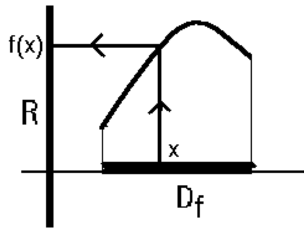
Applications, bijections, bijection réciproque

1. Définitions

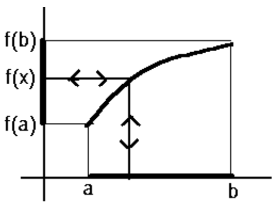
Une application d'un ensemble (de départ) E dans un ensemble (d'arrivée) F fait correspondre à chaque élément de E un élément unique (appelé image) dans l'ensemble F.



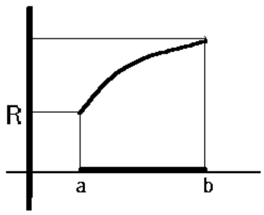
Notamment toutes les fonctions f que nous avons étudiées sont des applications de l'ensemble de définition Df sur l'axe des x dans R sur l'axe des y puisque chaque élément de D_f admet un correspondant unique $y = f(x)$ dans R. Cela peut d'ailleurs s'écrire

$$f : D_f \to R$$
$$x \to f(x)$$

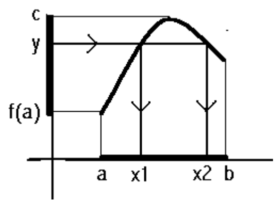
Une bijection est une application telle que chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet un antécédent unique dans l'ensemble de départ E.



(1)Bijection de $[ab]$ sur $[f(a), f(b)]$



(2)Application de $[a\ b]$ dans R, mais ce n'est pas une bijection



(3)Application de $[a\ b]$ dans $[f(a), c]$, mais ce n'est pas une bijection

En effet, dans le premier exemple, tous les éléments de $[f(a), f(b)]$ admettent un antécédent unique dans $[a\ b]$, dans le deuxième exemple, certains éléments de R n'ont pas d'antécédent, et dans le troisième exemple, certains éléments de $[f(a)\ , c]$ ont deux antécédents.

2. Théorème de la bijection [1]

Une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\ b]$ réalise une bijection de $[a\ b]$ sur $[f(a)\ f(b)]$.

(Cela vaut aussi pour un intervalle ouvert $[a\ b[$ ou $]a\ b[$)

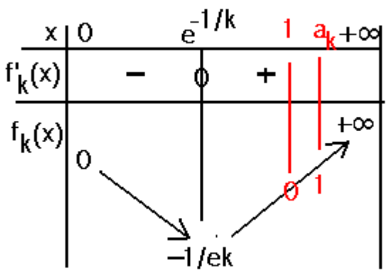
Exemple

On considère la fonction f_k telle que $f_k(x) = x^k \ln x$, définie sur R^{*+}, avec k entier ≥ 2. Grâce à l'étude des variations de cette fonction, montrer que l'équation $f_k(x) = 1$ admet une solution unique a_k avec $1< a_k$.

[1] Nous admettons ce théorème.

Commençons par étudier la fonction. Puisque $x > 0$, $\ln x$ existe bien, et la fonction aussi sur R*+. Elle est dérivable : $f_k'(x) = kx^{k-1}\ln x + \frac{x^n}{x} = x^{k-1}(k\ln x + 1)$. La dérivée est du signe de ($k \ln x$ +1) qui est croissante, et s'annule pour $\ln x = -1/k$, soit $x = e^{-1/k}$. D'autre part, lorsque x tend vers 0, $f_k(x)$ est de la forme indéterminée $0 .\infty$, mais dans ce cas on sait que la puissance de x l'emporte sur le logarithme d'où une limite 0 en 0. D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$, $f_k(x)$ est de la forme $+\infty \times +\infty$ et tend vers ∞.

D'où le tableau de variations :



Venons-en à la résolution de l'équation $f_k(x) = 1$. Dans l'intervalle $]0 \;\; e^{-1/k}]$, la fonction décroît à partir de 0- , et ne peut jamais valoir 1. Plaçons-nous maintenant dans l'intervalle $[e^{-1/k}, +\infty[$, où la fonction est strictement croissante et continue. Elle réalise une bijection de $[e^{-1/k}, +\infty[$ sur $[-1/ek, +\infty[$. Comme 1 se trouve dans cet ensemble d'arrivée, il admet un antécédent unique a_k dans l'ensemble de départ. De même, 0 a pour antécédent unique 1, et avec $0 < 1$ et la fonction strictement croissante, on en déduit que $1 < a_k$.

3. Produit (ou composée) de deux applications

Cette opération est notée par un o . Par définition la fonction $g \circ f$ est telle que :

$g \circ f\,(x) = g(f(x))$.

Autrement dit, en partant de x, on commence par faire $f(x)$, puis on applique g à $f(x)$ d'où $g(f(x))$. Les deux fonctions s'appliquant l'une après l'autre, avec f en premier puis g.

Rappelons que lorsqu'il s'agit de fonctions d'une variable réelle x, la dérivée d'une fonction composée est telle que $(g(f(x)))' = g'(f(x))\ f'(x)$.

Exemple

Montrer que la composée de deux fonctions du premier degré (aussi appelées fonctions affines) est une fonction du premier degré.

Prenons f et g telles que $f(x) = a\,x + b$ et $g(x) = a'\,x + b'$. Puis faisons $g \circ f$:

$$
\begin{aligned}
x \xrightarrow{f} y_1 = ax + b \xrightarrow{g} y &= a'y_1 + b' \\
&= a'(ax+b) + b' = aa'x + a'b + b'
\end{aligned}
$$

d'où $g \circ f\,(x) = aa'\,x + a'b + b'$. Il s'agit aussi d'une fonction affine.
Remarquons que l'opération o n'est pas commutative, puisque

$f \circ g\,(x) = aa'\,x + ab' + b$.

4. Bijection et sa bijection réciproque

Soit f une bijection définie sur I. Ainsi tout élément y de l'intervalle image $J = f(I)$ admet un antécédent unique x dans I. Cela permet de définir la bijection réciproque de f, notée f^{-1}, qui à chaque y de $f(I)$ fait correspondre un x unique dans I, et cet x admet à son tour un antécédent unique y.

Ainsi $\underset{x \in I}{y = f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{y \in J}{x = f^{-1}(y)}$

La courbe de f^{-1} est la même que celle de f, sauf que l'axe de départ où se trouve y est maintenant vertical, et l'axe d'arrivée est horizontal. Pour revenir à la situation classique où c'est l'axe de départ qui est horizontal, on fait une symétrie par rapport à la première bissectrice du repère (celui-ci étant orthonormé), l'axe de départ qui est l'axe des y devient maintenant horizontal. On peut ensuite revenir aux notations classiques en posant $X = y$, et $Y = x$, de façon que l'axe horizontal soit l'axe des X.

Propriétés de la bijection réciproque

- Comme f, f^{-1} est continue sur J.

- Si f est croissante, f^{-1} est aussi croissante. De même pour la décroissance.

- Si f est dérivable sur I, f^{-1} est aussi dérivable sur J, sauf aux points où la dérivée de f est nulle (tangente horizontale), la symétrie rendant alors la tangente verticale pour la courbe de f^{-1}, f^{-1} n'est pas dérivable en ces points où $f'(x) = 0$.

La dérivée de f^{-1}, quand elle existe, peut se calculer ainsi de façon formelle :

$$f^{-1}{}'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \text{(pour } f^{-1}\text{, la variable est } y\text{)}$$

5. Exemples classiques

5.1. Fonction racine carrée

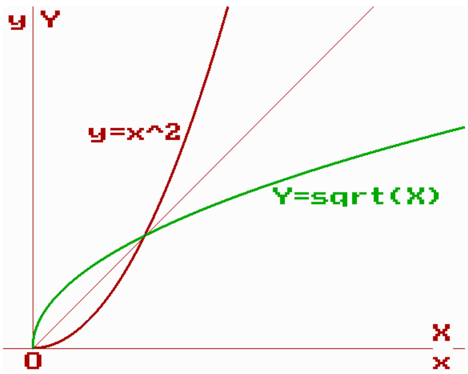
On considère la fonction f telle que $f(x) = x^2$, définie sur $R+$. Montrons qu'elle admet une bijection réciproque f^{-1} que l'on précisera

La courbe de f est une demi-parabole. La fonction étant continue et strictement croissante sur $R+$, elle réalise une bijection de $R+ = [0\,, +\infty[$ sur $[f(0), f(+\infty)[= [0, +\infty[= R+$ aussi. Elle admet une bijection réciproque f^{-1} telle que :

$y = f(x)$ sur $R+ \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$ sur $R+$.

Plus précisément : $y = x^2$ donne, puisque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $x = \sqrt{y}$. Procédons à un changement de variables $X = y$ et $Y = x$ pour que l'axe horizontal ne soit plus l'axe des y mais l'axe des X : $Y = \sqrt{X}$.

Par symétrie autour de la première bissectrice du repère, la fonction racine carrée est représentée par une demi-parabole d'axe horizontal. Elle est continue, strictement croissante sur R+.



La dérivée de *f* étant *f* '(x) = 2x qui s'annule en 0, la fonction racine carrée est seulement dérivable sur *R* *+. La dérivée de $x = f^{-1}(y)$ est $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, cela donne dans le cas présent

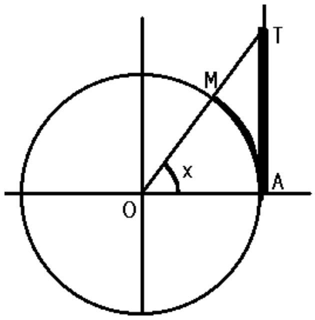
$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, d'où avec $Y = \sqrt{X}$, $Y' = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$.

On constate que la formule de dérivation $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ s'étend aux puissances fractionnaires, puisque $\sqrt{x}$ s'écrit $x^{\frac{1}{2}}$ et que l'on a bien $(x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5.2. Fonction arc tangente

Prendre la fonction *f* telle que *f*(x) = tan x, définie sur] $-\pi/2$, $\pi/2$[. Montrons qu'elle admet une bijection réciproque *tan*$^{-1}$ dont on précisera les caractéristiques.

Rappel sur tan *x* :



Sur le cercle trigonométrique (repère orthonormé d'origine *O*, le rayon du cercle est 1, et le cercle est orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre), on prend un arc $x = AM$ à partir de *A*, cet arc est par définition égal à l'angle x en radians. Par définition aussi :

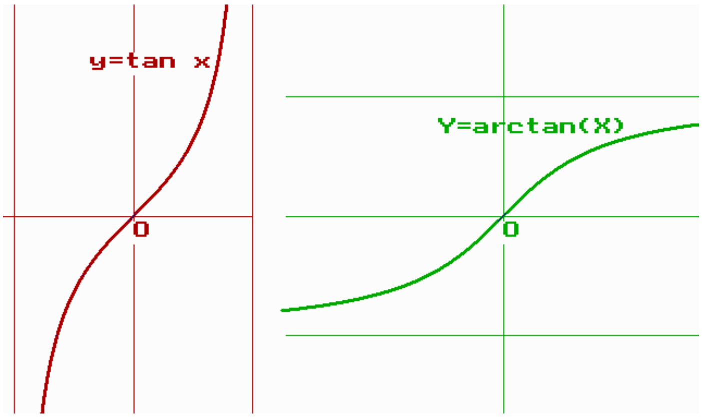
tan x = $\overline{AT}$ (positif quand *T* est au-dessus de *A*, et négatif au-dessous).

On a aussi tan x = sin x / cos x.

Lorsque x va de $-\pi/2$ à $\pi/2$, y = tan x va de $-\infty$ à $+\infty$. Cette fonction est strictement croissante et continue sur]$-\pi/2$, $\pi/2$[. Elle réalise une bijection de]$-\pi/2$, $\pi/2$[sur]$f(-\pi/2)$, $f(\pi/2)$[=] $-\infty$, $+\infty$[= *R*. Elle admet une bijection réciproque f^{-1} telle que :

y = tan x sur] $-\pi/2$, $\pi/2$[$\Leftrightarrow$ $x = \tan^{-1} y$ sur *R*

La bijection réciproque *tan*$^{-1}$ est souvent notée *Arctan* pour exprimer très concrètement que x = *Arctan y* est l'arc (l'angle) dont la tangente est *y*. [2]



[2] Dans les langages informatiques, *Arctan* s'écrit *atan*.

La dérivée de *tan x* est $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$,[3] d'où pour $x = \tan^{-1} y$, la dérivée est :

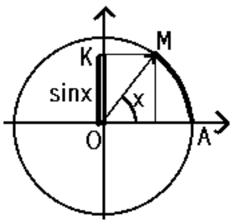
$$(\tan^{-1} y)' = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan y))^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Finalement la dérivée de $Y = \text{Arctan } X$ est $\frac{1}{1+X^2}$.

Ou encore une primitive de $\frac{1}{1+X^2}$ est Arctan X.

5.3. Fonction arc sinus

On prend la fonction sin x avec x dans $[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$. Montrons qu'elle admet une bijection réciproque notée *Arcsin* dont on précisera les caractéristiques.



Lorsque x va de $-\pi/2$ à $\pi/2$, $y = \sin x$ va de -1 à 1. Sur $[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$, la fonction *sin* est continue et croissante. Elle réalise une bijection de $[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$ sur $[-1\ ,\ 1]$. Elle admet une bijection réciproque $\sin^{-1}$ notée *Arcsin* telle que :

$y = \sin x$ sur $[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$ $\Leftrightarrow$ $x = Arcsin\, y$ sur $[-1\ ,\ 1]$
où x est l'arc (l'angle) dont le *sinus* est y.

Tout comme la fonction *sinus*, la fonction *Arcsin* est impaire et croissante. Sa dérivée est telle que $(Arc\sin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(Arc\sin y)}$. Mais il existe un lien entre le sinus et le cosinus, soit :

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, d'où $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}$. Finalement

$(\text{Arc}\sin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ou encore, après changement de notations :

$$(\text{Arc}\sin X)' = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

6. Exercices : Suites et fonctions composées

6.1. *Suite définie à partir de deux fonctions*

On se donne les deux fonctions f et g telles que $f(x) = 1/2\ x$ *et* $g(x) = 1/2\ x + 1$, *et on considère la suite* (u_n) *démarrant en* u_0 *donné quelconque et telle que* $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = g(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$, *etc., où l'on fait jouer en alternance f et g. Déterminer le comportement à l'infini d'une telle suite. Pour cela étudier la suite* (u_{2n}) *à indices pairs et la suite* (u_{2n+1}) *à indices impairs.*

Commençons par étudier la suite extraite (u_{2n}) : $u_0, u_2, u_4, \ldots$ On a :

$$u_{2n} \xrightarrow{f} u_{2n+1} = \frac{1}{2}u_{2n} \xrightarrow{g} u_{2n+2} = \frac{1}{2}u_{2n+1} + 1 = \frac{1}{4}u_{2n} + 1$$

[3] On sait que $\tan x = \sin x / \cos x$. D'où $(\tan x)' = (\cos^2 x + \sin^2 x) / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x$ en cassant la fraction, ou encore $1/\cos^2 x$ puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Puisque $u_{2n+2} = 1/4\ u_{2n} + 1$, il s'agit d'une suite arithmético-géométrique ayant pour point fixe L tel que $L = 1/4\ L + 1$, soit $L = 4/3$.

Avec $u_{2n+2} = 1/4\ u_{2n} + 1$ et $L = 1/4\ L + 1$, il reste après soustraction $u_{2n+2} - L = 1/4\ (u_{2n} - L)$. La suite $v_n = u_{2n} - L$ est une suite géométrique de raison 1/4. On en déduit qu'elle tend vers 0 pour n infini. Ainsi la suite (u_{2n}) tend vers $L = 4/3$.

Prenons maintenant la suite extraite (u_{2n+1}) : u_1 , u_3 , u_5 , …

$$u_{2n+1} \xrightarrow{g} u_{2n+2} = \frac{1}{2}u_{2n+1} + 1 \xrightarrow{f} u_{2n+2} = \frac{1}{2}u_{2n+1} = \frac{1}{4}u_{2n} + \frac{1}{2}$$

On tombe encore sur une suite arithmético-géométrique de point fixe $L' = 2/3$ cette fois. Pour les mêmes raisons que précédemment, la suite $w_n = u_{2n+1} - L'$ est une suite géométrique de raison 1/4. On en déduit qu'elle tend vers 0 pour n infini. Ainsi la suite (u_{2n+1}) tend vers $L' = 2/3$.

La suite (u_n) finit par osciller sur les deux nombres 4/3 et 2/3. [4]

6.2. *Suite à relation de récurrence du second degré*

On considère la fonction telle que $f(x) = c\ x\ (1-x)$, définie sur [0 1], c étant un nombre donné compris entre 2 et 4.

1) *Déterminer les points fixes de f.*

Il s'agit des x tels que $f(x) = x$, soit $c\ x(1 - x) = x$. On distingue deux cas :

- $x = 0$ qui est un point fixe
- si $x \neq 0$, on peut diviser par x : $c(1 - x) = 1$, d'où $x = 1 - 1/c$, deuxième point fixe.

2) *Vérifier que $f([0\ 1] \subset [0\ 1]$*

La courbe de f est une partie de parabole avec $f(0) = f(1) = 0$, située du côté des y positifs et admettant un maximum pour $x = 1/2$, soit $f(1/2) = c / 4 \leq 4$ puisque c est entre 2 et 4. On a toujours $f(x)$ dans [0 1], ce qui signifie que $f([0\ 1] \subset [0\ 1]$

3) *Déterminer $f \circ f$*

Avec x dans [0 1] :

$x \to y_1 = f(x) = c\ x\ (1 - x) \to y = f(y_1) = c\ c\ x\ (1 - x)(1 - cx\ (1 - x))$

Remarquons que y_1 est dans [0 1], donc $f \circ f$ existe bien.

On trouve $y = f \circ f\ (x) = c^2\ x\ (1 - x)(1 - cx + cx^2)$

4) *Pourquoi les points fixes de f sont-il aussi des points fixes de $f \circ f$? En déduire les points fixes de $f \circ f$, et notamment l'existence de deux nouveaux points fixes, que l'on notera x_1 et x_2, dès que c dépasse une valeur que l'on précisera.*

[4] La suite diverge, puisqu'elle ne converge pas vers un point. Mais on peut se permettre de dire qu'elle converge vers un cycle de deux points, 4/3 et 2/3.

Les points fixes de f vérifient $f(x) = x$, d'où aussi $f(f(x)) = f(x) = x$. Ils sont aussi points fixes pour $f \circ f$. On retrouve pour $f \circ f$ les deux points fixes précédemment trouvés, soit $x = 0$ et $x = (c - 1)/c$. Mais il y en a éventuellement d'autres. Les points fixes de $f \circ f$ vérifient :

$c^2 x (1 - x)(1 - cx + cx^2) = x$. Divisons par x car on connaît déjà le point fixe 0 :
$c^2 x (1 - x)(1 - cx + cx^2) = 1$, puis développons et ordonnons, ce qui va donner une équation du troisième degré :

$cx^3 - 2 c x^2 + (c + 1)x + (1 - c^2)/c^2 = 0$, ou encore

$$x^3 - 2x^2 + \frac{c+1}{c}x + \frac{1-c^2}{c^3} = 0$$

On sait que $(c - 1)/c$ est solution, on factorise donc $(x - (c - 1)/c)$ dans le polynôme du troisième degré. Cela donne :

$$(x - \frac{c-1}{c})(x^2 - \frac{c+1}{c}x + \frac{c+1}{c^2}) = 0.$$

Pour trouver les nouveaux points fixes éventuels, il suffit de résoudre l'équation du second degré $x^2 - \frac{c+1}{c}x + \frac{c+1}{c^2} = 0.$ Son discriminant est :

$\Delta = (\frac{c+1}{c})^2 - 4\frac{c+1}{c^2} = (c+1)\frac{c-3}{c^2}$. Dès que c est supérieur à 3, le discriminant est positif et il existe deux nouveaux points fixes x_1 et x_2 .

5) *Pourquoi a-t-on $f(x_1) = x_2$ et $f(x_2) = x_1$? Puis, en posant $g = f \circ f$, montrer que $g'(x_1) = g'(x_2)$.*

Notons que x_1 est un point fixe pour $f \circ f$ et pas pour f, d'où $f(x_1) \neq x_1$. En faisant agir la fonction f à répétition à partir de x_1, on a :

$x_1 \rightarrow y_1 = f(x_1) \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 = f(x_1)$.

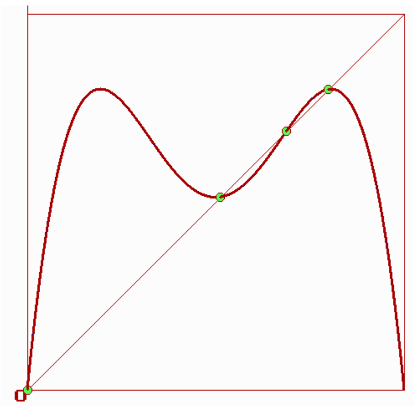
On en déduit que $y_1 = f(f(y_1))$, d'où y_1 est un point fixe pour $f \circ f$ et pas pour f, et ce n'est pas x_1. Ce ne peut être que x_2. Finalement

$f(x_1) = x_2$ et par suite $f(x_2) = x_1$

Maintenant dérivons : $g'(x) = f'(f(x)) . f'(x)$. En particulier

$g'(x_1) = f'(f(x_1)) . f'(x_1) = f'(x_2) . f'(x_1)$. Et de même pour $g'(x_2)$.

6) *Tracer par programme la courbe de g pour $c = 3,2$.*



(On retrouvera ce problème classique dans le *chapitre 11- Suites numériques*)