormé.

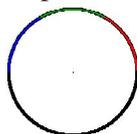


Figure 5 : L'origine est un centre, tout cercle autour de lui reste globalement invariant. Ici le repère est orthonormé, s'il ne l'est pas, le cercle fait place à une ellipse

### Exercice 3

Que se passe-t-il dans les cas restants :

- 1) Les deux valeurs propres sont réelles, l'une égale à 1 (ou  $-1$ ) et l'autre non.

On assiste à la formation d'ellipses dont un axe reste toujours le même, l'autre axe se dilatant ou se contractant selon les cas. On n'a plus une source ni un puits.

- 2) Les deux valeurs propres sont réelles et égales à 1 (ou  $-1$ ), sans que l'on ait l'identité.

La matrice est alors semblable à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  lorsque la valeur propre est 1. Au bout de  $n$  itérations,

un point  $(x_0, y_0)$  devient  $(x_n, y_n)$  avec  $x_n = x_0 + n y_0$ ,  $y_n = y_0$ . Les trajectoires des points forment des lignes horizontales, donnant lieu à une sorte de cisaillement, et les points s'éloignent de l'origine, sauf ceux situés sur l'axe des  $x$ , qui restent fixes (figure 6). Remarquons que le déterminant  $|A| = 1$ , ce qui signifie que la transformation conserve les aires. Notamment le cercle initial pris autour de l'origine est transformé en une ellipse ayant la même aire.

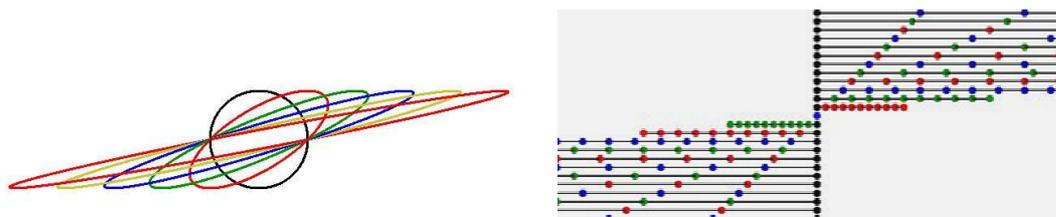


Figure 6 : A gauche, les points situés sur un cercle de centre  $O$  donnent des ellipses successives qui vont finir par se plaquer sur l'axe des  $x$  de longueur infinie. A droite, trajectoires rectilignes de points situés sur l'axe des  $y$ , avec un phénomène de cisaillement.

## Conclusion

Finalement, le comportement de l'application linéaire est globalement dicté par la nature du point fixe  $O$ . Les trajectoires des points suivent le mouvement que leur imprime le point fixe. Aucun phénomène chaotique n'apparaît. Mais le cas d'un point fixe hyperbolique est le plus intéressant, puisqu'il crée à la fois un étirement dans une direction et une contraction dans une autre. Nous allons maintenant passer aux applications non linéaires, où des phénomènes chaotiques vont pouvoir apparaître.

## 2) Application non linéaire

Ici encore, les points fixes éventuels vont jouer un rôle essentiel. A la différence d'une application linéaire n'ayant comme point fixe que l'origine, une application non linéaire peut présenter plusieurs points fixes. Ce sont eux que l'on commence par chercher. Mais comment déterminer leur nature ?

Pour cela, on va effectuer une approximation linéaire de l'application  $f$ , en ne considérant que les termes du premier degré, les autres pouvant être considérés comme négligeables. On connaît le développement limité d'une fonction  $f(x)$  à une variable que l'on obtient en prenant les dérivées successives. On trouve une approximation linéaire en ne gardant que la dérivée première :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Il en est de même avec des fonctions de deux variables, en prenant les dérivées partielles. Avec  $x' = f_1(x, y)$  et  $y' = f_2(x, y)$  on introduit ce que l'on appelle la matrice jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En se plaçant au voisinage d'un point  $\mathbf{x}_0$  (il s'agit d'un vecteur colonne), on peut écrire  $f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + J \Delta \mathbf{x}$ , en prenant les dérivées partielles de  $J$  au point  $\mathbf{x}_0$ , ou  $f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = J \Delta \mathbf{x}$ . Ainsi une petite variation vectorielle  $\Delta \mathbf{x}$  à partir d'un point provoque une petite variation  $J \Delta \mathbf{x}$  sous l'effet de  $f$ , à partir du point image  $f(\mathbf{x}_0)$ .

D'ores et déjà, si l'on trouve que le déterminant  $|J|$  de la matrice vaut  $\pm 1$ , où que l'on se place, on pourra dire qu'il y a conservation des aires (on dit que l'on a un système conservatif), et dans le cas où  $|J| = 1$ , il y a aussi conservation des angles orientés.

Prenons maintenant  $\mathbf{x}_0$  comme point fixe. Grâce à l'étude de la matrice  $J$ , calculée en ce point, on retrouve alors un des types de point fixe obtenu lorsque l'application est linéaire. Ces points fixes éventuels peuvent être des puits, des sources, des tourbillons (points elliptiques), des selles (points hyperboliques). Mais c'est la présence d'un point hyperbolique qui constitue le cas le plus troublant, car il est le signe de certaines turbulences pour les trajectoires. Autrement dit, il est le signe du chaos, comme nous allons le voir.

### Exemple 2

Pratiquons la transformation faisant passer de  $(x, y)$  à  $(x', y')$  telle que :

$$\begin{cases} x' = 1 + y - x^2 \\ y' = 0,3x \end{cases}$$

On obtient  $J = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix}$ . Avec  $|J| = -0,3$ , la transformation diminue les aires. Et une petite variation  $\Delta \mathbf{x}$  à partir d'un point  $\mathbf{x}_0$  provoque une variation  $J \Delta \mathbf{x}$  au voisinage du point  $f(\mathbf{x}_0)$ .

Vérifions-le par un calcul élémentaire. Commençons par faire un changement de repère par translation en prenant comme nouvelle origine le point  $\mathbf{x}_0 (x_0, y_0)$ , avec la formule de passage :

$x = x_0 + X, y = y_0 + Y$ . L'application s'écrit dans le nouveau repère :

$$\begin{cases} X' = -X^2 - 2x_0X + Y + 1 - x_0^2 + y_0 - x_0 \\ Y' = 0,3X + 0,3x_0 - y_0 \end{cases}$$

L'approximation linéaire s'obtient en négligeant le terme en  $X^2$ , soit :

$$\begin{cases} X' = -2x_0X + Y + (1 - x_0^2 + y_0 - x_0) \\ Y' = 0,3X + (0,3x_0 - y_0) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X' - (x'_0 - x_0) = -2x_0X + Y \\ Y' - (y'_0 - y_0) = 0,3X \end{cases}$$

On retrouve bien la matrice  $J$ , et si l'on prend  $(x_0, y_0)$  comme point fixe, cela se réduit à :

$$\begin{cases} X' = -2x_0X + Y \\ Y' = 0,3X \end{cases} \quad \text{soit } \mathbf{X}' = J \mathbf{X}.$$

### 3) Courbe stable et courbe instable d'un point hyperbolique

Etant donné un point hyperbolique  $P$ , considérons l'ensemble  $W_s$  des points dont la trajectoire converge vers lui, c'est-à-dire les points  $M$  tels que  $f^n(M)$  tend vers  $P$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Prenons aussi l'ensemble  $W_i$  des points  $M$  dont la trajectoire inverse, sous l'effet de  $f^{-1}$ , converge aussi vers le point fixe, c'est-à-dire les points  $M$  tels que  $f^{-n}(M)$  tend vers  $P$ . Evidemment l'application  $f$  est supposée dérivable et inversible.

Dans ces conditions, un théorème remarquable permet d'affirmer que ces deux ensembles de points  $W_s$  et  $W_i$  sont des courbes lisses, que nous appellerons la courbe stable et la courbe instable. Grâce à ce qui se passe au voisinage du point  $P$ , ces courbes sont tangentes aux deux vecteurs propres en  $P$ . D'après leur définition, ces courbes restent aussi globalement invariantes sous l'effet de  $f$  comme de  $f^{-1}$ . Dans les deux exercices simples qui suivent, nous allons vérifier qu'il s'agit bien de courbes, et nous allons les déterminer précisément.

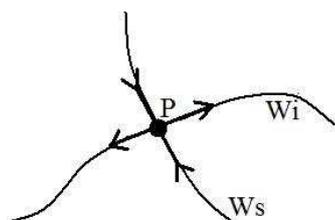


Figure 7 : Courbes stable et instable d'un point hyperbolique

#### Exercice 4 : Cas d'une application linéaire ayant une selle

Prendre l'application définie par :

$$\begin{cases} x' = 1,5x + 0,5y \\ y' = x + y \end{cases}$$

et déterminer ses courbes stable et instable.

Dans ce cas, on sait que les courbes stable et instable sont les deux droites portées par les vecteurs propres, la première avec la valeur propre inférieure à 1 en valeur absolue, et la deuxième avec celle supérieure à 1. On constate dans le cas présent que les valeurs propres sont 2 et 0,5, les vecteurs propres correspondants étant (1, 1) et (-0,5, 1). L'origine  $O$  est une selle, comme l'indique le tracé partiel de trajectoires sur la figure 7.

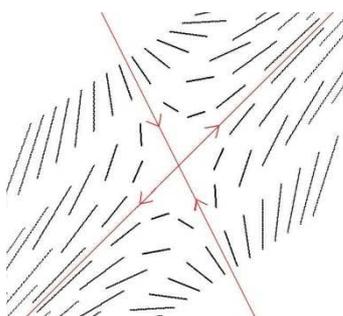


Figure 7: Point fixe hyperbolique d'une application linéaire, les trajectoires alentour étant indiquées par les images successives de petits segments.

#### Exercice 5 : Cas d'une application non linéaire

L'application est définie par :

$$\begin{cases} x' = x/2 \\ y' = -7x^2 + 2y \end{cases}$$

Elle est bien non linéaire à cause du terme en  $x^2$ , et nous allons prouver qu'il y a bien de véritables courbes stable et instable issues du point hyperbolique, en l'occurrence une droite et une parabole.

1) Montrer que le seul point fixe est l'origine  $O$ , et qu'il s'agit d'une selle.

En faisant  $x' = x$  et  $y' = y$ , on trouve aussitôt  $x = 0$  et  $y = 0$ . L'approximation linéaire de l'application au voisinage de  $O$  s'obtient en négligeant le terme  $-7x^2$ , d'où la matrice correspondante :

$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  où apparaissent les valeurs propres  $1/2$  et  $2$ , de part et d'autre de  $1$ . Le point fixe  $O$  est bien une selle.

2) Montrer que l'application est inversible et déterminer son inverse.

Par inversion des formules donnant  $f$ , on trouve :

$$\begin{cases} x = 2x' \\ y = 14x'^2 + y'/2 \end{cases} \text{ faisant passer de } (x', y') \text{ à } (x, y).$$

3) Montrer que l'axe des  $y$  est une partie de l'ensemble  $W_i$  instable, et que celui-ci se réduit finalement à l'axe des  $y$ .

Rappelons que  $f^{-1}$  fait passer d'un point  $(x, y)$  à  $(x', y')$  par  $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 14x^2 + y/2 \end{cases}$ .

Sous l'effet de  $f^{-1}$ , un point  $M(0, y)$  de l'axe des  $y$  est transformé en point  $(0, y')$  avec  $y' = y/2$ . Par itérations successives, les ordonnées sont divisées par 2 à chaque fois, on en déduit que  $f^{-n}(0, y)$  tend vers 0 pour  $n$  infini. Tous les points de l'axe des  $y$  appartiennent à l'ensemble  $W_i$ . Mais existe-t-il d'autres points appartenant aussi à  $W_i$ ? Tout point qui n'est pas sur  $(Oy)$  a une abscisse  $x$  non nulle. Sous l'effet de  $f^{-1}$ , on a  $x' = 2x$ , et par itérations successives, les abscisses doublent à chaque fois, et augmentent indéfiniment. Aucun point d'abscisse non nulle ne peut avoir sa trajectoire qui converge vers  $O$ . L'ensemble  $W_i$  se réduit à l'axe des  $y$ . On a bien trouvé une courbe lisse.

4) Considérer une parabole d'équation  $y = ax^2$  dont le sommet est l'origine et l'axe celui des  $y$ . Trouver  $a$  de façon que cette parabole reste globalement invariante sous l'effet de l'application  $f$ . En déduire que cette parabole est une partie de l'ensemble  $W_s$ .

Prenons un point  $(x, y)$  sur la parabole d'équation  $y = ax^2$ . Imposons que son image  $(x', y')$  par  $f$  reste sur cette parabole, soit  $y' = ax'^2$ ,

$$2y - 7x^2 = ax'^2/4, \quad y = (7/2 + a/8)x^2, \quad \text{d'où } a = 7/2 + a/8, \quad a = 4.$$

La parabole d'équation  $y = 4x^2$  reste globalement invariante sous l'effet de  $f$ . Prenons un point  $M$  sur cette parabole. Sous l'effet répété de  $f$ , l'abscisse des images successives de  $M$  est chaque fois divisée par 2, puisque  $x' = x/2$ . La trajectoire du point  $M$  sur la parabole converge vers le point  $O$ . La parabole constitue une partie de l'ensemble  $W_s$ .

5) Vérifier que l'intérieur de cette parabole est globalement invariant, et l'extérieur aussi. Montrer que tout point strictement intérieur possède une trajectoire qui ne converge pas vers  $O$ , et de même pour tout point extérieur. En déduire que la parabole forme tout l'ensemble  $W_s$ .

Un point  $(x, y)$  intérieur à la parabole est tel que  $y < 4x^2$ . Son image  $(x', y')$  doit vérifier :

$$14x'^2 + y'/2 < 16x'^2, \quad \text{soit } y' < 4x'^2.$$

L'intérieur de la parabole reste globalement invariant, et l'extérieur aussi, pour les mêmes raisons. Cela vaut aussi bien en faisant jouer  $f$  ou  $f^{-1}$ . Prenons maintenant un point  $M$  d'abscisse et d'ordonnée strictement positives, situé à l'intérieur de la parabole. Son abscisse est divisée par 2 sous l'effet de  $f$ . Sous l'action répétée de  $f$ , l'abscisse des points images tend vers 0, mais alors on a  $y' \approx 2y$ , le terme  $-7x^2$  devenant négligeable, et l'ordonnée a tendance à doubler, ce qui empêche la trajectoire de  $M$  de converger vers  $O$ . Pour des raisons de symétrie évidente, il en est de même si l'on prend un point d'abscisse négative, toujours à l'intérieur avec  $y > 0$ . De même, un point d'abscisse strictement positive et extérieur à la parabole a son abscisse qui double à chaque pas sous l'effet de  $f^{-1}$ . Il ne peut pas converger vers  $O$ . L'ensemble  $W_s$  est constitué par tous les points de la parabole.

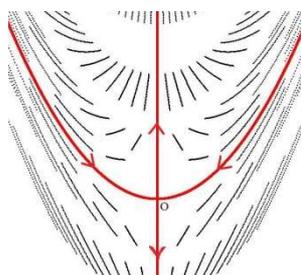


Figure 8 : Morceaux de trajectoires autour du point fixe hyperbolique, avec ses courbes stable et instable (parabole et droite) en rouge.

Si les deux exemples que nous venons de traiter montrent que les ensembles  $W_s$  et  $W_i$  sont des courbes lisses dont on sait déterminer les équations par le calcul, il n'en est pas de même en général. Les courbes stable et instable ne peuvent être tracées qu'en utilisant un ordinateur.

## Comment construire les courbes stable et instable sur ordinateur

On commence par chercher un point hyperbolique  $P$ , ainsi que ses vecteurs propres, par le calcul ou à défaut par essais. Puis on prend une succession de nombreux points sur le vecteur propre dilatant, dans un voisinage très petit de  $P$ , et l'on détermine les trajectoires de chacun de ces points. Comme ces points sont extrêmement proches sur le petit segment que l'on a pris, leurs successeurs le sont aussi, après la première itération, et aussi pour les itérations suivantes. Cela permet de voir apparaître non pas des points isolés mais une véritable courbe, qui est la courbe  $W_i$ . On fait de même avec le vecteur propre contractant de l'application  $f$ , mais en faisant jouer l'application inverse  $f^{-1}$ , ce qui permet d'obtenir la courbe  $W_s$ .

## 4) Cas particulier d'une application conservant les aires et l'orientation

Comment trouver une selle et ses vecteurs propres par le calcul, dans le cas où l'application  $f$  conserve les aires et l'orientation ? En supposant que ce point fixe est à l'origine  $O$ , l'application s'écrit :

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \text{ avec } f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0. \text{ Au voisinage de ce point fixe, on prend la forme}$$

linéarisée  $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$ , où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont les vecteurs colonnes  $(x, y)$  et  $(x', y')$  et  $A$  la matrice de l'application linéaire associée. La conservation des aires et de l'orientation implique que le déterminant de  $A$ ,  $|A|$ , soit égal à 1. Les vecteurs propres sont  $\mathbf{x}$  tels que  $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$  avec  $\lambda$  qui est la valeur propre correspondante, vérifiant  $|A - \lambda I| = 0$ . Avec  $|A| = 1$ , cela donne l'équation caractéristique que doivent vérifier les valeurs propres :  $\lambda^2 - T\lambda + 1 = 0$ ,  $T$  étant la trace de la matrice, c'est-à-dire la somme des deux éléments de sa première diagonale. On en déduit les deux valeurs propres :

$\lambda = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4})$  et le produit des deux valeurs propres vaut 1. On distingue deux cas, en dehors du cas exceptionnel où  $T = 2$  avec les deux valeurs propres confondues :

- soit les deux valeurs propres sont réelles, leurs valeurs absolues étant de part et d'autre de 1, d'où un point hyperbolique (ou selle)
- soit elles sont complexes et conjuguées, de module 1, et l'on a un point elliptique (ou centre ou tourbillon).

Ainsi, selon que  $|T| > 2$  ou  $|T| < 2$ , on a soit une selle soit un centre. Il n'y a pas d'autres possibilités.

### Exercice 6 : Bijection de Hénon

Il s'agit de l'application faisant passer d'un point  $(x, y)$  à un point  $(x', y')$  telle que :

$$\begin{cases} x' = x \cos a - (y - x^2) \sin a \\ y' = x \sin a + (y - x^2) \cos a \end{cases} \text{ avec } a \text{ angle compris entre } 0 \text{ et } \pi (0 < a < \pi)$$

1) Montrer que cette application conserve les aires et l'orientation.

Prenons le déterminant jacobien :  $\begin{vmatrix} \cos a + 2x \sin a & -\sin a \\ \sin a - 2x \cos a & \cos a \end{vmatrix} = 1$ . Etant égal à 1 quel que soit le point  $(x, y)$  qu'on prenne, l'application ainsi linéarisée conserve les aires et l'orientation. Il s'ensuit notamment que sous l'effet répété de cette application à partir d'un point, la trajectoire obtenue ne peut pas converger vers un attracteur.

2) Montrer que cette application possède deux points fixes, l'un étant un point elliptique, l'autre un point hyperbolique.

Il s'agit de chercher  $(x, y)$  vérifiant le système :

$$\begin{cases} x = x \cos a - (y - x^2) \sin a \\ y = x \sin a + (y - x^2) \cos a \end{cases}$$

La première équation donne  $y = x^2 - x \tan a/2$ . Par substitution dans la deuxième équation, on trouve  $x^2 = 2x \tan a/2$ . D'où les deux points fixes  $O(0, 0)$  et  $A(2 \tan a/2, 2 \tan^2 a/2)$ .

Au voisinage de  $O$ , l'application linéarisée (en négligeant les termes du second degré) devient

$$\begin{cases} x' = x \cos a - y \sin a \\ y' = x \sin a + y \cos a \end{cases}$$

Il s'agit d'une rotation autour de  $O$ , d'angle  $a$ , d'où la formation de trajectoires d'allure circulaire autour du point  $O$  qui est un centre (ou point elliptique ou tourbillon).

Pour le deuxième point fixe, procédons à un changement de repère par translation, la nouvelle origine étant  $A$ , grâce à la formule de passage :  $x = 2 \tan a/2 + X$ ,  $y = 2 \tan^2 a/2 + Y$ . Dans ce nouveau repère l'application s'écrit, après avoir supprimé les termes constants qui sont nuls puisque  $A$  est un point fixe :

$$\begin{cases} X' = x(\cos a + 4 \tan(a/2) \sin a) + X^2 \sin a - Y \sin a \\ Y' = X(\sin a - 4 \tan(a/2) \sin a) - X^2 \cos a + Y \cos a \end{cases}$$

Au voisinage de  $A$ , l'expression linéarisée s'écrit :

$$\begin{cases} X' = x(\cos a + 4 \tan(a/2) \sin a) - Y \sin a \\ Y' = X(\sin a - 4 \tan(a/2) \sin a) + Y \cos a \end{cases}$$

La trace  $T$  de la matrice associée est :

$T = 2 \cos a + 4 \tan(a/2) \sin a = 2(1 - 2 \sin^2 a/2 + 4 \sin^2 a/2) = 2(1 + 2 \sin^2 a/2)$ . Il en découle que  $T > 2$ , les valeurs propres  $\frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4})$  sont réelles et distinctes, l'une étant supérieure à 1 et l'autre inférieure à 1 (leur produit valant 1). Le point  $A$  est une selle (ou point hyperbolique). Les vecteurs propres  $\mathbf{V}$  associés à chaque valeur propre  $\lambda$  ont pour coordonnées :

$$x_V = 1, \quad y_V = (\cos a - 4 \tan(a/2) \sin a - \lambda) / \sin a.$$

3) En utilisant le fait que l'application  $H$  de Hénon est la composée d'une rotation  $R$  et d'une autre application  $T$ , montrer que  $H$  est une bijection, et déterminer la bijection réciproque  $H^{-1}$ .

Comme la formule donnant  $H$  l'indique, on a  $H = RT$  (à lire de droite à gauche), en commençant par faire  $T$  faisant passer de  $(x, y)$  à  $(x_1, y_1)$  par :  $x_1 = x$ , et  $y_1 = y - x^2$ , suivie de la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $a$ . L'application  $T$  est inversible, avec  $T^{-1}$  telle que  $x' = x$  et  $y' = y + x^2$ . On en déduit que  $H$  est inversible, avec  $H^{-1} = T^{-1} R^{-1}$ .

4) Montrer que  $H^{-1} = R^{-1} S T S$ , où  $S$  est la réflexion d'axe  $(OA)$ .

$H^{-1} = T^{-1} R^{-1} = R^{-1} R T^{-1} R^{-1} = R^{-1} (R T^{-1} R^{-1})$ . A son tour  $R$  est le produit de la réflexion  $s$  d'axe  $(Ox)$  suivie de la réflexion  $S$  d'axe  $(OA)$ , puisque l'angle de  $Ox$  avec  $OA$  est  $a/2$  :  $R = Ss$ .

$R T^{-1} R^{-1} = Ss T^{-1} sS$ . Montrons que  $s T^{-1} s = T$  :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{s} \begin{pmatrix} x_1 = x \\ y_1 = -y \end{pmatrix} \xrightarrow{T^{-1}} \begin{pmatrix} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 + x_1^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s} \begin{pmatrix} x' = x_2 \\ y' = -y_2 \end{pmatrix} \text{ et l'on a bien } x' = x, y' = y - x^2.$$

Alors  $R^{-1}R^{-1} = STS$  et  $H^{-1} = R^{-1}(STS)$ .

5) Soit  $P$  et  $Q$  deux points symétriques par rapport à  $(OA)$ . Montrer que  $H(P) = H^{-1}(Q)$ . En déduire que les trajectoires présentent une symétrie par rapport à  $(OA)$ .

Soit le point  $P_1$  tel que  $P_1 = T(P)$  et  $Q_1$  tel que  $Q_1 = STS(Q)$ . Montrons que  $P_1$  et  $Q_1$  sont aussi symétriques par rapport à  $(OA)$  :

Avec  $Q_1 = STS(Q)$ ,

$S(Q_1) = TS(Q) = TSS(P) = T(P) = P_1$ .

Il reste à montrer qu'avec  $P_1$  et  $Q_1$  symétriques, les points  $P' = R(P_1)$  et  $Q' = R^{-1}(Q_1)$  sont aussi symétriques (figure 9). Utilisons le fait que  $SRS = R^{-1}$  puisque la conjuguée de la rotation  $R$  sous l'effet de  $S$  est la rotation de même centre et d'angle opposé. On en déduit que :

$Q' = R^{-1}(Q_1) = SRS(Q_1) = SR(P_1) = S(P')$ .

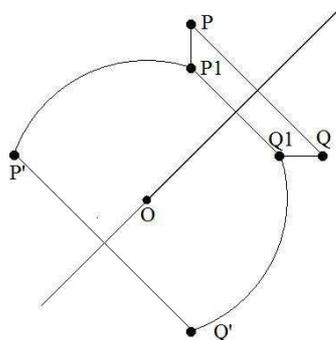


Figure 9 : Symétrie des trajectoires,  $P' = H(P)$  et  $Q = H(Q')$ .

A partir de deux points  $P$  et  $Q$  symétriques par rapport à  $(OA)$ , considérons maintenant la trajectoire partielle du point  $P$  sous l'effet de  $H$ , soit  $P, H(P), H^2(P), \dots$ , jusqu'à  $H^n(P)$ , ainsi que celle du point  $U = H^n(Q)$ , soit  $U, H(U), H^2(U), \dots$ , jusqu'à  $H^n(U) = Q$ . Les points de ces deux trajectoires sont symétriques, même si leur parcours se fait en sens inverse.

6) Programmer le tracé de nombreuses trajectoires, pour diverses valeurs du paramètre  $a$ .

Pour avoir les trajectoires, nous avons pris comme points de départ des points situés sur  $[OA)$ , en prenant leurs images sous l'effet répété de la bijection  $H$ , ainsi que de son inverse  $H^{-1}$ , pour couvrir un grand nombre de trajectoires (figure 10). Comme prévu, on observe des courbes de forme circulaire concentriques autour de  $O$ . A la périphérie, on note aussi la présence d'autres orbites elliptiques autour d'un cycle de points, séparés par un cycle de points hyperboliques, comme une guirlande.

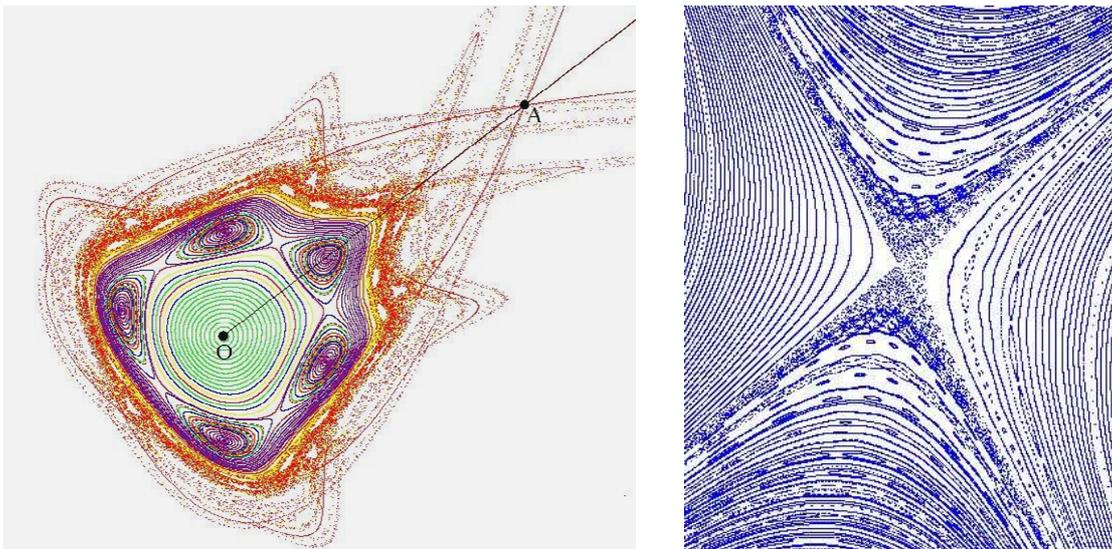


Figure 10 : A gauche trajectoires obtenues pour  $a = 1,32$ , à droite grossissement d'un des cinq points hyperboliques de la guirlande.

7) Programmer le tracé de la courbe stable et de la courbe instable du point hyperbolique A.

Il suffit de placer le point fixe A, et de prendre deux points très proches de A sur le vecteur propre concerné, soit  $A_1$  et  $A_2$ . Puis en partant de  $N$  points situés entre  $A_1$  et  $A_2$ , on dessine leurs trajectoires, ce qui donne les courbes stable et instable. Dans la partie de programme suivante, on a seulement donné la construction de la courbe instable, celle de la courbe stable étant analogue (figure 11).

```

pfx=2.*tan(alpha/2.); pfy=2.*tan(alpha/2.)*tan(alpha/2.); /** point fixe A */
filldisc(xorig+zoom*pfx,yorig-zoom*pfy,5,black);
/** valeurs propres et vecteurs propres */
l1=1.+2.*sin(alpha/2.)*sin(alpha/2.)+2.*sin(alpha/2.)*sqrt(1.+sin(alpha/2.)*sin(alpha/2.));
l2=1.+2.*sin(alpha/2.)*sin(alpha/2.)-2.*sin(alpha/2.)*sqrt(1.+sin(alpha/2.)*sin(alpha/2.));
vux=1.; vuy=(cos(alpha)+4.*sin(alpha)*tan(alpha/2.)-l1)/sin(alpha);
vsx=1.; vsy=(cos(alpha)+4.*sin(alpha)*tan(alpha/2.)-l2)/sin(alpha);
/** courbe instable */
x1=pfx-vux/300000.; y1=pfy-vuy/300000.; /** premier point A1 sur le vecteur propre */
x=x1;y=y1; y=y-x*x;newx=cos(alpha)*x-sin(alpha)*y;y=sin(alpha)*x+cos(alpha)*y;
x2=newx;y2=y; /** deuxième point A2 sur le vecteur propre */

for(k=0;k<N;k++) /** trajectoires issues de N points situés entre A1 et A2 */
{ xinit=pfx+k*(x2-x1)/(double)N; yinit=pfy+k*(y2-y1)/(double)N;
  x=xinit;y=yinit;
  for(i=0;i<30;i++)
  { y=y-x*x;newx=cos(alpha)*x-sin(alpha)*y;y=sin(alpha)*x+cos(alpha)*y;x=newx;
    if (xorig+zoom*x <800 && xorig+zoom*x >0 && yorig-zoom*y<600 && yorig-zoom*y>0)
      putpixel(xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,blue);
  }
}
linewidth(xorig+zoom*pfx,yorig-zoom*pfy, /** dessin des vecteurs propres */
           xorig+zoom*(pfx+vsx/10.),yorig-zoom*(pfy+vsy/10.),2,black);
linewidth(xorig+zoom*pfx,yorig-zoom*pfy,
           xorig+zoom*(pfx+vux/3.),yorig-zoom*(pfy+vuy/3.),2,black);
linewidth(xorig+zoom*pfx,yorig-zoom*pfy,
           xorig+zoom*(pfx-vsx/10.),yorig-zoom*(pfy-vsuy/10.),2,black);
linewidth(xorig+zoom*pfx,yorig-zoom*pfy,
           xorig+zoom*(pfx-vux/3.),yorig-zoom*(pfy-vuy/3.),2,black);

```

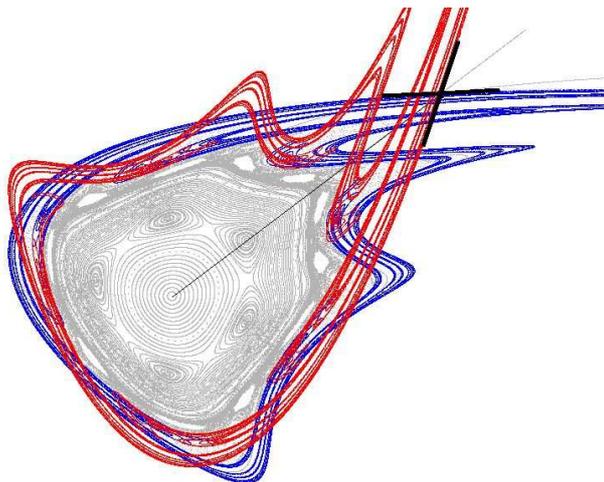


Figure 11 : Courbe stable en rouge et courbe instable en bleu issues du point hyperbolique  $A$ , avec ses deux vecteurs propres en noir, pour  $a = 1,3$

8) Tracer les courbes stable et instable d'un des cinq points hyperboliques

En prenant  $a = 1,32843$ , on commence par déterminer expérimentalement un des points fixes sous l'effet de  $H^5$ , puis on trace les courbes instable et stable (figure 12). On constate que la courbe stable d'un des points hyperboliques est la courbe instable du point hyperbolique suivant, et vice versa. Finalement, à cause de la présence d'un nombre impair de points fixes, la courbe stable se confond avec la courbe instable.

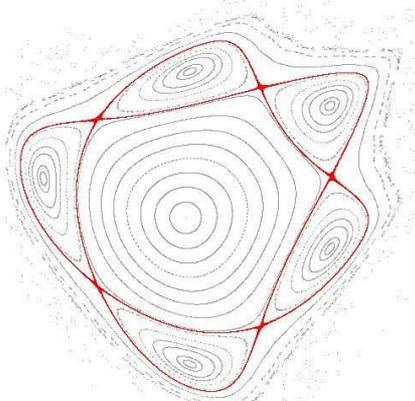


Figure 12 : Courbes stable et instable des cinq points hyperboliques, la courbe stable de l'un étant instable pour le suivant.

## 5) Points homoclines et hétéroclines

On est toujours dans le contexte où l'application  $f$  présente un point hyperbolique, ce qui nous conduit à préciser les propriétés des courbes stable et instable  $W_s$  et  $W_i$ . Ce qui vaut pour l'une vaut pour l'autre, car appliquer  $f$  à l'une  $W_i$  revient à appliquer  $f^{-1}$  à l'autre  $W_s$ .

- Une courbe instable (ou stable) ne peut pas se recouper, car s'il existait un tel point d'intersection, il aurait deux images distinctes sous l'effet de  $f$ , ce qui est contraire à la notion d'application (figure 13).

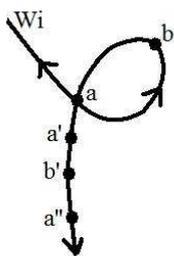


Figure 13 : Les deux images distinctes  $a'$  et  $a''$  du point fixe hyperbolique  $a$ , séparées par celle  $b'$  de  $b$

• Il peut arriver que la courbe instable d'un point fixe soit la courbe stable d'un autre point fixe, ou encore que la courbe instable d'un point fixe se confonde avec la courbe stable de ce même point. Nous avons vu cela pour les cinq points hyperboliques de la bijection de Hénon (cf. *figure 12*). Mais le cas le plus courant est celui où la courbe instable d'un point fixe coupe la courbe stable de ce même point, ou d'un autre point fixe. Un point d'intersection entre la courbe stable et instable d'un même point fixe est appelé point homocline. Un point d'intersection entre la courbe instable d'un point fixe et la courbe stable d'un autre point fixe est appelé point hétérocline (*figure 14*).<sup>4</sup>

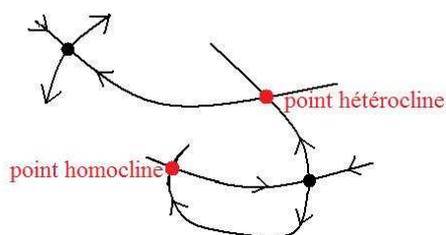


Figure 14 : Deux points fixes hyperboliques avec un point d'intersection homocline et un point hétérocline

• Lorsqu'il existe un point homocline  $H$  (ou hétérocline), il en existe une infinité. En effet, ce point est à l'intersection des courbes stable et instable qui sont globalement invariantes sous l'effet de  $f$  et de  $f^{-1}$ . Les successeurs de  $H$ ,  $f(H)$ ,  $f^2(H)$ , etc. sont donc aussi des points d'intersection homoclines, ainsi que ses antécédents  $f^{-1}(H)$ ,  $f^{-2}(H)$ , etc. Cela fait une double infinité de points, convergeant vers le point fixe sur l'une et l'autre courbe.

• Dans le cas où l'application conserve les aires et l'orientation, entre deux points homoclines existe un ensemble dense de points homoclines. Pour le vérifier, raisonnons par l'absurde. Prenons deux points homoclines successifs à distance finie, soit  $x$  et  $f(x)$ , avec une aire finie  $S$  à partir d'eux entre les bouts de courbes stable et instable (*figure 15*). En prenant les images successives de ces deux points et de l'aire  $S$ , les aires restent les mêmes et de même orientation, et elles ne s'imbriquent pas les unes dans les autres. On obtient une infinité de surfaces finies confinées dans un espace fini. C'est impossible. Nous sommes donc en présence de deux courbes qui s'entrelacent à l'infini en faisant une infinité de zigzags à l'intérieur de leurs zigzags. C'est le signe d'une dynamique complexe, qui fascinait déjà H. Poincaré dans les années 1900, lorsqu'il découvrit ce phénomène : « Ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées : chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. »

<sup>4</sup> Remarquons que dans le cas de deux points fixes hyperboliques, la courbe stable de l'un ne peut pas couper la courbe stable de l'autre (ni la courbe instable de l'un celle de l'autre). En effet les images successives de ce point d'intersection par  $f$  (ou  $f^{-1}$ ) devraient se rapprocher infiniment près à la fois de l'un des points fixes et de l'autre, ce qui est impossible.

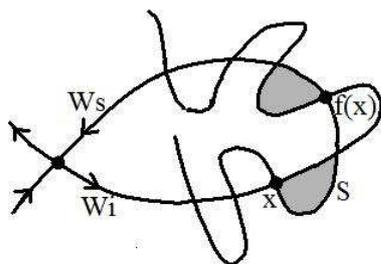


Figure 15 : Courbes stable et instable d'un point hyperbolique, avec leurs intersections homoclines

• Dans le cas général, la présence de points homoclines, lors de la coupure franche entre les courbes stable et instable, impose l'existence d'un phénomène de fer à cheval, du style application du boulanger ou étirement-pliage de Hénon, comme indiqué sur la figure 16. De là découlent que les trajectoires sont chaotiques. L'intersection des courbes stable et instable est le révélateur d'un mouvement chaotique.

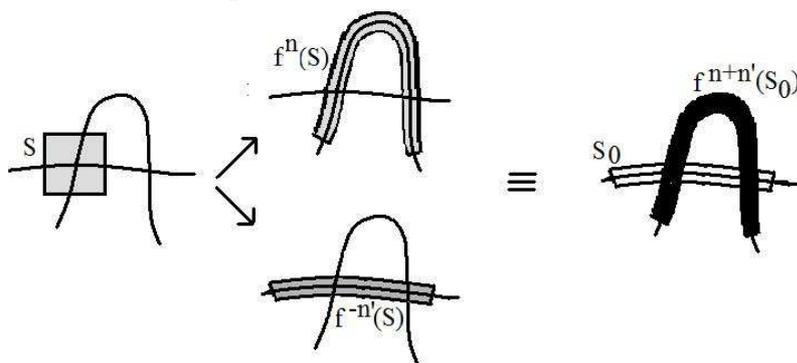


Figure 16 : Transformation d'un carré entourant le point fixe hyperbolique, sous l'effet répété de  $f$  ou de son inverse. En partant de  $S_0 = f^{-n'}(S)$ , on obtient  $f^{n+n'}(S_0) = f^n(S)$  au bout de  $n + n'$  itérations

**Exercice 7 : le chat d'Arnold**

Il s'agit de l'application  $f$  de  $[0, 1[$  dans  $[0, 1[$  faisant passer d'un point  $(x, y)$  au point  $(x', y')$  par :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 2y \end{cases} \pmod{1} \text{ avec pour matrice sous-jacente } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ mais le fait de ramener les résultats modulo 1 fait perdre son caractère linéaire à l'application. Tout ce qui sort du carré de côté } [0, 1[ \text{ est remis à l'intérieur du carré (figure 17).}$$

1) Montrer que cette application a pour point fixe unique l'origine  $O$  du repère.

Un point fixe  $(x, y)$  doit vérifier :  $x + k = x + y$  et  $y + k' = x + 2y$ , avec  $k$  et  $k'$  entiers, ce qui impose  $y = k$  et  $x = k' - k$ . Avec  $0 \leq x < 1$  et de même pour  $y$ , la seule possibilité est  $x = y = 0$ .

2) Montrer que  $O$  est un point hyperbolique et déterminer ses courbes stable et instable.

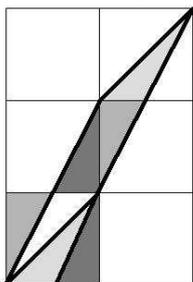
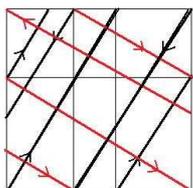


Figure 17 : Le carré unité est transformé en parallélogramme, puis les morceaux qui sortent du carré sont ramenés en son intérieur

L'équation caractéristique s'écrit  $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ , d'où les deux valeurs propres :

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \varphi^2 \text{ ou } \varphi'^2.{}^5 \text{ Ces deux valeurs propres étant positives et de part et d'autre de 1, le}$$

point  $O$  est un point hyperbolique. Les vecteurs propres ont pour pente  $\lambda - 1$ , soit  $\varphi^2 - 1 = \varphi$  et  $\varphi'^2 - 1 = -\varphi'$ . La courbe stable  $W_s$  et la courbe instable  $W_i$  du point  $O$  sont des droites de pente  $\varphi$  et  $\varphi'$ , mais le fait de les ramener modulo 1 les transforment en une infinité de segments parallèles à l'intérieur du carré. Comme leurs pentes sont irrationnelles, elles ne passent par aucun point de coordonnées rationnelles, excepté le point  $O$ . Les deux courbes se coupent donc une infinité de fois, donnant des points homoclines, et entre deux points homoclines, il existe un ensemble dense de points homoclines (*figure 18*).



*Figure 18* : Quelques morceaux de la courbe stable en rouge et de la courbe instable en noir. Leurs points d'intersection sont les points homoclines

3) En utilisant l'application  $f^2$ , montrer l'existence de points hétéroclines.

La matrice associée à  $f^2$  est  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Les points fixes  $(x, y)$  doivent vérifier :

$x + k = 2x + 3y$  et  $y + k' = 3x + 5y$ , soit en résolvant le système :

$$\begin{cases} x = \frac{3k' - 4k}{5} \\ y = \frac{3k - k'}{5} \end{cases}$$

Avec les contraintes imposées à  $x$  et  $y$  d'être compris entre 0 et 1, on trouve quatre nouveaux points fixes,<sup>6</sup> en plus de  $O$  qui reste point fixe, soit les points  $(2/5, 1/5)$ ,  $(1/5, 3/5)$ ,  $(4/5, 2/5)$ ,  $(3/5, 4/5)$ , les deux derniers étant les images des deux premiers par  $f$ . A cause de leurs valeurs propres  $\varphi^2$  et  $\varphi'^2$ , toujours positives et de part et d'autre de 1, tous ces points fixes sont hyperboliques. Sans avoir besoin de faire le calcul, les directions des vecteurs propres doivent être les mêmes que celles obtenues pour le point  $O$ , sinon il y aurait intersections entre les courbes stables de ces points. Par exemple, la courbe stable du point  $(2/5, 1/5)$ , de pente  $-\varphi'$ , passe par ce seul point de coordonnées rationnelles, et reste parallèle sans jamais être confondue avec la courbe stable du point  $O$ , passant par le seul point  $(0, 0)$  de coordonnées rationnelles. Puis en prenant la courbe stable d'un des points fixes, et la courbe instable d'un autre point fixe, il existe une infinité de points d'intersection qui sont des points hétéroclines.

<sup>5</sup> Rappelons que les deux nombres d'or sont  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\varphi' = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ . Si ces nombres apparaissent, c'est

parce que la matrice  $A$  est formée de nombres de Fibonacci successifs.

<sup>6</sup> Les contraintes imposées à  $k$  et  $k'$  sont  $0 \leq -4k + 3k' < 5$  et  $0 \leq 3k - k' < 5$ , ce qui oblige les points à coordonnées entières  $(k, k')$  à être situés à l'intérieur d'un parallélogramme délimité par les droites d'équation  $y = 4/3 x$ ,  $y = 4/3 x + 5/3$ ,  $y = 3x$ ,  $y = 3x - 5$ .

### Exercice 8 : Attracteur de Hénon

Reprenons la transformation faisant passer d'un point  $(x, y)$  au point  $(x', y')$  par :

$$\begin{cases} x' = 1 + y - ax^2 \\ y' = bx \end{cases} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ donnés, } a = 1,4 \text{ et } b = 0,314 \text{ dans le cas présent.}$$

1) Déterminer ses deux points fixes et montrer qu'il s'agit de points hyperboliques dont on précisera les vecteurs propres.

En faisant  $x' = x$  et  $y' = y$ , on trouve les deux points fixes  $(x_f, y_f)$  :  $x_f = \frac{b-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $y_f = b x_f$  avec

$\Delta = (1-b)^2 + 4a (> 0)$ . La linéarisation de la transformation au voisinage des points fixes conduit à

l'écriture matricielle  $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ax_f & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ . L'équation caractéristique s'écrit :

$\lambda^2 + 2a x_f \lambda - b = 0$ , ce qui donne les valeurs propres  $\lambda = -ax_f \pm \sqrt{a^2 x_f^2 + b}$ . On vérifie par le calcul que les valeurs propres sont en valeur absolue de part et d'autre de 1. On obtient deux points hyperboliques. Comme les vecteurs propres vérifient  $bX = \lambda Y$ , leur pente est  $b/\lambda$ .

2) Déterminer la transformation inverse, ce qui permettra de construire ultérieurement la courbe stable des points hyperboliques.

L'inversion des formules permet d'avoir  $(x, y)$  par rapport à  $(x', y')$  :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b} y' \\ y = x' + \frac{a}{b^2} y' - 1 \end{cases}$$

3) Tracer sur ordinateur les courbes stable et instable des deux points fixes. Que constate-t-on ?

Les résultats précédents permettent de dessiner les deux points fixes avec leurs vecteurs propres, ainsi que les courbes stable et instable associées. On constate que les deux courbes instables des deux points fixes, qui ne peuvent pas se couper, viennent toutes deux se coller sur l'attracteur (figure 19). D'autre part, la courbe stable de l'un des points fixes constitue la frontière du bassin d'attraction de l'attracteur, tandis que la courbe stable de l'autre zigzague de façon envahissante dans le bassin d'attraction, en recoupant la courbe stable de ce point fixe, ainsi que celle de l'autre, d'où les points homoclines et hétéroclines.

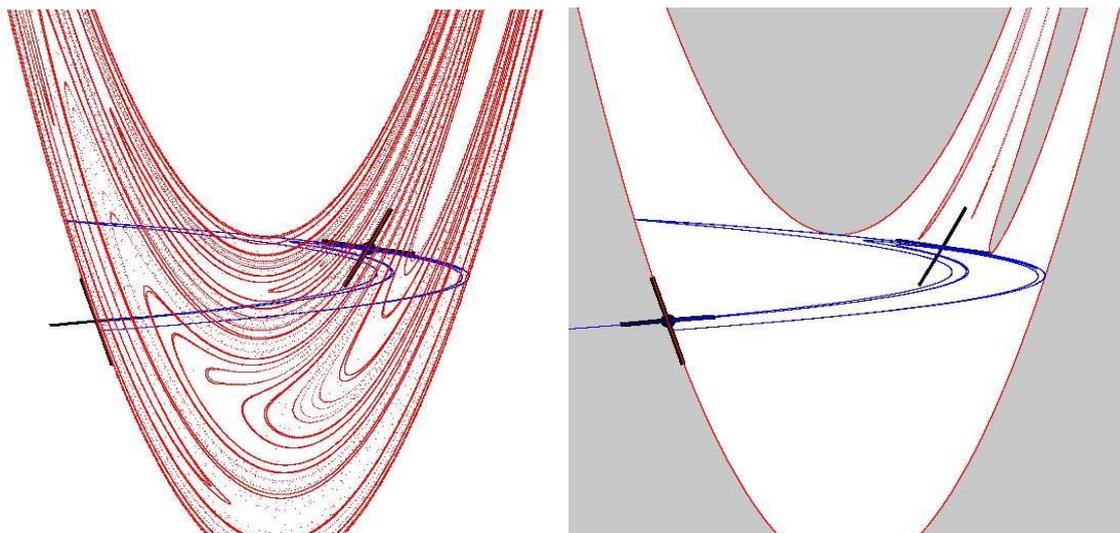


Figure 19 : Attracteur de Hénon pour  $a = 1,4$  et  $b = 0,314$ , à gauche, courbes stable (en rouge) et instable (en bleu) d'un des deux points fixes, à droite courbe stable et instable du deuxième point fixe, la courbe stable (en rouge) étant la frontière du bassin d'attraction (en blanc)

## 6) Les phénomènes de crise et le lemme lambda

On dit qu'il se produit une crise lorsque l'attracteur change brutalement de forme pour une légère variation des paramètres. C'est ce que nous allons observer dans les exemples qui suivent. Cela s'explique grâce à un théorème, appelé le lemme lambda.

Ce théorème montre pourquoi il arrive que la courbe instable et l'attracteur soient collés l'un sur l'autre. Il indique en effet que si une courbe  $L$  traverse la courbe stable d'un point hyperbolique, ses itérés successifs  $f(L)$ ,  $f^2(L)$ , etc. viennent se plaquer sur la courbe instable, dans sa globalité. Il s'ensuit qu'en prenant les points de  $L$  dans le bassin d'attraction où se trouve la courbe instable, leurs itérés convergent vers l'attracteur, tout en venant se coller sur la courbe instable. On assiste à ce phénomène sur les figures 19 et 21 notamment, lorsque la courbe  $L$  n'est autre que l'attracteur.

### Exercice 9 : Variante de l'attracteur de Hénon

Prenons l'application de Hénon sous une forme semblable à la précédente :

$$\begin{cases} x' = a - x^2 + by \\ y' = x \end{cases} \text{ mais maintenant avec } b = -0,3^7$$

1) Faire varier le paramètre  $a$  de 1,3 à 1,5. Constater que le bassin d'attraction passe d'une frontière lisse à une frontière fractale feuilletée. Pourquoi ?

Pour ces valeurs du paramètre  $a$ , on commence par constater que l'attracteur est réduit à un cycle de deux points. Il existe aussi deux points fixes hyperboliques, dont l'un est situé entre le cycle des deux points de l'attracteur, et dont l'autre est sur la frontière du bassin d'attraction. C'est le tracé des courbes stables et instables des deux points hyperboliques qui permet de comprendre le changement de forme du bassin d'attraction. La courbe instable du premier point fixe relie le cycle attracteur, tandis que la courbe stable parcourt le bassin d'attraction, et cela pour les deux valeurs de  $a$  : 1,3 puis 1,5 (figure 20 à gauche). Mais c'est le deuxième point fixe qui crée le changement. Sa courbe instable décrit la frontière du bassin d'attraction, mais pour  $a = 1,3$  sa courbe stable ne coupe pas la courbe

<sup>7</sup> M. Hénon a plutôt étudié le cas où  $b$  est de l'ordre de  $+0,3$ . Le cas  $b = -0,3$  est dû notamment à J. Yorke.

instable, tandis que pour  $a = 1,5$ , elle la coupe, et c'est la présence de points homoclines, signes de chaos, qui va de pair avec la structure feuilletée prise par le bassin d'attraction.

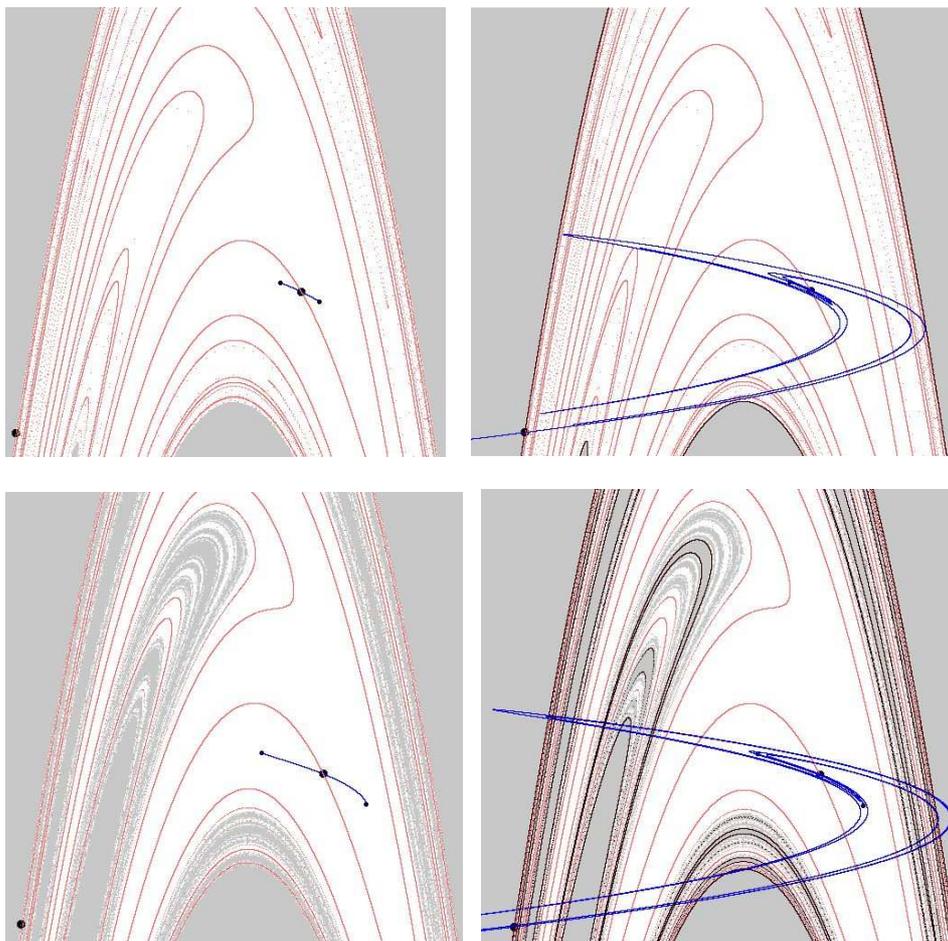


Figure 20 : Passage de  $a = 1,3$  en haut, à  $a = 1,5$  en bas, le bassin d'attraction (en blanc) étant délimité par une courbe lisse dans le premier cas, et par une courbe fractale feuilletée dans le deuxième. Les deux points fixes hyperboliques sont représentés par de gros points. L'attracteur est un cycle de deux points, que relie la courbe instable (en bleu) d'un point fixe (figures de gauche), sa courbe stable (en rouge) se développant dans le bassin d'attraction. Sur les figures de droite s'ajoutent la courbe instable (en bleu) du deuxième point fixe, et sa courbe stable (en noir) frontière du bassin d'attraction. En haut ces deux courbes sont proches mais ne se coupent pas, en bas, elles se coupent.

2) Faire maintenant passer le paramètre  $a$  de 2 à 2,05. Que se passe-t-il ?

Pour  $a = 2$ , l'attracteur est formé de deux morceaux de courbe, tandis que pour  $a = 2,05$  l'attracteur est d'un seul tenant. Cette modification qualitative dans la continuité et les dimensions de l'attracteur s'explique par le changement dans les courbes stable et instable du premier point fixe, le deuxième – celui situé sur la frontière – n'ayant pas d'influence dans le cas présent. Dans le premier cas, la courbe stable et la courbe instable du premier point fixe ne se coupent pas, tandis que dans le deuxième elles se coupent, avec la présence de points homoclines.

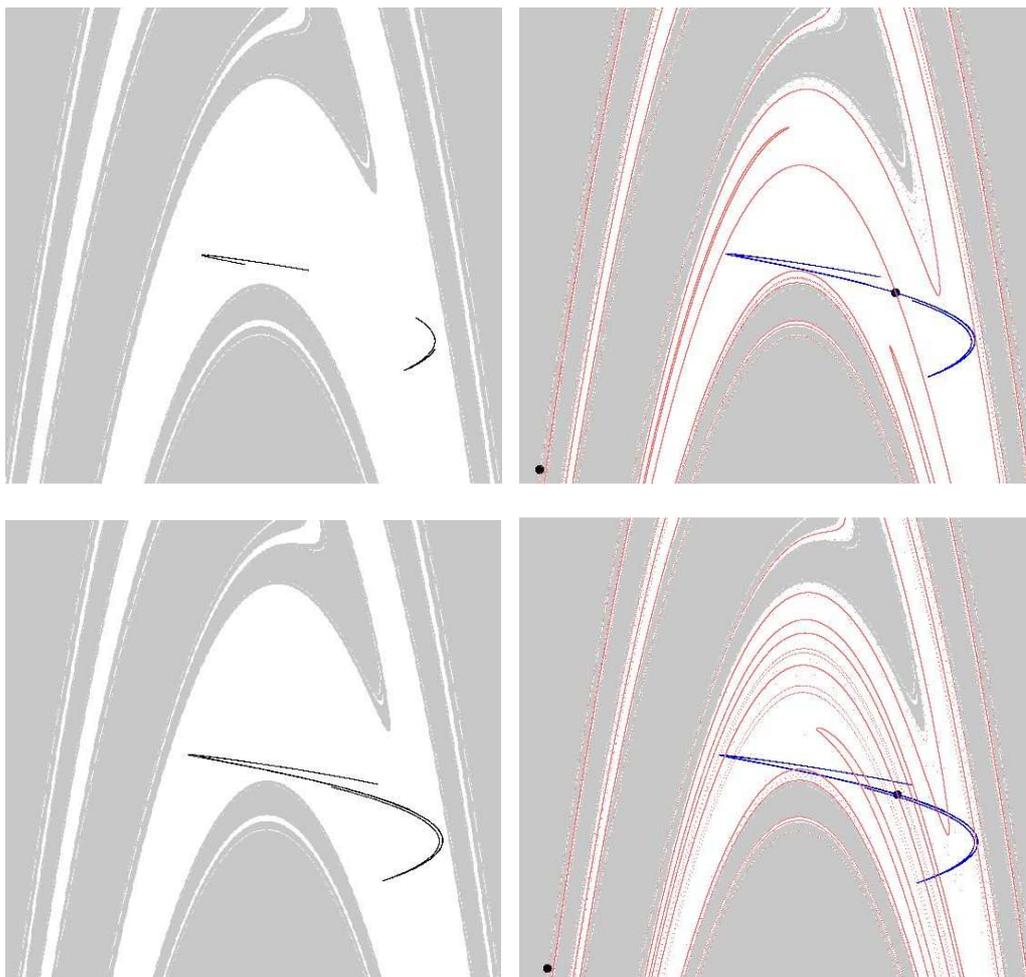


Figure 21 : En haut pour  $a = 2$ , en bas pour  $a = 2,05$ . Les figures de gauche montrent l'attracteur (en noir) dans le bassin d'attraction (en blanc). Les figures de droite montrent les deux points fixes hyperboliques, avec la courbe stable (en rouge) et la courbe instable (en bleu) de l'un des points fixes. Les deux courbes sont très proches dans le premier cas, sans pour autant se couper. Elles se coupent dans le deuxième cas.

### Exercice 10 : Crise pour l'attracteur d'Ikeda

Reprenons la fonction  $f$  dont l'action répétée donne l'attracteur d'Ikeda. Elle s'écrit :

$$\begin{cases} x' = 0,84 + (0,9 \cos T)x - (0,9 \sin T)y \\ y' = (0,9 \sin T)x + (0,9 \cos T)y \end{cases} \quad \text{avec } T = 0,4 - \frac{A}{1 + x^2 + y^2}$$

1) Faire passer  $A$  de 7,1 à 7,4. Constaté que l'attracteur voit soudain sa taille augmenter fortement, la forme originelle laissant son empreinte au sein de la forme agrandie. Du fait de ce saut discontinu dans ses dimensions, on dit que l'attracteur subit une crise.

Les résultats obtenus sont donnés sur la figure 22. L'attracteur est obtenu en partant du point  $(1, 0)$  et en faisant quelques millions d'itérations.

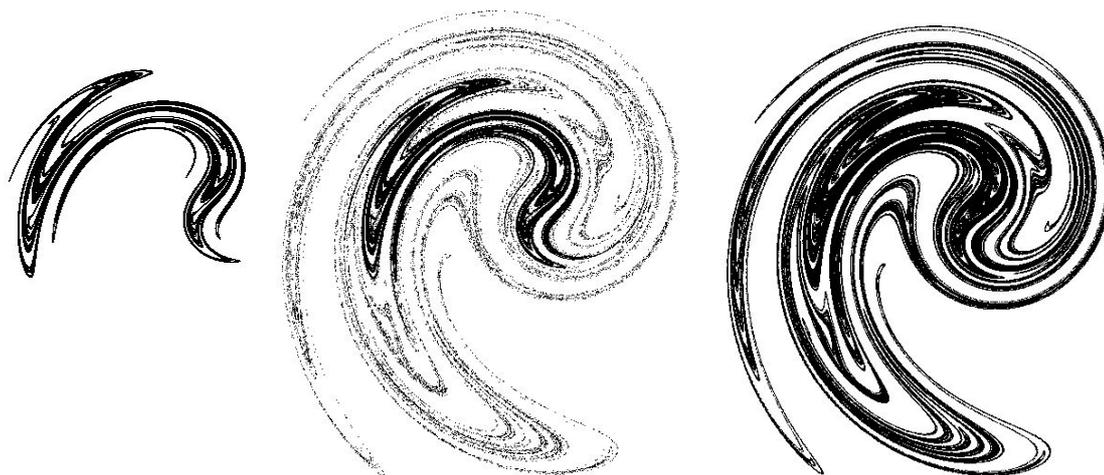


Figure 22 : Attracteur d'Ikeda pour  $A = 7,1$  à gauche et pour  $A = 7,4$  à droite, avec une forme intermédiaire au centre.

2) Il s'agit maintenant de comprendre ce qui s'est produit. Pour cela prendre  $A = 7,1$ , et déterminer expérimentalement un cycle fixe de cinq points, en utilisant pour cela la fonction inverse  $f^{-1}$ . On admettra qu'il s'agit de points hyperboliques, et l'on précisera expérimentalement les directions propres de l'un de ces points. On constatera que ces points sont proches de l'attracteur.

L'un des cinq points du cycle fixe est  $(1,1096\dots, -0,2417\dots)$ , et les pentes des vecteurs propres sont  $0,256$  pour la courbe instable et  $-8,46$  pour la courbe stable (figure 23).



Figure 23 : Attracteur d'Ikeda pour  $A = 7,1$ , et son cycle fixe de cinq points hyperboliques. A droite est ajoutée la courbe stable en rouge associée au cycle des points hyperboliques, l'attracteur restant dans la zone intermédiaire, sans contact avec la courbe stable

3) Déterminer la fonction inverse  $f^{-1}$ . Puis tracer sur ordinateur les courbes stable et instable d'un des points du cycle fixe, ce qui donnera par la même occasion celles des autres points du cycle. On constatera que la courbe instable ressemble à ce qui s'ajoute à l'attracteur pour  $A = 7,1$  lorsque l'on passe à  $A = 7,4$ . Que s'est-il passé pendant la crise ?

La fonction inverse  $f^{-1}$  qui permet de tracer la courbe stable est telle que l'on passe de  $(x, y)$  à  $(x', y')$  par :<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Pour trouver cette fonction inverse, on part de l'écriture de  $f$  en complexes :

$$z' = 0,84 + 0,9 z e^{i(0,4 - \frac{A}{1+|z|^2})}, \text{ d'où } z = \frac{z' - 0,84}{0,9} e^{i(-0,4 + \frac{A}{1+|z|^2})}, \text{ et } |z|^2 = \left| \frac{z' - 0,84}{0,9} \right|^2 \text{ qu'il suffit de}$$

remplacer dans la formule précédente pour avoir  $z$  par rapport à  $z'$ .

$$\begin{cases} x' = x_1 \cos T - y_1 \sin T \\ y' = x_1 \sin T + y_1 \cos T \end{cases} \quad \text{avec } x_1 = \frac{x-0,84}{0,9}, \quad y_1 = \frac{y}{0,9} \quad \text{et } T = -0,4 + \frac{A}{1+x_1^2 + y_1^2}$$

Que se passe-t-il pendant la crise ? Lorsque le paramètre  $A$  augmente, l'attracteur se rapproche du cycle des cinq points hyperboliques. Lorsque la collision a lieu, l'attracteur devient tangent à la courbe stable des points hyperboliques, qui sert de frontière au bassin d'attraction de l'attracteur. Puis il traverse la courbe stable, et là se produit la crise. En vertu du lemme lambda, l'attracteur vient se coller sur la courbe instable dans sa globalité et ses dimensions s'en trouvent multipliées.

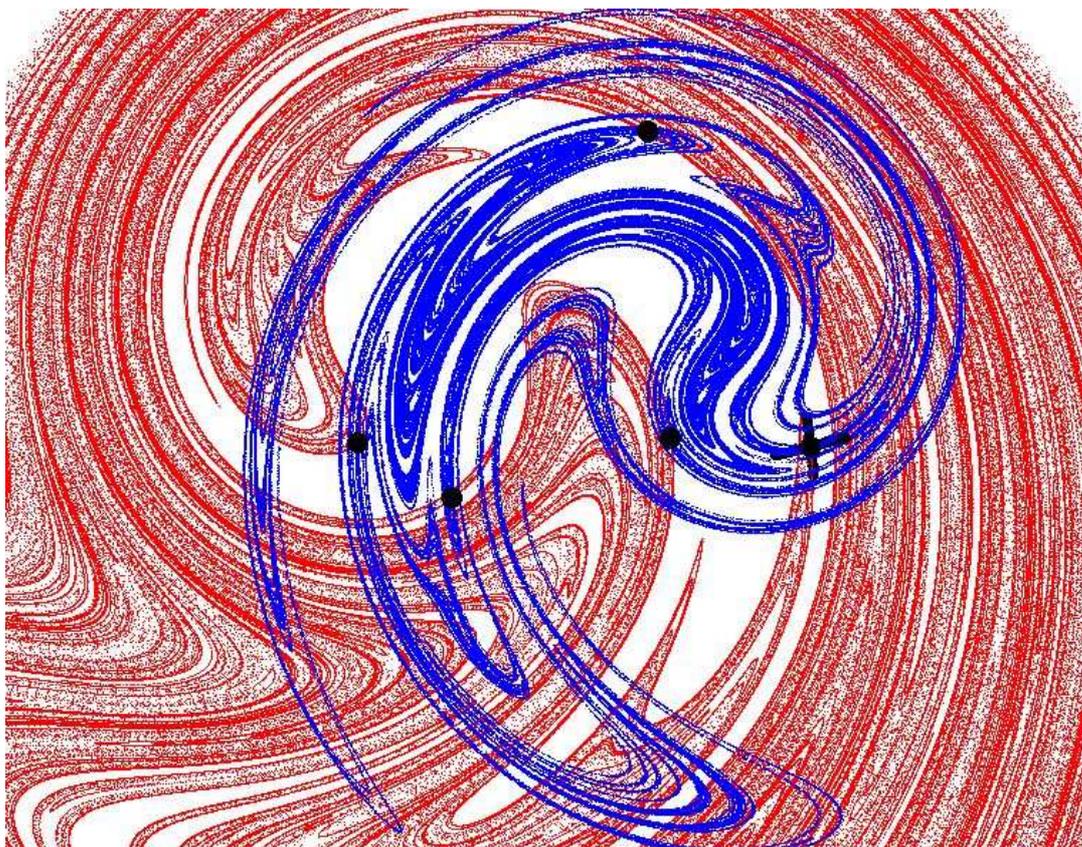


Figure 24 : Courbe instable en bleu issue d'un des cinq points (en noir) hyperboliques avec les directions propres en ce point, et courbe stable en rouge

### Exercice 11 : Bijection du troisième degré

Considérons l'application faisant passer de  $(x, y)$  à  $(x', y')$  par

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx + dy - y^3 \end{cases} \quad \text{avec } b \text{ et } d \text{ positifs.}$$

Posons  $a = d - b - 1$ .

1) Déterminer les points fixes suivant les valeurs de  $a$ .

Ils vérifient  $x = y$  et  $x^3 - ax = 0$ . On distingue deux cas :

- \* Si  $a$  est négatif, il existe un seul point fixe  $x = y = 0$ .
- \* Si  $a$  est positif, il existe trois points fixes :  $x = 0$  et  $x = \pm\sqrt{a}$ , avec  $y = x$ .

2) Montrer que pour  $a > 0$  le point  $O$  est un point fixe hyperbolique. Qu'en est-il des autres points fixes ?

Au voisinage du point  $O$ , l'application linéarisée s'écrit 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

en négligeant le terme en  $x^3$ . L'équation caractéristique s'écrit  $\lambda^2 - d\lambda + b = 0$ . La fonction telle que  $f(x) = x^2 - dx + b$  est représentée par une parabole tournée vers le haut. On constate que  $f(1) = -a < 0$ , ce qui prouve que la courbe, qui possède une partie négative et une partie positive, coupe l'axe des  $x$  en deux points, et qu'il existe deux valeurs propres réelles (le discriminant  $\Delta = d^2 - 4b$  est donc positif). Les deux valeurs propres correspondantes  $(d \pm \sqrt{\Delta})/2$  sont toutes deux positives puisque leur somme et leur produit le sont. Avec le nombre 1 situé entre elles, on en déduit que le point  $O$  est un point hyperbolique. Comme les vecteurs propres vérifient  $y = \lambda x$ , ils ont pour pente les valeurs propres.

Prenons maintenant les deux autres points fixes  $x_0 = \pm\sqrt{a}$  (et  $y_0 = x_0$ ). Par changement de repère, avec un de ces points comme nouvelle origine, soit  $x = x_0 + X$ , et  $y = y_0 + Y$ , et en négligeant les termes de degré supérieurs à 1, on trouve la même forme linéarisée au voisinage de ces points, soit : 
$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$
 avec  $D = d - 3a$ . Les valeurs propres vérifient l'équation caractéristique  $\lambda^2 - D\lambda + b = 0$ . La nature des points fixes dépend du discriminant  $\Delta' = D^2 - 4b$  et des valeurs absolues ou des modules des valeurs propres.

3) Traiter les cas où  $b = 0,2$  et  $d$  variant de 2,3 à 2,8. Visualiser sur ordinateur l'attracteur éventuel, le ou les bassins d'attraction, ainsi que les courbes stable et instable du point  $O$ .

On constate que  $a = d - 1,2 > 0$ , ce qui donne comme points fixes le point hyperbolique  $O$  et les deux points  $(\pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{a})$ . Avec les notations utilisées précédemment, lorsque  $d$  va de 2,3 à 2,8,  $D$  varie de  $-1$  à  $-2$  et le discriminant  $\Delta'$  reste positif, d'où l'existence de deux valeurs propres réelles pour ces deux points fixes, toutes deux négatives. Plus précisément on vérifie que  $f(-1) = 1 + D - b$  passe du négatif au positif. Les deux valeurs propres commencent par être toutes deux inférieures à 1 en valeur absolue, puis elles passent de part et d'autre de 1. Les deux points commencent par être des puits attracteurs puis deviennent hyperboliques repousseurs. Cela correspond à ce que l'on observe expérimentalement. L'attracteur des trajectoires est d'abord formé des deux points fixes, puis devient un conglomérat de points, puis il est formé de deux branches courbes, et devient finalement une courbe feuilletée d'un seul tenant, avant de disparaître pour  $d = 2,8$  (figure 25). Ici encore la courbe stable du point  $O$  constitue la frontière entre les deux bassins d'attraction et une partie de la courbe instable se colle sur l'attracteur. Les courbes stable et instable commencent par ne pas se couper, puis elles se coupent lorsque  $d$  dépasse 2,6. Le passage de l'attracteur à deux branches à l'attracteur à une branche a lieu pour  $d = 2,7477$ , ce qui constitue une crise, et cela a lieu lorsque la courbe stable traverse l'attracteur, celui-ci venant alors se coller sur toute la courbe instable.

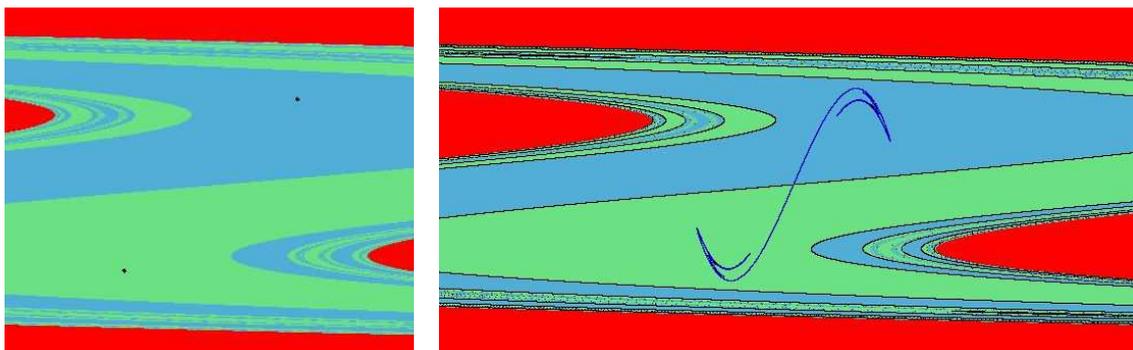


Figure 25-a :  $d = 2,4$ . A gauche l'attracteur formé des deux points fixes et les bassins d'attraction de ces deux points en bleu pâle et en vert (les points rouges ont leur trajectoire qui s'en va à l'infini). A droite la courbe instable du point  $O$  hyperbolique en bleu, joignant les deux autres points fixes, et la courbe stable en noir qui se colle sur la frontière des deux bassins d'attraction.

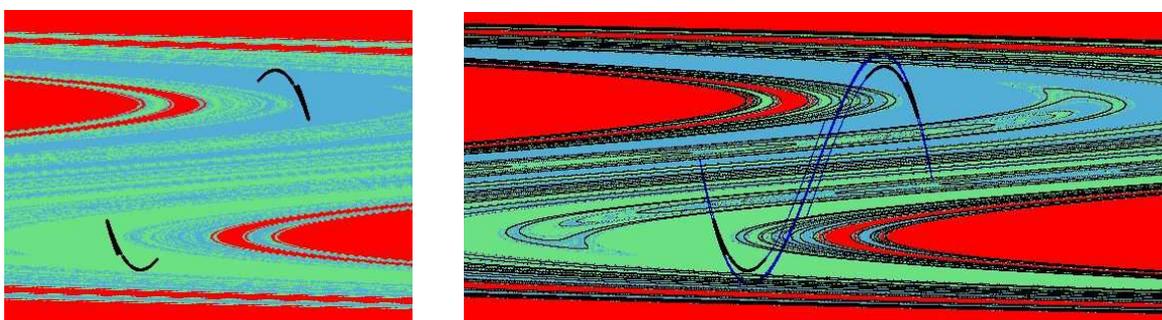


Figure 25-b :  $d = 2,7$ . A gauche l'attracteur à deux branches et les bassins d'attraction de chaque branche. A droite les courbes stable et instable du point  $O$ , en noir et en bleu.

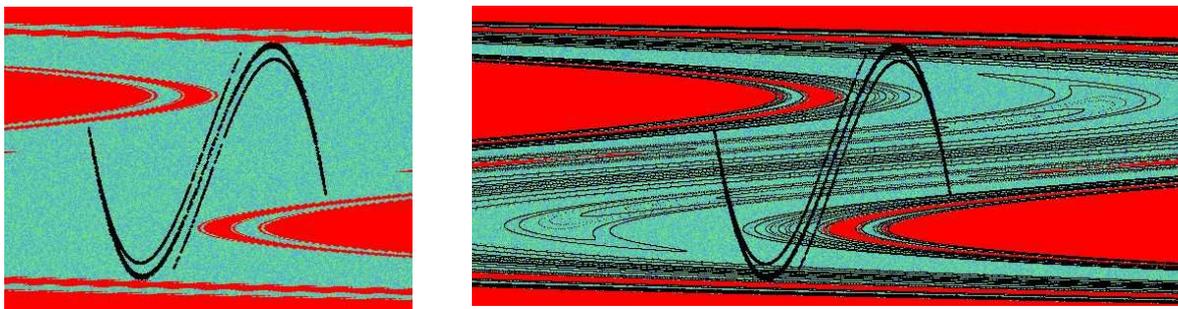


Figure 25-c :  $d = 2,75$ . A gauche l'attracteur à une seule branche et son bassin d'attraction en bleu-vert. A droite les courbes instable et stable du point  $O$  en noir, la courbe instable se développant dans le bassin d'attraction, et la courbe stable plaquée sur l'attracteur.

Programme :

```

/***** bassins d'attraction *****/
for(xe=10;xe<790;xe++) for(ye=10;ye<590;ye++)
{ x0=(float)(xe-xorig)/zoom;y0=(float)(yorig-ye)/zoom;
  x=x0;y=y0;
  for(i=0;i<500;i++)
  { oldx=x;x=y;y=-b*oldx+d*y-y*y*y;
    if (x<-5 || x>5. || y<-5. || y>5.) { putpixel(xe,ye,red);break;}
    if (x<0.)putpixel(xe,ye,coleur[1]); else putpixel(xe,ye,coleur[2]);
  }
}

```

```

}
SDL_Flip(screen);

delta=d*d-4.*b; vp1=0.5*(d+sqrt(delta)); vp2=0.5*(d-sqrt(delta)); /* valeurs propres de O */

/***** courbe instable de O *****/
/* on utilise l'application inverse: x = (dx'-y'-x'^3)/b, y = x' */
for(x0=0.0001;x0<0.01;x0+=0.00001)
{
y0=vp1*x0;
x=x0;y=y0;
for(i=0;i<10000;i++)
{
oldx=x;x=y;y=-b*oldx+d*y-y*y*y; xe=xorig+zoom*x;ye=yorig-zoom*y;
if (x>-5 && x<5. && y>-5. && y<5.) putpixel(xe,ye,blue);
else break;
}
}
for(x0=-0.0001;x0>-0.01;x0-=0.00001)
{ y0=vp1*x0;
x=x0;y=y0;
for(i=0;i<10000;i++)
{ oldx=x;x=y;y=-b*oldx+d*y-y*y*y; xe=xorig+zoom*x;ye=yorig-zoom*y;
if (x>-5 && x<5. && y>-5. && y<5.) putpixel(xe,ye,blue);
else break;
}
}
SDL_Flip(screen);
/***** courbe stable de O *****/
for(x0=0.00001;x0<0.005;x0+=0.000000001)
{ y0=vp2*x0; x=x0;y=y0;
for(i=0;i<10000;i++)
{ oldy=y;y=x;x=(d*x-x*x*x-oldy)/b; xe=xorig+zoom*x; ye=yorig-zoom*y;
if (xe>10 && xe<790 && ye>10 && ye<590) putpixel(xe,ye,black);
else break;
}
}
for(x0=-0.00001;x0>-0.005;x0-=0.000000001)
{ y0=vp2*x0; x=x0;y=y0;
for(i=0;i<10000;i++)
{ oldy=y;y=x;x=(d*x-x*x*x-oldy)/b; xe=xorig+zoom*x;ye=yorig-zoom*y;
if (xe>10 && xe<790 && ye>10 && ye<590) putpixel(xe,ye,black);
else break;
}
}
SDL_Flip(screen);
/***** attracteur *****/
for(x0=-3;x0<3.;x0+=0.2) for(y0=-1.;y0<1.;y0+=0.2)
{ x=x0;y=y0;
for(i=0; i<1000;i++)
{ oldx=x;x=y;y=-b*oldx+d*y-y*y*y; xe=xorig+zoom*x;ye=yorig-zoom*y;
if (x<-5 || x>5. || y<-5. || y>5.) break;
if (i>900) {filldisc(xe,ye,1,black);}
}
}
}

```

#### 4) Traiter le cas où $a < 0$ .

Lorsque  $a$  est négatif, le discriminant  $\Delta = d^2 - 4b$  peut être positif ou négatif.

\* S'il est négatif, le point  $O$  est un centre.

\* S'il est positif, il existe deux valeurs propres réelles, et comme  $f(1) = -a > 0$ , le nombre 1 est en dehors de l'intervalle des racines de  $f(x) = x^2 - dx + b$ . Comme le centre de cet intervalle est  $d/2$ , on en déduit que pour  $d/2 > 1$ , les deux valeurs propres sont toutes deux supérieures à 1, et le point  $O$  est une source, tandis que pour  $d/2 < 1$ , elles sont toutes deux inférieures à 1 et positives, le point  $O$  est attracteur.

5) Etudier expérimentalement le cas où  $b = 1$  et  $d$  variable.

Remarquons qu'au voisinage des points fixes, le déterminant des matrices précédemment trouvées est égal à 1. On est dans le cas où l'application conserve les aires et l'orientation. Il n'y a pas d'attracteur pour les trajectoires. D'autre part  $a = d - 2$ , on distingue deux cas :

\* pour  $d < 2$ ,  $a < 0$ , et  $\Delta = d^2 - 4b = d^2 - 4 < 0$ , le point  $O$  est un centre, avec des trajectoires de forme elliptique autour de lui (figure 26).

\* pour  $d > 2$ ,  $a > 0$ , le point  $O$  est hyperbolique, et il existe deux autres points fixes (car  $\Delta' = D^2 - 4b > 0$  pour  $d > 2$ ), et l'on constate expérimentalement qu'il s'agit de centres (figure 27 à gauche). Lorsque  $d$  augmente, les courbes stable et instable du point hyperbolique  $O$  ont d'abord une forme de huit, puis elles s'épaississent pour donner une sorte de bobine de fil en forme de huit, puis elles se détachent de plus en plus en prenant des formes zigzagantes dans deux directions orthogonales (figure 27 à droite).

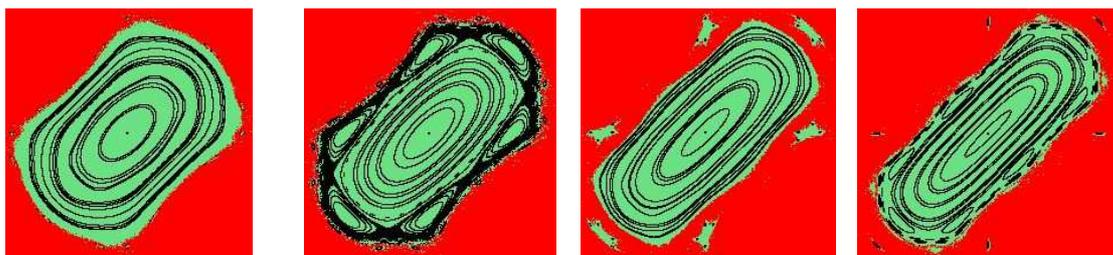
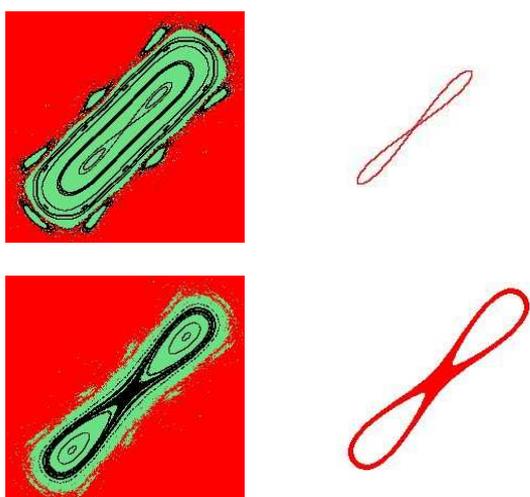


Figure 26 : pour  $d < 2$ , le point  $O$  est un centre. De gauche à droite,  $d = 1,2$ ,  $d = 1,5$ ,  $d = 1,8$ ,  $d = 1,95$  avec en vert le bassin d'attraction



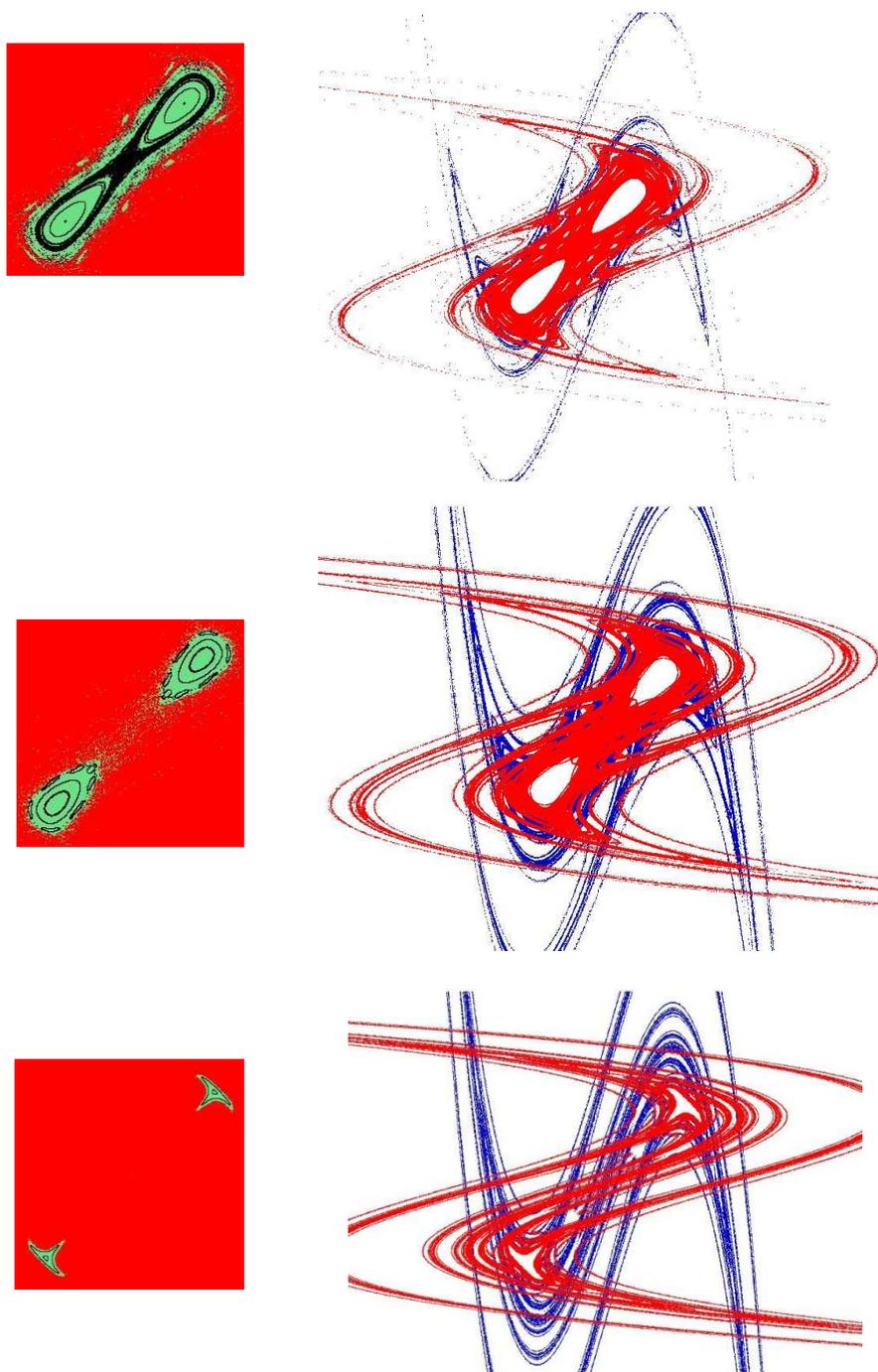


Figure 27 : pour  $d > 2$ , le point  $O$  est hyperbolique. A gauche le bassin d'attraction (en vert) des deux points fixes qui sont des centres, à droite les courbes stable (en rouge) et instable (en bleu) du point  $O$ , pour les valeurs successives de  $d$  :  $d = 2,1$ ,  $d = 2,32$ ,  $d = 2,35$ ,  $d = 2,5$ ,  $d = 3,4$ . Les deux courbes sont confondues pour  $d = 2,1$  avec une forme en huit, puis s'épaississent pour ressembler à une bobine de fil, puis se séparent progressivement.

### Exercice 12 : Une variante de l'application standard<sup>9</sup>

Considérons l'application telle que :

$$\begin{cases} x' = x + y \quad [2\pi] \\ y' = 0,5y - k \cos(x + y) \end{cases} \quad \text{avec } k \text{ donné } > 1$$

<sup>9</sup> L'application standard sera étudiée plus tard (voir exercice 13).

1) Déterminer les points fixes dans la zone où  $y$  est compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

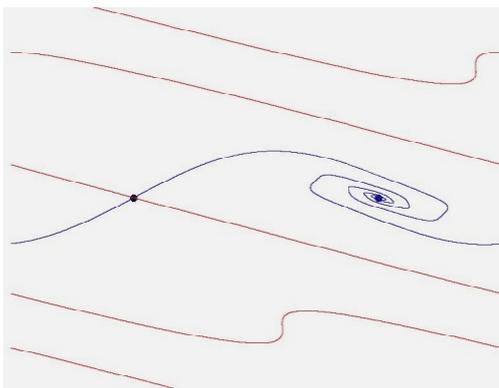
Un point fixe  $(x, y)$  vérifie  $x = x + y [2\pi]$ , ce qui donne  $y = 0$  pour  $y$  compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ , ce qui entraîne  $\cos x = 0$ , soit  $x = \pi/2$  ou  $x = 3\pi/2$  avec  $y = 0$ . IL y a deux points fixes.

2) Montrer que l'un des points fixes est hyperbolique, et faire le programme pour visualiser ses courbes stable et instable.

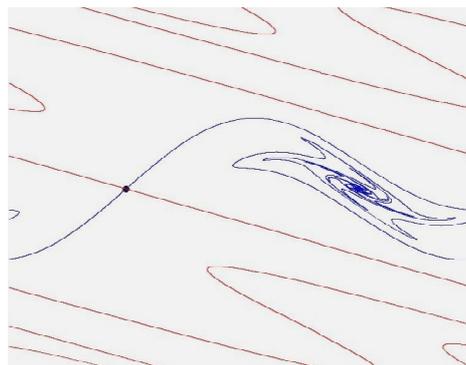
Prenons le point  $(\pi/2, 0)$ , et prenons ce point comme origine d'un nouveau repère, avec la formule de passage :  $x = \pi/2 + X$  et  $y = Y$  (et de même pour  $x'$  et  $y'$ ). L'application s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} X' = X + Y [2\pi] \\ Y' = 0,5Y + k \sin(X + Y) \end{cases} \quad \text{d'où sa forme linéarisée} \quad \begin{cases} X' = X + Y [2\pi] \\ Y' = kX + (0,5 + k)Y \end{cases}$$

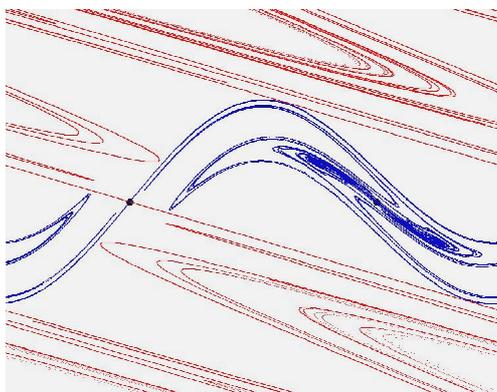
L'équation caractéristique est  $\lambda^2 - (1,5 + k)\lambda + 0,5$ , dont le discriminant  $\Delta = k^2 + 3k + 0,25$  est positif (rappelons que  $k > 1$ ). Il existe toujours deux valeurs propres réelles  $\lambda = 0,5 (1,5 + k \pm \sqrt{\Delta})$ , qui sont toutes deux positives (grâce à la somme et au produit des racines). D'autre part le trinôme  $f(x) = x^2 - (1,5 + k)x + 0,5$  est tel que  $f(1) = -k < 0$ , ce qui entraîne que les deux valeurs propres sont de part et d'autre de 1. Cela prouve que le point fixe  $(\pi/2, 0)$  est hyperbolique, ses vecteurs propres étant sur les droites de pente  $\lambda - 1$ . Ces renseignements permettent de tracer les courbes stable et instable de ce point (*figure 28*). Notons que l'application inverse, indispensable pour tracer la courbe stable est telle que  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  avec :  $y' = 2(y + k \cos x)$  et  $x' = x - y' [2\pi]$ .



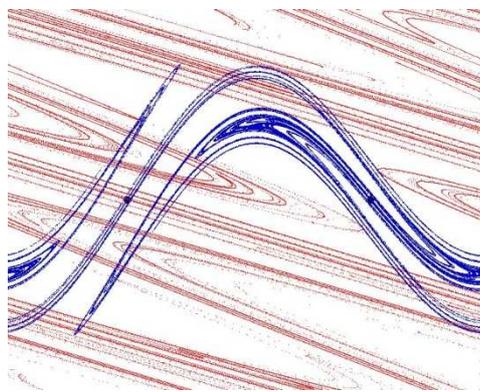
$k = 1,3$



$k = 2,3$



$k = 3,3$



$k = 4,3$

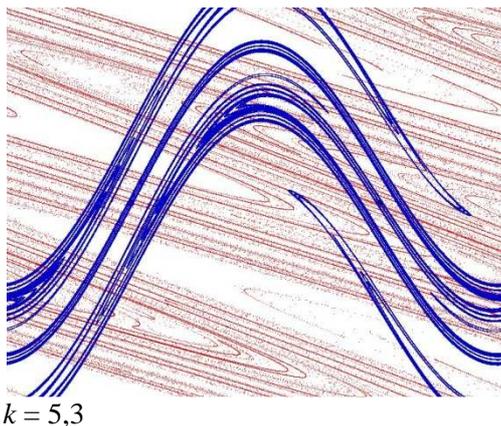


Figure 28 : Courbe stable en rouge et courbe instable en bleu du point fixe  $(\pi/2, 0)$

3) Etudier l'autre point fixe. Vérifier qu'il change de nature de part et d'autre de  $k = 3$  et visualiser ses courbes stable et instable lorsqu'il est hyperbolique.

Par linéarisation au voisinage du point fixe  $(3\pi/2, 0)$ , l'application devient :

$$\begin{cases} X' = X + Y \\ Y' = -kX + (0,5 - k)Y \end{cases}$$

L'équation caractéristique est  $g(\lambda) = 0$  avec  $g(x) = x^2 - (1,5 - k)x + 0,5$ . Son discriminant est  $\Delta = k^2 - 3k + 0,25$ . Avec  $k > 1$ , il est négatif pour  $k < 2,9$  et positif pour  $k > 2,9$ .

\* Pour  $k < 2,9$ , les deux valeurs propres sont complexes conjuguées, de module  $1/2$ . Le point fixe est un puits attracteur, le mouvement se faisant en spirale autour de lui. On peut le vérifier sur la figure 28 pour  $k = 1,3$  et  $k = 2,3$ , où la courbe instable du premier point fixe  $(\pi/2, 0)$  vient s'enrouler autour de lui.

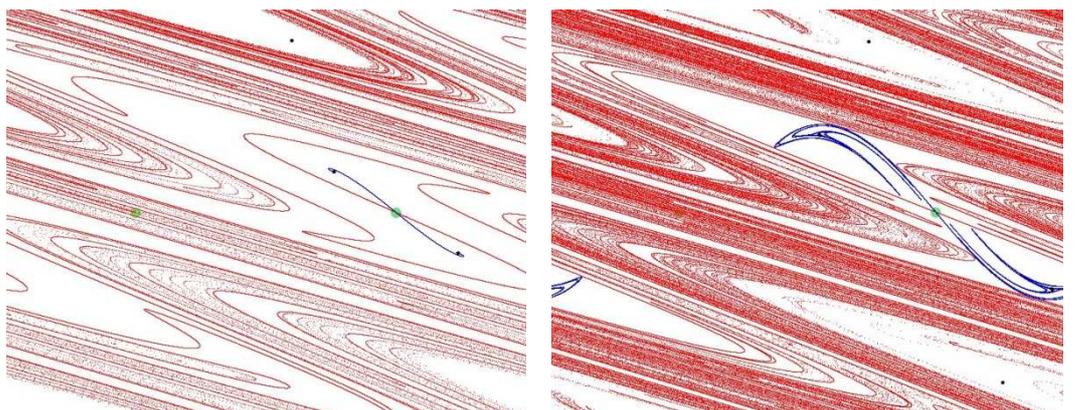
\* Pour  $k > 2,9$ , les valeurs propres sont réelles, soit  $\lambda = 0,5(1,5 - k \pm \sqrt{\Delta})$ . Elles sont de même signe. La valeur propre négative la plus grande en valeur absolue a sa valeur absolue qui augmente avec  $k$ , atteignant 1 pour  $k = 3$ .

- Lorsque  $k$  va de 2,9 à 3, on a toujours un puits attracteur, les deux valeurs propres étant toutes deux inférieures à 1 en valeur absolue.

- Pour  $k > 3$ , la valeur propre a sa valeur absolue qui devient supérieure à 1, tandis que l'autre a sa valeur absolue qui reste inférieure à 1. Le point fixe est dorénavant hyperbolique, et l'on peut tracer ses courbes stable et instable (figure 29).

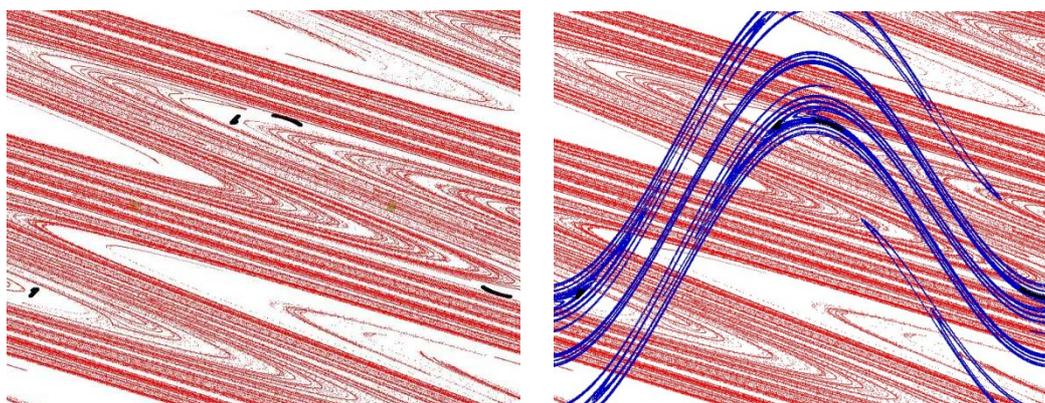
4) Préciser expérimentalement ce qui se passe lorsque  $k$  augmente au-delà de 3, et faire ressortir le phénomène de crise.

Comme on l'a vu, lorsque  $k$  passe la frontière  $k = 3$ , le point fixe  $(3\pi/2, 0)$  devient instable, et l'on constate que sa courbe instable converge vers un cycle de deux points fixes stables. Puis lorsque  $k$  augmente, on assiste à un processus de bifurcations et de dédoublements, pour aboutir à la formation d'un attracteur chaotique feuilleté. Le phénomène de crise apparaît lorsque l'attracteur formé de quelques petits traits courbes (voir figure 29 pour  $k = 5,035$ ) se transforme brutalement en un attracteur feuilleté beaucoup plus grand (comme pour  $k = 5,3$ ). La crise se produit pour  $k$  de l'ordre de 5,036. Lorsque les petits morceaux de l'attracteur grandissent et coupent la courbe stable, l'attracteur vient se coller sur toute la courbe instable.

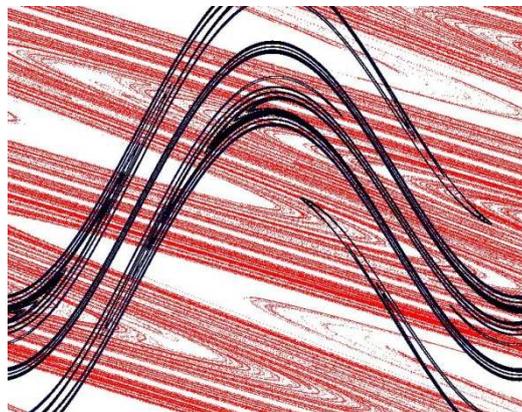


$k = 3,3$

$k = 4,3$



$k = 5,035$  (à gauche attracteur en noir et courbe stable, à droite courbe instable en plus)



$k = 5,3$

Figure 29 : Courbe stable en rouge et courbe instable en bleu du point hyperbolique  $(3\pi/2, 0)$ , avec le développement de l'attracteur en noir

## 7) Guirlande de points elliptiques et hyperboliques, et théorème KAM

Nous avons déjà rencontré ce genre de phénomènes avec la bijection de Hénon. Cela se généralise aux bijections qui conservent les aires et l'orientation, c'est-à-dire celles dont le déterminant de la matrice jacobienne vaut 1. On a vu que de telles applications peuvent posséder des points elliptiques

(centres) ou des points hyperboliques (selles). Tout cela va maintenant être précisé sur l'exemple de ce que l'on appelle l'application standard.<sup>10</sup>

### Exercice 13 : Application standard

Il s'agit de la fonction  $f$  faisant passer du point  $(r, t)$  au point  $(r', t')$  par :

$$\begin{cases} r' = r + k \sin t & [2\pi] \\ t' = t + r' & [2\pi] \end{cases}$$

Elle peut être visualisée en coordonnées polaires, ou en coordonnées toriques (ou cycliques) dans le repère  $t, r$ , les points  $(t, r)$  étant ramenés dans un carré de côté  $2\pi$  à cause du modulo.

1) Vérifier qu'il s'agit d'une application conservant les aires et l'orientation, et déterminer ses points fixes éventuels.

Prenons la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \partial t' / \partial t & \partial t' / \partial r \\ \partial r' / \partial t & \partial r' / \partial r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + k \cos t & 1 \\ k \cos t & 1 \end{pmatrix} \text{ dont le déterminant est toujours égal à } 1.$$

Lorsque  $k$  est nul, tous les points sont fixes. Mais pour  $k$  différent de 0, en faisant  $r' = r$  et  $t' = t$ , on trouve  $r = 0$ . L'origine  $O$  est le seul point fixe, et il s'agit d'un centre.

2) Traiter le cas particulier où  $k = 0$ , en coordonnées toriques. Vérifier que les trajectoires sous l'effet répété de  $f$ , à partir des points initiaux  $(0, r_0)$  sont sur des lignes horizontales avec  $r = r_0$ , formées de points régulièrement espacés si  $r_0$  est une fraction de  $2\pi$  ou de tout un segment si  $r_0/2\pi$  est un nombre irrationnel.

Puisque  $r' = r$ , l'ordonnée  $r$  reste constamment égale à  $r_0$ , tandis que  $t$  suit une progression arithmétique modulaire de raison  $r_0$ . Lorsque  $r_0/2\pi$  est un nombre rationnel (une fraction d'entiers), la trajectoire est formée d'une succession de points régulièrement espacés, finissant par repasser là où elle est déjà passée. Par contre, si l'on a un nombre irrationnel, les points occupent de façon dense un segment horizontal.

3) Programmer pour obtenir des trajectoires dans le repère torique pour  $k$  donné, en faisant évoluer  $k$  à partir de 0.

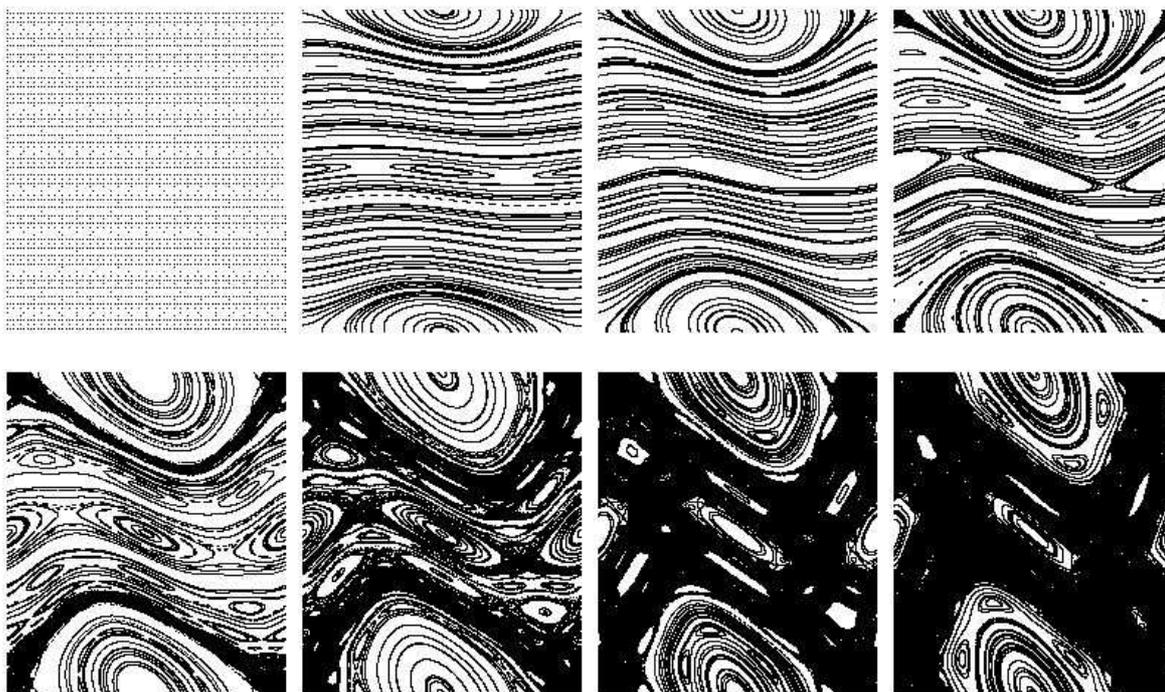
```
k=0.;
for(j=0;j<8;j++) /* huit étapes, à partir de k = 0, k augmentant de 0,2 à chaque étape */
{ t=0.;
  for (ii=0;ii<=80;ii++)
  { r=(double)ii*deuxpi/80.; /* il s'agit de r0 initial */
    for(i=0;i<5000;i++) /* trajectoire à partir du point (0, r0) */
    { r+=k*sin(t); while(r<0.) r+=deuxpi;while(r>deuxpi) r-=deuxpi;
      t+=r; ;while (t>deuxpi) t-=deuxpi; while(t<0.) t+=deuxpi;
      putpixel(5+30.*t+200.*(j%4), 5+35.*r+247.*((j/4)%2),black);
    }
  }
  SDL_Flip(screen);
  k+=0.2;
}
```

Lorsque  $k$  augmente, on constate que les trajectoires, rectilignes au départ pour  $k = 0$ , commencent par se courber, puis viennent s'ajouter des trajectoires de forme ovale. Entre celles-ci s'intercalent des

<sup>10</sup> Cette fonction, baptisée ainsi par E. Chirikov en 1979, doit son nom au fait qu'elle peut modéliser de nombreux phénomènes : rebonds d'une balle sur une plaque vibrante, chaîne linéaire d'atomes placés dans un champ de force périodique, systèmes magnétiques utilisés dans la fusion du plasma, etc.

points hyperboliques, formant une guirlande de points elliptiques et hyperboliques. Puis apparaissent des zones chaotiques où les trajectoires se dispersent. Finalement quelques îlots de stabilité subsistent dans une mer de chaos (*figure 30*).

Plus précisément, lorsque  $k$  augmente légèrement à partir de 0, on constate que les trajectoires rectilignes au départ, se transforment en lignes courbes, puis certaines sont remplacées par une guirlande de points elliptiques et hyperboliques. Les lignes courbes qui se maintiennent, signe de stabilité du système sous l'effet de faibles perturbations, sont appelées courbes de KAM, du nom des trois auteurs d'un théorème remarquable à ce sujet : Kolmogorov, Arnold, Moser. Par contre, quand ces courbes laissent place à des formes elliptiques, ou pire encore à des surfaces chaotiques, on dit qu'il y a destruction des courbes de KAM. C'est là qu'apparaissent les guirlandes de points elliptiques et hyperboliques en alternance.



*Figure 30* : Trajectoires obtenues pour huit valeurs successives de  $k$ , à partir de  $k = 0$ ,  $k$  augmentant de 0,2 à chaque étape

Commençons par reprendre le cas simple où  $k = 0$ , en nous plaçant maintenant en coordonnées polaires,  $r$  correspondant au rayon vecteur, et  $t$  étant l'angle avec l'axe horizontal. Prenons un cercle dont le rayon  $R$  est une fraction de  $2\pi$  :  $R = (m/n) 2\pi$ . Il est clair que tout point de ce cercle a les points de sa trajectoire situés sur le cercle et retombe sur lui-même au bout de  $n$  itérations de la fonction standard. Autrement dit, tout point de ce cercle est invariant sous l'effet de  $f^n$ . Par contre, tout point voisin de ce cercle et situé à l'extérieur ne revient pas sur lui-même au bout de  $n$  itérations, il s'est déplacé dans le sens direct, puisque  $t$  varie un peu plus dans ce cas. D'autre part, tout point voisin du cercle et situé à l'intérieur se déplace, lui, dans le sens contraire (indirect, le sens des aiguilles d'une montre) sous l'effet de  $f^n$  (*figure 31*). Il n'y a plus de point fixe dans un petit voisinage entourant le cercle de rayon  $R$ .

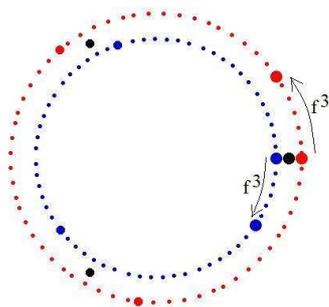


Figure 31 : Trois trajectoires à partir de points avec  $t = 0$  : en noir celle d'un point situé sur le cercle de rayon  $R = (1/3) 2\pi$ , puis en rouge celle d'un point voisin extérieur, et en bleu celle d'un point voisin intérieur

Donnons maintenant à  $k$  une valeur non nulle mais voisine de 0. Le cercle précédent de rayon  $R$  n'est plus préservé par  $f^n$ . Mais dans un petit voisinage, on peut admettre que par continuité il existe des points qui ont tendance tourner dans le sens direct, et d'autres dans le sens indirect, ce qui entraîne qu'on puisse trouver des points intermédiaires qui ne tournent pas, sous l'effet de  $f^n$ . Cela signifie que l'on a des points qui se déplacent radialement ( $r$  varie), gardant un angle  $t$  constant, pour chaque valeur de  $t$ . Ces points forment une courbe fermée  $C$  dont l'image sous l'effet de  $f^n$  est une courbe  $C'$ .

Cela peut être vérifié expérimentalement, grâce au programme suivant :

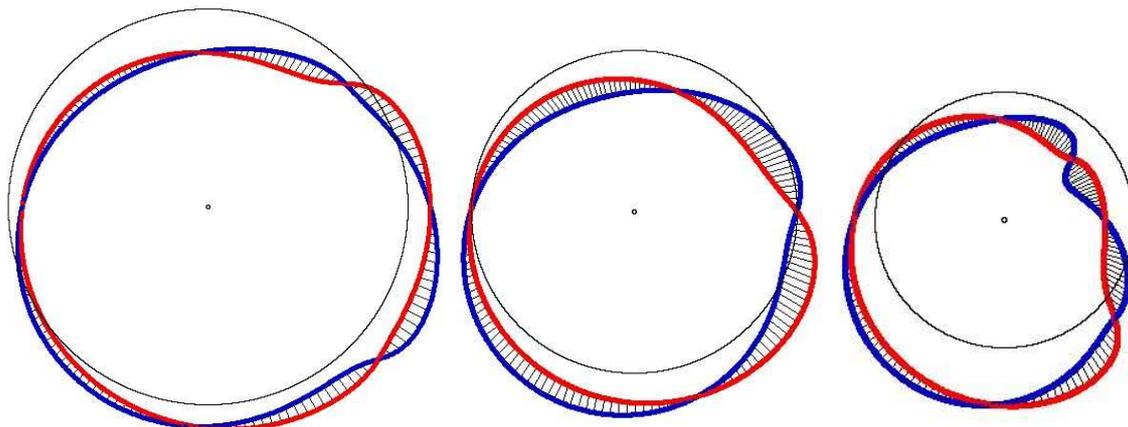
```

/* programme principal, avec notamment les variables t et newrayon déclarées en global */
rayon=deuxpi*m/n; compteur=0; /* m et n de R = (m/n) 2π sont donnés, R étant ici rayon */
k=1.4;
t=0.; chercherpoints(rayon,0.5 ); SDL_Flip(screen);pause();
for(t=0.01;t<deuxpi;t+=0.005)
chercherpoints(newrayon,0.1); /* newrayon est déclaré en global */
circle(xorig,yorig,rayon*zoom,black); circle(xorig,yorig,2,black);

/* fonction cherchant pour chaque valeur de t le point (r,t) de C et son image (rr,tt) sur C' */
void chercherpoints(float r0, float deltar)
{ double x,y, r,tt,rplus,rmoins,rr,xdiff,ydiff,tdiff;
  int i;
  compteur++;
  rplus=r0+deltar; rmoins=r0-deltar;
  for(r=rmoins;r<=rplus;r+=0.0005)
  { tt=t; rr=r;
    for(i=0;i<n;i++)
    { rr+=k*sin(tt);while(rr>=deuxpi) rr-=deuxpi;while(rr<0.) rr+=deuxpi;
      tt+=rr ; while(tt>=deuxpi) tt-=deuxpi; while (tt<0.) tt+=deuxpi;
    }
    tdiff=tt-t;
    while (tdiff<0.) tdiff+=deuxpi; while (tdiff>=deuxpi) tdiff-=deuxpi;
    if (tdiff<0.01)
    { filldisc(xorig+zoom*r*cos(t),yorig-zoom*r*sin(t),2,blue);
      filldisc(xorig+zoom*rr*cos(tt),yorig-zoom*rr*sin(tt),2,red);
      if (compteur%8==0)
      { line(xorig+zoom*r*cos(t),yorig-zoom*r*sin(t),
            xorig+zoom*rr*cos(tt),yorig-zoom*rr*sin(tt),black);
      }
    }
    newrayon=r;
    break;
  }
}
}

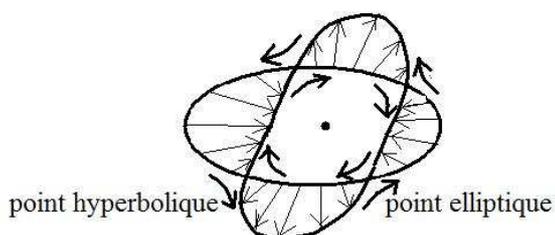
```

On se donne un cercle de rayon  $R = (m/n) 2\pi$ , dont on sait qu'il est invariant point par point pour  $k = 0$ . Puis on se donne une valeur de  $k$  voisine, ici  $k = 1,4$ , cette valeur relativement forte ayant pour but de mieux faire ressortir le phénomène. On commence par chercher un point pour  $t = 0$ , de rayon vecteur proche de  $R$ , et qui se déplace radialement sous l'effet de  $f^n$ . C'est ce que fait la fonction *chercherpoints*(rayon, 0,5), rayon étant  $R$ , et *deltar* = 0,5 indiquant qu'on cherche un point avec  $r$  compris entre  $R - 0,5$  et  $R + 0,5$ . Ce point de la courbe  $C$ , dont le rayon vecteur est enregistré dans *newrayon*, est colorié en rouge, et son image par  $f^n$  est en bleu. Puis on augmente  $t$  d'un petit pas, ici 0,005, et l'on cherche un point de  $C$  situé au voisinage du *newrayon* du point précédent, dans une faible marge de variation *deltar* = 0,1, le rayon de ce point étant mis finalement dans *newrayon*. Et l'on continue de faire varier  $t$  jusqu'à  $2\pi$ . Les résultats obtenus sont donnés sur la *figure 32*.



*Figure 32* : La courbe  $C$  en rouge et son image  $C'$  en bleu, avec en arrière plan le cercle de rayon  $R = (m/n) 2\pi$  en noir, pour  $k = 2/3, 1/2$  et  $1/3$  de gauche à droite. Le passage d'un point à son image est dessiné sous la forme d'un petit trait radial en noir.

Que constate-t-on ? Comme l'application standard conserve les aires et l'orientation, les courbes  $C$  et  $C'$  doivent se couper, et les surfaces comprises entre les deux s'égalisent de part et d'autre. Cela donne un nombre pair de points d'intersection, qui sont des points fixes pour  $f^n$  (nous ne prenons pas en considération le cas exceptionnel où les courbes seraient tangentes). De part et d'autre de chacun de ces points, le déplacement radial est de sens contraire. D'autre part, du côté extérieur, le déplacement à se faire dans le sens direct et du côté intérieur dans le sens indirect. Cela donne une alternance de points elliptiques et hyperboliques (*figure 33*).



*Figure 33* : Courbes  $C$  et  $C'$ , avec alternance de points elliptiques et hyperboliques

Plus précisément, pour l'application  $f^n$ , son nombre de points fixes est un multiple de  $2n$ , du fait qu'un point elliptique ne peut être transformé par  $f$  qu'en un point elliptique et non hyperbolique. Tous ces résultats avaient déjà été compris par H. Poincaré dans un contexte plus général.

Finalement que s'est-il passé ? Tous les cercles rationnels de rayon  $(m/n) 2\pi$  qui restaient globalement invariants sous l'effet de  $f$ , et invariants point par point sous l'effet de  $f^n$  lorsque  $k$  valait 0, ne restent plus des courbes invariantes dès que  $k$  devient différent de 0. Ils sont détruits, puisque  $f^n$  ne possède plus que des points fixes isolés, ceux-ci formant une guirlande alternée de points

hyperboliques et elliptiques. Mais pour de faibles valeurs de  $k$ , il existe des cercles irrationnels qui sont préservés et restent des courbes fermées couvertes de façon dense par les points sous l'effet de l'itération de  $f$ , ce que l'on appelle les courbes de KAM.

Ainsi des zones de stabilité demeurent autour de l'origine qui est le seul point fixe de  $f$ . Ce qui se passe autour du point fixe, centre de  $f$ , se reproduit autour des centres de  $f^n$ . A leur tour les points elliptiques de  $f^n$  développent dans leur voisinage des îlots de stabilité, tandis que les points hyperboliques avec leurs courbes stable et instable enchevêtrées provoquent le chaos. Ces points elliptiques de  $f^n$  sont à leur tour entourés de guirlandes de points elliptiques et hyperboliques associés à  $(f^n)^n$ , d'où une multitude de guirlandes se reproduisant par autosimilarité. Lorsque  $k$  augmente, les îlots stables sont tour à tour détruits, au profit d'un chaos envahissant.

La préservation de zones de stabilité lorsqu'un système censé chaotique est faiblement perturbé, se retrouve dans des domaines variés, comme dans le système solaire, tout comme dans les jeux de billard du style flipper.

## 8) Sections de Poincaré et points hyperboliques

Comme on l'a vu, les sections de Poincaré associées à une équation différentielle transforment l'écoulement continu des trajectoires en une récurrence sur des points. Ce que nous avons fait dans les exercices précédents vaut donc aussi pour les sections de Poincaré d'équations différentielles. La différence est que l'application sous-jacente, faisant passer d'un point à son successeur après un intervalle de temps  $T$ , n'est pas connue explicitement. Les points fixes, parfois nombreux, ainsi que leur nature, doivent être déterminés expérimentalement. Commençons par un cas simple.

### *Exercice 14 : Equation de Duffing*

1) Commençons par prendre sa forme la plus simple, avec l'équation différentielle :

$$x'' - x + x^3 = 0, \text{ dite équation du double tourbillon.}$$

Déterminer les courbes stable et instable du point hyperbolique  $O$  dans la section de Poincaré, et prouver qu'il s'agit bien de courbes. Programmer.

On a vu dans le chapitre précédent que l'origine  $O$  est un point fixe hyperbolique avec des vecteurs propres  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$  dans le plan de phase  $x, v$ . On sait déjà que les séparatrices issues de ce point ont une forme de huit. Si l'on prend une section de Poincaré des trajectoires avec une période  $T = 2\pi$  par exemple, les points situés au voisinage de  $O$  sur le vecteur propre dilatant  $(1, 1)$  vont donner des trajectoires dont la section de Poincaré se retrouve toujours sur ce huit. Il en est de même si l'on part de points sur le vecteur contractant  $(1, -1)$  à condition d'aller en marche arrière grâce à une variation  $dt$  du temps négative.

Comme l'on sait calculer l'équation de ce huit, grâce à la fonction potentiel  $U = x^4/4 - x^2/2$ , on a la confirmation que les points convergeant en marche avant ou en marche arrière vers le point  $O$  forment bien une courbe (*figure 34*).

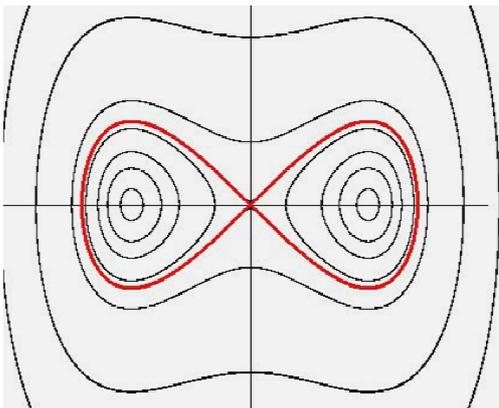


Figure 34 : Courbes stable et instable de  $O$  en rouge, confondues avec les séparatrices du double tourbillon.

2) Rajouter maintenant un petit frottement, en prenant l'équation différentielle :

$x'' + 0,1x' - x + x^3 = 0$ . Le point  $O$  reste un point fixe hyperbolique, et l'on connaît la forme des trajectoires, avec la présence de deux points attracteurs en spirale, dans le plan  $x, v$ . Prendre une section de Poincaré avec  $T = 2\pi$ , et visualiser les courbes stable et instable issues du point  $O$ . Que constate-t-on ?

Tout point du plan a une trajectoire qui est attirée vers l'un ou l'autre des deux puits, ce qui donne deux bassins d'attraction. La courbe instable du point  $O$  vient elle aussi s'enrouler sur chacun de ces points, tandis que la courbe instable se plaque sur la frontière séparant les deux bassins d'attraction (figure 35).

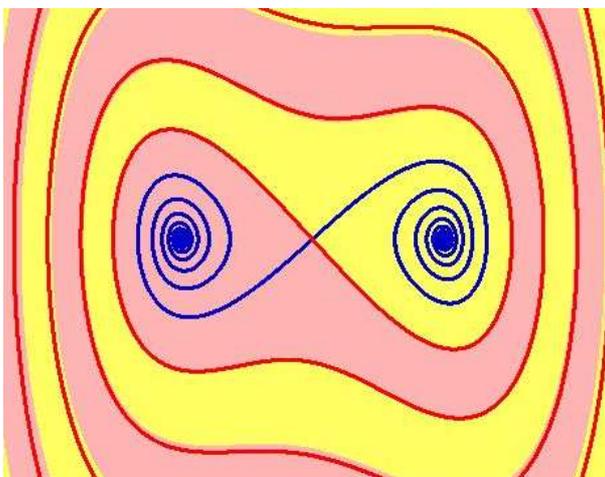


Figure 35 : Courbe instable du point origine en bleu, et courbe stable en rouge, avec en arrière plan les deux bassins d'attraction en jaune et en rouge pâle

Le programme donnant la courbe instable est la suivant :

```
for(x0=0.0001;x0<0.09;x0+=0.0001)
{ x=x0;v=x0;dt=0.001; u=0.; vu=0.5;
  for(i=0;i<50000;i++)
  { dv=(x-r*v-x*x*x)*dt;dx=0.5*(2.*v+dv)*dt; x+=dx;v+=dv;
    oldu=u;dvu=-4.*u*dt;du=0.5*(2.*vu+dvu)*dt;u+=du;vu+=dvu;
    if (oldu*u<0.)
    { xe=xorig+zoom*x;ye=yorig-zoom*v;
      if (xe>0 && xe<800 && ye>0 && ye<600)
        filldisc(xe,ye,1,blue);
    }
  }
}
```

}  
 puis on fait de même avec  $x_0$  de  $-0,0001$  à  $-0,09$ .  
 Puis on recommence pour la courbe stable en prenant  $dt = -0,001$ .

3) Rajouter enfin un forçage périodique, en prenant l'équation différentielle :  
 $x'' + 0,2x' - x + x^3 = \gamma \cos(1,2t)$  avec  $\gamma = 0,1$  puis  $\gamma = 0,25$ . On s'intéresse à la section de Poincaré dans le temps avec  $T = 2\pi / 1,2$ . Commencer par déterminer expérimentalement le point hyperbolique qui n'est plus exactement  $O$ , ainsi que ses directions propres. Puis tracer les courbes stable et instable.

Les résultats sont donnés sur la figure 36.

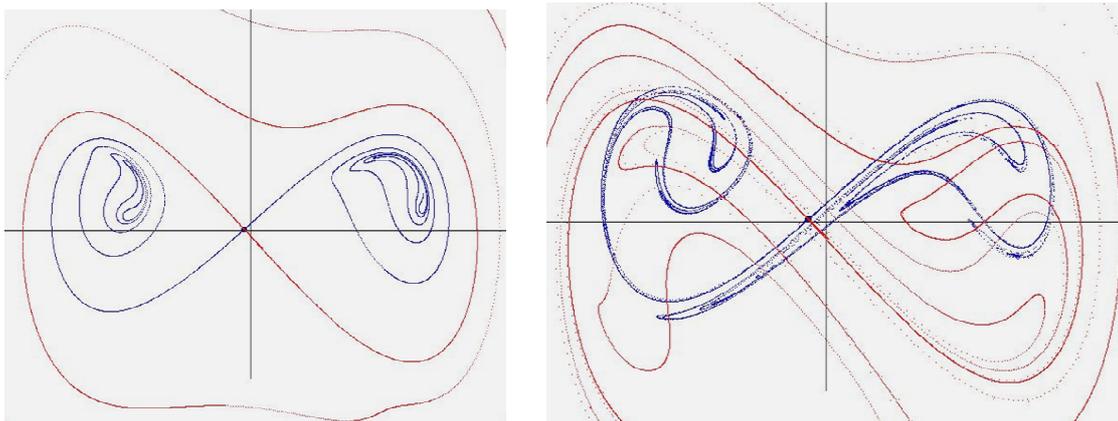


Figure 36 : Courbe stable en rouge et instable en bleu du point hyperbolique, pour un forçage  $\gamma = 0,1$  à gauche et  $\gamma = 0,25$  à droite

### Exercice 15 : Pendule amorti et forcé

Il s'agit de l'équation différentielle  $x'' + 0,2x + \sin x = 2,5 \cos t$ , et l'on s'intéresse aux sections de Poincaré dans le temps avec  $T = 2\pi$ . Déterminer expérimentalement les courbes stable et instable de son point fixe hyperbolique.

On obtient le résultat donné sur la figure 37.

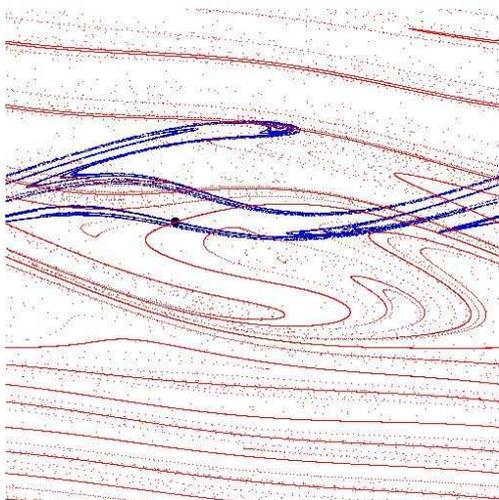


Figure 37 : Courbes stable et instable du pendule amorti et forcé.

### Exemple 3 : Billard circulaire, style flipper

On dispose d'un billard de forme circulaire, avec un disque supplémentaire à l'intérieur, où la boule peut aussi rebondir. Le grand cercle a pour rayon  $R = 1$ , et le petit a pour rayon  $r$ , par exemple  $r = 0,5$ . La boule de billard est lancée à partir d'un point de la bordure, ici le point  $(1, 0)$ , avec un certain angle : dans le programme, on se donne la pente initiale de la ligne que va parcourir la boule.

Supposons d'abord les deux cercles concentriques. Deux cas se présentent.

Dans le premier cas, l'angle de départ est tel que le petit cercle n'est pas touché, la boule ne cesse de rebondir sur le grand cercle, toujours avec le même angle de rebond, et sa trajectoire est soit une ligne polygonale fermée lorsque l'angle est une fraction de  $2\pi$ , soit une ligne polygonale infinie dans le cas d'un angle irrationnel (*figure 38*).

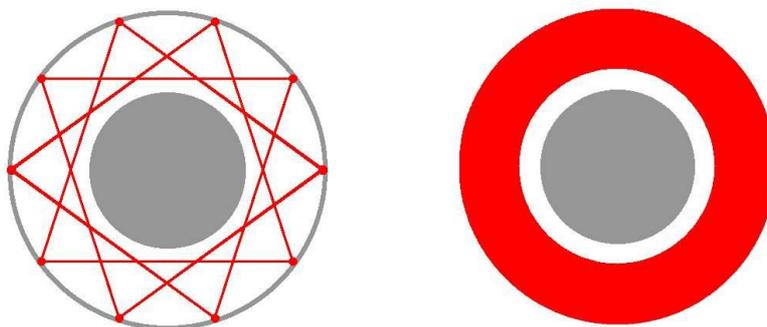
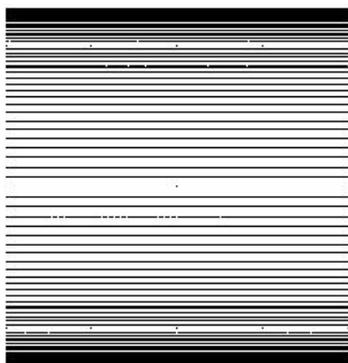


Figure 38 : à gauche la boule est lancée au point  $(1, 0)$  avec un angle initial de  $\pi/5$  (angle avec l'horizontale), ce qui donne une trajectoire en forme de décagone étoilé; à droite, l'angle initial n'est pas une fraction de  $2\pi$ , et la trajectoire remplit une couronne circulaire.

Chaque point de rebond sur le grand cercle a pour coordonnées  $(\cos\theta, \sin\theta)$ , sa position étant caractérisée par cet angle  $\theta$ . En ce même point, appelons  $\varphi$  l'angle que fait la trajectoire avec la bordure du grand cercle. Si l'on place les points de coordonnées  $(\theta, \varphi)$  dans le repère  $\theta, \varphi$ , et cela pour un grand nombre de rebonds successifs au cours d'une trajectoire de la boule, l'angle  $\varphi$  reste constant, tandis que l'angle  $\theta$  augmente d'une quantité constante d'un rebond au suivant (modulo  $2\pi$ ), et l'on obtient une succession de points sur une horizontale, ceux-ci pouvant couvrir un segment dans le cas d'un angle irrationnel. Il en est ainsi chaque fois que l'on prend une trajectoire de rebonds à partir d'un angle initial. Ces trajectoires donnent des traits horizontaux dans le repère  $\theta, \varphi$ .

Dans le deuxième cas, où l'angle initial est tel que le petit cercle est touché, le petit cercle et le grand cercle sont touchés chacun à tour de rôle, et les angles de rebonds sur le grand cercle restent identiques, ainsi que ceux sur le petit cercle, pour des raisons de symétrie. Si l'on ne s'intéresse, comme précédemment, qu'au lien entre les angles  $\theta$  et  $\varphi$  correspondant aux rebonds sur le grand cercle, le dessin dans le repère  $\theta, \varphi$  donne encore une succession de points sur des lignes horizontales, une pour chaque angle initial choisi (*figure 39*).



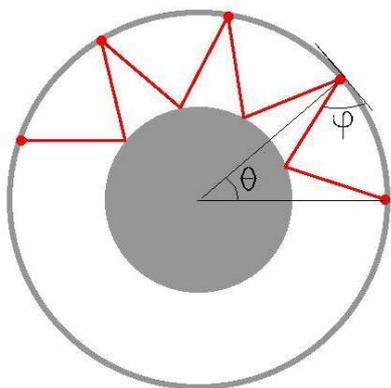


Figure 39 : A gauche, début d'une trajectoire, avec les angles  $\theta$  et  $\varphi$  obtenus lors d'un rebond sur le grand cercle; à droite, dans le repère  $\theta, \varphi$ , chaque trajectoire, à partir d'un angle initial donné, donne une succession de points  $(\theta, \varphi)$  couvrant le plus souvent une ligne horizontale.

Nous allons maintenant brouiller la régularité du dessin, en décalant le petit cercle par rapport au grand. Dans les cas extrêmes où le petit cercle n'est toujours pas touché, on obtient encore des lignes horizontales. Mais sinon, le mouvement devient chaotique, sauf autour du point central avec  $\theta = 0$  et  $\varphi = \pi/2$ ,<sup>11</sup> qui est entouré de formes ovales qui forment un îlot de stabilité autour de lui, cette zone étant de plus en plus réduite quand la distance  $d$  entre les centres des deux cercles augmente (figure 40). Ainsi conçu le billard circulaire se comporte un peu comme un flipper, avec des trajectoires devenant très sensibles aux conditions initiales.

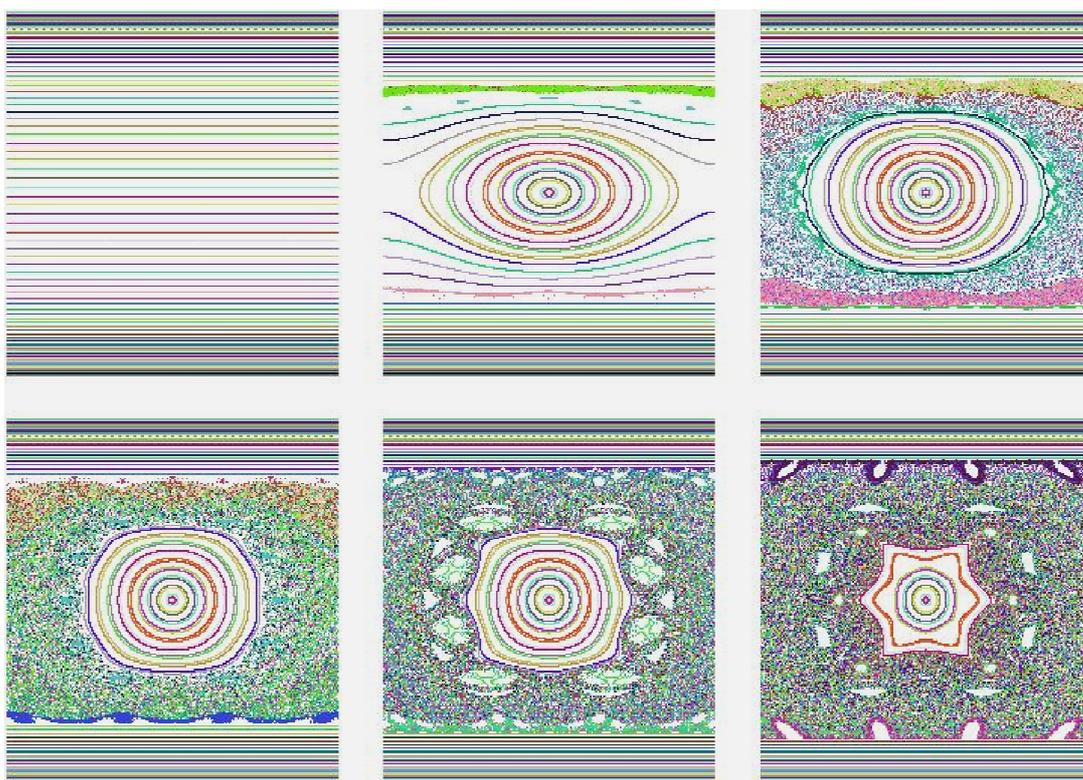


Figure 40 : Evolution des trajectoires dans le repère  $\theta, \varphi$ , lorsque la distance  $d$  entre les centres du grand et de petit cercle augmente à partir de  $d = 0$ .

Pour faire le programme correspondant, des calculs sont nécessaires. Dans le repère  $x, y$  où se trouvent les deux cercles, l'équation du grand cercle est  $x^2 + y^2 = 1$ , et pour le petit cercle dont le

<sup>11</sup> Dans ce cas spécial, la trajectoire de la boule décrit indéfiniment un segment entre le grand et le petit cercle, ce qui donne un point fixe dans le repère  $\theta, \varphi$ .

centre est en  $(d, 0)$  et le rayon  $r = 0,5$  on a l'équation  $(x - d)^2 + y^2 = 0,25$ . Supposons que l'on parte du point  $(1, 0)$  situé sur le grand cercle, suivant la direction donnée par le vecteur  $(-1, p)$  où  $p$  est la pente initiale de la trajectoire. Ce vecteur est dirigé vers l'intérieur du grand cercle et comme il a pour longueur  $L$ , on lui donne une longueur unité, ce qui donne le vecteur  $(\alpha, \beta)$  avec  $\alpha = -1 / L$  et  $\beta = p / L$ . L'objectif est de connaître l'évolution du vecteur  $\mathbf{V}(\alpha, \beta)$  juste après chaque rebond sur le grand cercle au cours d'une trajectoire, ce vecteur étant unitaire, ainsi que l'évolution du point de rebond  $(x, y)$  sur ce grand cercle. Cela nous donnera les angles  $\theta$  et  $\varphi$ .

On distingue deux cas, selon que le petit cercle est touché entretemps ou non. Pour savoir dans quel cas on se trouve, on détermine la distance du centre  $O'$   $(d, 0)$  du petit cercle à la ligne de la trajectoire, celle-ci étant déterminée par le point de rebond  $(x, y)$  et par le vecteur unité  $\mathbf{V}(\alpha, \beta)$  qui donne sa direction. L'équation de cette droite est  $\beta(X - x) - \alpha(Y - y) = 0$ , où  $(X, Y)$  désigne le point courant sur la droite. La distance de  $O'$  à cette droite est  $|\beta(d - x) + \alpha y|$ . Cette distance est notée *distance1* dans le programme.

Premier cas : le petit cercle n'est pas touché quand *distance1* est supérieure ou égale au rayon  $r$ . Pour passer d'un point de rebond au nouveau point de rebond sur le grand cercle, on prend l'intersection de la droite avec le grand cercle. Comme équation de la droite, mieux vaut prendre les équations paramétriques :  $X = x + k\alpha$ ,  $Y = y + k\beta$  avec  $k$  réel quelconque, où la position du point courant  $(X, Y)$  dépend de la valeur du paramètre  $k$ . On détermine ensuite l'intersection de cette droite avec le cercle, ce qui donne une équation du second degré en  $k$  :  $k^2 + 2(\alpha x + \beta y)k = 0$ . En éliminant la solution  $k = 0$  correspondant à l'ancien point de rebond, on trouve  $k = -2(\alpha x + \beta y)$ , d'où le nouveau point de rebond par rapport à l'ancien :  $x = x + k\alpha$ ,  $y = y + k\beta$ .

Il reste à déterminer le nouveau vecteur  $\mathbf{V}$  juste après le nouveau rebond. Un vecteur  $\mathbf{N}$  unité perpendiculaire au grand cercle en ce nouveau point de rebond  $(x, y)$  est aussi  $(x, y)$  et il est orienté vers l'extérieur. Avec l'ancien vecteur  $\mathbf{V}(\alpha, \beta)$ , celui qui arrive sur le point de rebond, le produit scalaire  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}$  est égal à  $\alpha x + \beta y$  (figure 41). Le nouveau vecteur  $\mathit{newV}(\mathit{new}\alpha, \mathit{new}\beta)$  après réflexion est tel que  $-\mathbf{V} + \mathit{newV} = -2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N}$ . En termes informatiques, par rapport à l'ancien, le nouveau vecteur  $\mathbf{V}(\alpha, \beta)$  est tel que :

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha - 2(\alpha x + \beta y)x \\ \beta &= \beta - 2(\alpha x + \beta y)y\end{aligned}$$

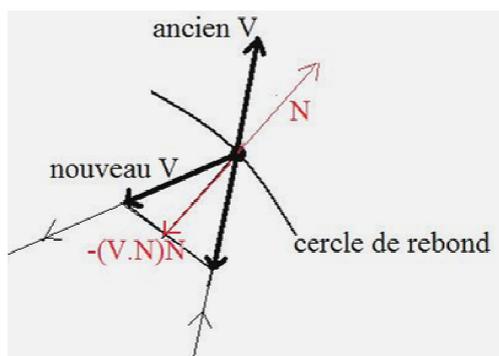


Figure 41 : Rebond sur le grand cercle, avec l'ancien vecteur  $\mathbf{V}$  de la trajectoire et le nouveau vecteur après réflexion

Ce vecteur  $\mathbf{V}$  a aussi théoriquement la longueur 1, mais pour éviter un cumul de petites erreurs après des milliers de rebonds, qui pourraient influencer sur sa longueur, mieux vaut forcer ce vecteur à la longueur unité en le divisant chaque fois par sa longueur. On en déduit aussi  $\theta$  et  $\varphi$  en faisant  $\theta = \arccos(x)$ <sup>12</sup> et  $\varphi$  tel que  $\cos\varphi = -y\alpha + x\beta$ .

<sup>12</sup> En fait la fonction inverse du cos,  $\cos^{-1}$  ou  $\arccos$  ou  $\text{Arccos}$ , ici  $\arccos(x)$ , est l'angle dont  $x$  est le cosinus. Cette fonction donne un angle compris entre 0 et  $\pi$ . Dans le cas présent, où l'angle  $\theta$  peut faire un tour complet

Deuxième cas : il y a maintenant un rebond intermédiaire sur le petit cercle. On commence par déterminer l'intersection de la droite  $X = x + k\alpha$ ,  $Y = y + k\beta$  avec le petit cercle dont on connaît l'équation. On trouve après calcul  $k = -b \pm \sqrt{\delta}$  avec  $b = \alpha x + \beta y - ad$  et  $\delta = b^2 - 1 + 2xd + r^2 - d^2$ . Les deux valeurs de  $k$  obtenues sont positives, et l'on doit choisir la plus petite pour avoir le point de rebond sur le petit cercle, d'où  $k = -b - \sqrt{\delta}$ . Le point de rebond sur le petit cercle est tel que  $x = x + k\alpha$ ,  $y = y + k\beta$ . Le vecteur  $\mathbf{N}$  unitaire normal au petit cercle a pour coordonnées  $n_x = (x - d)/r$ ,  $n_y = y/r$ , et le produit scalaire de ce vecteur avec le vecteur  $\mathbf{V}$  de la trajectoire avant le rebond est  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = \alpha n_x + \beta n_y$ . On en déduit le nouveau vecteur  $\mathbf{V}$  après rebond :

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha - 2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) n_x \\ \beta &= \beta - 2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) n_y\end{aligned}$$

Prenons maintenant la droite passant par le point  $(x, y)$  et de vecteur directeur  $\mathbf{V}$  et cherchons son intersection avec le grand cercle. Cela donne l'équation en  $k$  :

$$k^2 + 2(\alpha x + \beta y)k + x^2 + y^2 - 1 = 0, \text{ d'où } k = -b - \sqrt{\delta} \text{ avec } b = \alpha x + \beta y \text{ et } \delta = b^2 - x^2 - y^2 + 1$$

On doit choisir la valeur positive de  $k$ , soit  $k = -b + \sqrt{\delta}$ . Le nouveau point de rebond sur le grand cercle est  $x = x + k\alpha$ ,  $y = y + k\beta$ , puis on détermine le nouveau vecteur  $\mathbf{V}$  après rebond comme on l'a fait précédemment. Cela permet d'écrire le programme :

```
on se donne d, par exemple d = - 0,1
for(penteinitiale=-2.:penteinitiale<2.; penteinitiale+=0.045078987) /* plusieurs trajectoires */
{
  x=1.; y=0.; /* on part sur le grand cercle */
  longvect=sqrt(1.+penteinitiale*penteinitiale);
  alpha=-1./longvect; beta=penteinitiale/longvect;

  for(i=0; i<2500; i++) /* nombre des rebonds pour chaque trajectoire */
  { /* on est toujours sur le grand cercle */
    distanceI=fabs(alpha*y-beta*(-d+x));
    if (distanceI<r) /* rebond sur le petit cercle */
    { b=alpha*x+beta*y-d*alpha;
      delta=b*b-x*x-y*y+2.*d*x-d*d+r*r;
      k=-b-sqrt(delta);
      x=x+k*alpha; y=y+k*beta; /* nouveau point sur le petit cercle */
      nx=(x-d)/r; ny=y/r;
      prodsal=alpha*nx+beta*ny;
      alpha=alpha-2.*prodsal*nx; beta=beta-2.*prodsal*ny;
      longvect=sqrt(alpha*alpha+beta*beta); alpha=alpha/longvect;beta=beta/longvect;
      /* on va vers le grand cercle */
      b=alpha*x+beta*y;
      delta=b*b+1.-x*x-y*y;
      k=-b+sqrt(delta);
      x=x+k*alpha; y=y+k*beta; /* nouveau point sur le grand cercle */
      prodsal=alpha*x+beta*y;
      alpha=alpha-2.*prodsal*x; beta=beta-2.*prodsal*y;
      longvect=sqrt(alpha*alpha+beta*beta); alpha=alpha/longvect;beta=beta/longvect;
      if (y>=0.) theta=acos(x); else theta= -acos(x);
      p=-alpha*y+beta*x; /* on prend ici p=cosφ et non φ, ce qui ne modifie pas le dessin */
      putpixel(xorig+zoom2*theta,yorig-zoom*p,black);
    }
  }
  else /* pas de rebond sur le petit cercle */
```

---

sur le cercle, on distingue deux cas : si  $y$  est positif, on prend  $\text{acos}(x)$ , et si  $y$  est négatif on fait  $-\text{acos}(x)$ , d'où l'angle  $\theta$  entre 0 et  $\pi$ , ou entre  $-\pi$  et 0. Ce problème ne se pose pas pour  $\varphi$ , toujours compris entre 0 et  $90^\circ$ .

```
{
  k=-2.*(alpha*x+beta*y);
  x=x+k*alpha; y=y+k*beta;  /** nouveau point de rebond sur le grand cercle *
  prodscal=alpha*x+beta*y;
  alpha=alpha-2.*prodscal*x;  beta=beta-2.*prodscal*y;
  longvect=sqrt(alpha*alpha+beta*beta); alpha=alpha/longvect;beta=beta/longvect;
  if (y>=0.) theta=acos(x);  else theta= -acos(x);
  p=-alpha*y+beta*x;
  putpixel(xorig+zoom2*theta,yorig-zoom*p,black);
}
```