8. Calcul intégral
cours, exercices corrigés

L'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Au lieu de *descendre* d'une fonction *f* à sa dérivée *f'*, on *monte* de la fonction *f* à la fonction *F* telle que la dérivée *F'* de *F* soit *f*.

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

1.1. Définition

Soit une fonction *f* que l'on prend sur un intervalle *I*. On dit que *F* est une primitive de *f* sur *I* si cette fonction *F* est telle que sa dérivée *F'* = *f* sur *I* (*c'est-à-dire F'(x) = f(x) pour tout x de I*).

Remarques

- Par sa définition même, une primitive *F* est toujours dérivable, et l'on connaît sa dérivée qui est *f*.
- Lorsque l'on parle de primitive, il est obligatoire de préciser sur quel intervalle *I* on se place.

Exemples

- Une primitive d'une constante *k* sur ***R*** est *kx*, puisque la dérivée de *kx* est *k*.
- Une primitive de x^n sur ***R*** (avec *n* entier positif) est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, puisque la dérivée de x^{n+1} est $(n+1)x^n$, et pour avoir comme dérivée x^n, il suffit de diviser par $(n+1)$.
- Une primitive de $\sqrt{x}$ sur ***R+*** est $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, quand on sait que la dérivée de $x^{\frac{3}{2}}$ est $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, il suffit ensuite de diviser par 3/2 (ou de multiplier par 2/3).
- On sait que $u(x)^n$ a pour dérivée $n\, u^{n-1}(x)\, u'(x)$. Inversement une fonction de la forme $u^{n-1}u'$ admet comme primitive u^n / n. Par exemple :

a) $f(x) = \cos^3 x \sin x$ admet pour primitive sur ***R*** : $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x$, puisque $(\cos^4 x)' = 4\cos^3 x\,(-\sin x)$.

b) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ admet comme primitive sur ***R*** :

$F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$ puisque

$((x^2+1)^{3/2})' = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\, 2x = 3x\sqrt{x^2+1}$, et on divise ensuite par 3.

c) $f(x) = \frac{x}{(2x^2+1)^3}$ admet comme primitive sur ***R***

$F(x) = -\frac{1}{8}(2x^2+1)^{-2} = -\frac{1}{8(2x^2+1)^2}$ car

$((2x^2+1)^{-2})' = -2(2x^2+1)^{-3}4x = -8x(2x^2+1)^{-3}$, puis on divise par 8.

Règle du jeu : Pour intégrer, il suffit de savoir dériver, quitte à tâtonner un peu lorsque l'on cherche une primitive.

1.2. Condition d'existence

Une fonction *f* admet une primitive sur *I* lorsque *f* est continue sur *I*. [1]

1.3. Infinité des primitives

Lorsqu'une fonction *f* admet une primitive *F* sur *I* (dès lors que *f* est continue sur *I*), elle en admet une infinité, toutes de la forme *F* + *K*, *K* étant une constante quelconque. [2]

1.4. Unicité de la primitive, lorsqu'on impose une condition initiale

Parmi toutes les primitives, il n'en existe qu'une qui prend une valeur donnée y_0 pour une valeur donnée x_0 de *x*. Il suffit de calculer la valeur de la constante pour qu'il en soit ainsi. [3]

Par exemple la primitive (sur ***R***) de $f(x) = x^3$ s'annulant en $x = 1$ est $F(x) = x^4/4 - 1/4$.

Remarque : Les primitives d'une fonction *f* sont aussi appelées intégrales indéfinies, et elles peuvent être notées $\int f(x)\,dx$ au lieu de $F(x) + K$. On va maintenant voir ce que l'on appelle les intégrales définies, avec le symbole $\int_a^b$, où les bornes sont précisées.

2. Notion d'intégrale (définie)

2.1. Définition

On appelle intégrale de *a* à *b* d'une fonction *f* continue sur un intervalle *I*, avec *a* et *b* dans *I*, la différence *F*(*b*) – *F*(*a*), *F* étant une primitive quelconque de *f* sur *I*. [4]

---

[1] Ce résultat est admis. Il s'agit d'une condition suffisante. Même sous une contrainte plus faible : la fonction est continue seulement par morceaux, avec un nombre fini de discontinuités, les primitives existent.

[2] La primitive *F* vérifie $F'(x) = f(x)$ pour tout *x* de *I*. De même $(F(x) + K)' = f(x)$ puisque la dérivée d'une constante est nulle. A partir d'une primitive *F*, on a aussi une infinité de primitives de la forme *F* + *K*. Mais y en a-t-il d'autres ? Pour cela prenons une primitive quelconque *G*, elle vérifie $G' = f$, tout comme *F*, d'où $G' - F' = 0$. Or seule une constante admet comme dérivée 0. Puisque $(G - F)' = 0$, $G - F = K$ constante sur *I*, et $G = F + K$. Il n'y a pas d'autres primitives que celles que nous avions déjà trouvées.

[3] A partir d'une primitive *F*, toutes les primitives sont de la forme $G(x) = F(x) + K$. Imposons que pour $x = x_0$ on ait $G(x_0) = y_0$, d'où $F(x_0) + K = y_0$, $K = y_0 - F(x_0)$. On vient de trouver une valeur unique de la constante *K*, d'où une seule primitive.

[4] Vérifions que cette définition est valable. Puisque *f* est continue sur *I*, elle admet des primitives sur *I*, et avec *a* et *b* dans *I*, *F*(*b*) et *F*(*a*) existent. D'autre part, si au lieu d'une primitive *F* on prend une primitive *G* , avec $G = F + K$ comme on le sait, on a toujours $G(b) - G(a) = F(b) + K - F(a) - K = F(b) - F(a)$. Le changement de primitive ne modifie pas le résultat. La définition de l'intégrale est cohérente, elle est indépendante de la primitive choisie *F*.

Cette intégrale est notée $\int_a^b f(x)\ dx$**.**

Ainsi, par définition :

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, ce que l'on écrit aussi : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$.

L'écriture $\int_a^b f(x)\ dx$ se lit « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\ dx$ ».

Exemple : Calculons $\int_0^1 (t^2+1)\,dt = [t^3/3+t]_0^1 = 4/3$.

Remarquons que $\int_0^1 (t^2+1)\,dt$ et plus généralement $\int_a^b f(t)\,dt$, pourrait aussi bien être écrit $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ ou $\int_a^b f(x)\,dx$. Le nom de la variable intérieure à l'intégrale peut être changé sans modifier le résultat. Puisque le résultat est fixe, la variable intérieure n'exerce aucune influence, on l'appelle variable muette.

2.2. Cas où une borne de l'intégrale est variable

Grâce à la définition précédente on a aussi :

$$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

L'intégrale est maintenant une fonction de la variable x, d'où l'intérêt de distinguer cette vraie variable x de la variable muette t. On aura toujours intérêt à les écrire différemment puisqu'elles n'ont pas du tout le même rôle.

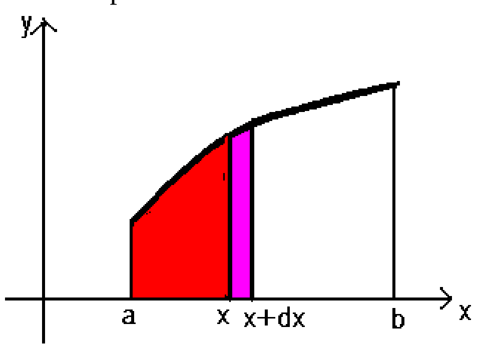
Dans ce contexte, l'intégrale dont une borne est x est aussi une primitive. Plus précisément :

$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ **est la primitive (et la seule) de** f **s'annulant en** $x=a$**.**

En effet $F(x) - F(a)$ est de la forme $F(x) + K$: c'est une primitive de f, et en faisant $x = a$, elle vaut $F(a) - F(a) = 0$.

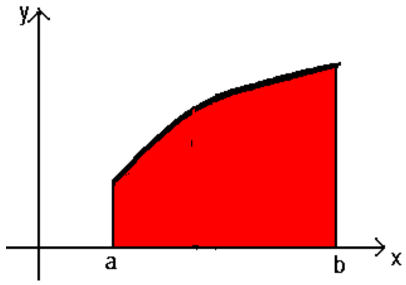
3. Intégrale et aire

Prenons une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ avec $b > a$, et positive sur $[a, b]$, et traçons sa courbe représentative :



Prenons x entre a et b. Appelons $A(x)$ l'aire comprise entre la courbe et les deux verticales d'abscisse a et x (aire de la surface coloriée en rouge). Il s'agit là de l'aire dite géométrique, qui est un nombre positif ou nul. Faisons subir à x une petite variation Δx positive. Le taux d'accroissement de $A(x)$ au voisinage de x est $\dfrac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}$. Pour Δx petit, la variation d'aire $A(x+\Delta x) - A(x)$ est quasiment égale à celle du rectangle de base Δx et de hauteur $f(x)$, $f(x)$ étant ≥ 0. Cette variation d'aire est $f(x)\,\Delta x$, et . $\dfrac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \approx \dfrac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$. En passant à la limite quand Δx tend vers 0, on obtient la dérivée (à droite) de l'aire, et $A'(x) = f(x)$. Il en serait de même en faisant subir à x une petite variation à gauche, avec - Δx.[5] Cela prouve que l'aire $A(x)$ est une primitive de $f(x)$. Et quand x varie de a à b, $A(x)$ est plus précisément la primitive de f qui s'annule pour $x = a$.

Finalement, avec $b > a$ et $f(x) \geq 0$ entre a et b, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux verticales d'abscisse a et b.



Aire coloriée en rouge = $\int_a^b f(x)\ dx$

On comprend mieux maintenant le rôle de la variable muette, ici x. L'intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ signifie que l'on fait varier x de a à b, par petits sauts réguliers de dx, et que l'on fait la somme des petites aires des rectangles de base dx et de hauteur $f(x)$, ces aires étant égales à $f(x)\ dx$. La somme des aires $f(x)\ dx$ donne l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$.

Cela s'applique aussi lorsque l'on calcule $\int_a^x f(t)\,dt$. Il s'agit là d'une fonction de la variable x. Mais chaque fois que l'on se donne une valeur de x, c'est la variable t qui fait son mouvement de a à x. Elle joue ce rôle sous-jacent de variable muette, la véritable variable étant x.

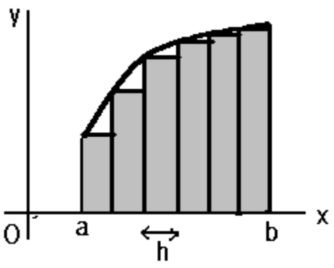
Tout cela a une conséquence immédiate, la possibilité de calculer une intégrale de façon approchée, sans avoir besoin de faire le calcul théorique de l'intégration.

3.1. La méthode des rectangles pour calculer une intégrale

Pour calculer l'intégrale d'un fonction f (avec $f \geq 0$) sur $[a,b]$ avec $b>a$, il suffit de calculer l'aire que sa courbe délimite, et pour cela de découper celle-ci en de multiples bandes verticales de même base h que l'on peut assimiler à des rectangles avec d'autant plus de précision que h est petit. Si l'on coupe l'intervalle $[a\ b]$ en n intervalles, on a $h = (b - a) / n$. En notant les graduations $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, …, $x_i = a + ih$, $x_{n-1} = a + (n - 1)h$, $x_n = b$, l'aire s'écrit sous forme approchée :

$$h(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1}))$$

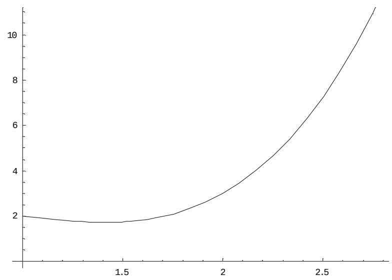
[5] Toujours avec Δx positif, faisons une petite variation $-\Delta x$ à gauche. Le taux d'accroissement est encore $\dfrac{A(x-\Delta x)-A(x)}{-\Delta x} = \dfrac{A(x)-A(x-\Delta x)}{\Delta x} \approx \dfrac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)\cdot$



Exemple : Calcul de $\int_1^3 (2x^3 - 6x^2 + 5x + 1)dx$

On fait le programme :

```
a=1.; b=3.; n=100; h=(float)(b-a)/(float)n;
aire=0.;  x=a;
for(i=0; i<n; i++)
  { y=f(x); airerectangle=h*f(x);
    aire+=airerectangle;   x+=h ;
  }
printf("aire=%3.2f",aire);
```



courbe de *f*

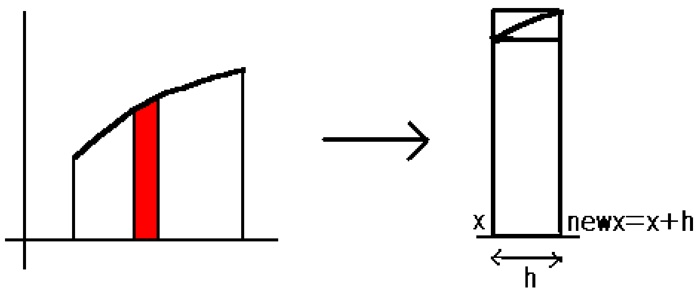
avec comme fonction annexe :

```
float f(float x){float y;  y=2.*x*x*x-6*x*x+5*x+1.;  return y;}
```

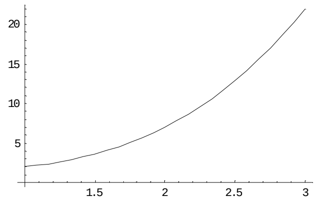
En prenant n = 100, on trouve 9,861, pour n = 1000, on trouve 9,986. En prenant n = 10000, on trouve 9,999. La valeur théorique est 10.

Amélioration, lorsque la fonction est non seulement positive mais croissante

On peut maintenant encadrer chaque bande verticale par deux rectangles, ce qui permet d'encadrer le résultat final.



Exemple : Calculer $\int_1^3 (x^3 - x^2 + x + 1)dx$



courbe de *f*

Programme:

```
a=1.; b=3.; n=1000; h=(float)(b-a)/(float)n;
aire1=0.; aire2=0.; x=a; y=f(a); airerectangle=h*y;
for(i=0;i<n;i++)
 { aire1+=airerectangle;
   x=x+h; newy=f(x); airenewrectangle=h*newy;  aire2+=airenewrectangle;
   y=newy; airerectangle=airenewrectangle;
 }
```

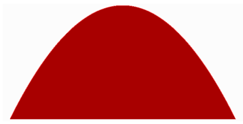
afficher (aire1+aire2)/2.);

```
float f(float x)  {float y;y=x*x*x-x*x+x+1.;return y;}
```

Avec n = 1000, on trouve l'encadrement 17,314 < aire < 17,354, soit une valeur moyenne de 17,334. Le calcul théorique donne 52 / 3 = 17,3333.

Méthode purement graphique

En fait le moyen le plus simple de calculer une aire est de colorier la surface concernée avec une couleur spécifique, puis par un parcours de l'écran de compter le nombre n de pixels ayant cette couleur. Enfin, pour respecter l'effet d'échelle, si une unité de longueur compte k pixels (k est le zoom), l'aire est égale à n / k^2.

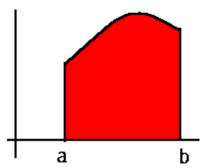


Par exemple si l'on cherche l'aire comprise entre l'axe des x et la parabole d'équation $y = 2x\,(1 - x)$ avec x entre 0 et 1, en se plaçant plein écran (avec un zoom de 600) on trouve une aire de l'ordre de 0,33, proche de la valeur théorique qui est 1/3. Remarquons qu'il s'agit toujours de la méthode des rectangles, avec chaque rectangle de largeur un pixel sur l'écran.

3.2. Notion d'aire algébrique

A la différence de l'aire géométrique, toujours positive, l'aire algébrique peut être positive ou négative. Par définition, l'aire algébrique est égale à l'intégrale. Dans chacun des quatre cas de figure suivants, elle est positive dans deux cas, et négative dans les deux autres. Au signe près, les aires algébrique et géométrique sont égales.

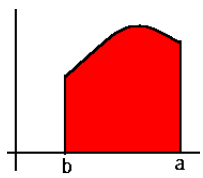
Voici les quatre cas de figure :



$f \geq 0$ sur [a,b] et $b>a$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ aire géométrique

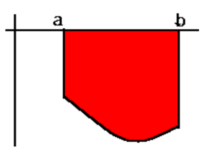
= aire algébrique



$f \geq 0$ sur [a,b] et $a>b$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ - aire géométrique

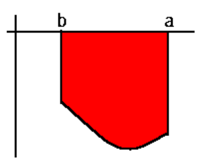
= aire algébrique



$f \leq 0$ sur [a,b] et $b>a$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ - aire géométrique

= aire algébrique

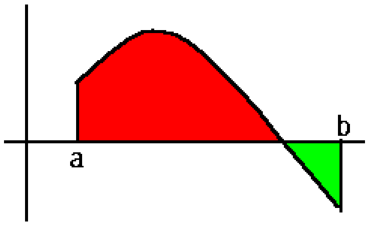


$f \leq 0$ sur [a,b] et $a>b$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ aire géométrique

= aire algébrique

Conséquence : lorsqu'une fonction change de signe sur [a,b] avec $b > a$, l'intégrale est toujours égale à l'aire algébrique, et celle-ci est la somme des aires (géométriques) situées au-dessus de l'axe des x, diminuée de celle des aires (géométriques) situées au-dessous de l'axe des x.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aire rouge - aire verte}$$

4. Propriétés de l'intégrale

4.1. Relation de Chasles pour l'intégrale

Avec a, b, et c sur un intervalle I où la fonction f est continue, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Cela est vrai quel que soit le sens dans lequel sont prises les bornes a, b et c.

Pour toutes les propriétés qui suivent, on sous-entend que f est continue sur [a b], ce qui garantit l'existence des intégrales concernées.

4.2. Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

Autrement dit, on peut casser une intégrale quand elle agit sur une somme.

Plus généralement, avec α et β constantes :

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$$

4.3. Positivité de l'intégrale et respect des inégalités

Avec f(x) ≥ 0 sur [a, b] avec $b > a$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ [6]

Si $f(x) \leq g(x)$ sur [a ,b] avec $b > a$, alors $\int_a^b (t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Ainsi l'intégration respecte l'inégalité, lorsque les bornes sont dans le sens croissant.

5. Calcul d'une intégrale

- On a déjà vu comment calculer une intégrale, lorsque l'on reconnaît sous le signe somme une fonction qui correspond à une formule de dérivée.

- Il existe une deuxième façon, celle qui consiste à remplacer une intégrale par une autre, que l'on sait intégrer. Cela s'appelle l'intégration par parties.

---

[6] Avec $f(x) \geq 0$ sur [a b], et $f(x) > 0$ au moins en un point (f étant bien entendu continue) alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Intégration par parties

Considérons deux fonctions *u* et *v* supposées dérivables sur [*a*,*b*], avec des dérivées *u*' et *v*' continues sur [*a, b*] [7]. Alors :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

La principale difficulté est de bien découper la fonction sous le signe somme en un produit de deux fonctions, l'une devant être intégrée, et l'autre dérivée, de façon à obtenir une nouvelle intégrale plus simple.

Exemples d'intégration par parties

1) *Calculer* $\int_0^1 t\sin t\,dt$

Faisons une intégration par parties en posant $u = t$ et $v' = \sin t$, d'où $u' = 1$ et $v = -\cos t$.

$$\int_0^1 t\sin t\,dt = [-t\cos t]_0^1 + \int_0^1 \cos t\,dt = -\cos 1 + [\sin t]_0^1 = -\cos 1 + \sin 1.$$

2) *Calculer* $\int_0^1 t^2 e^{-t}dt$

Intégrons par parties en posant $u = t^2$ et $v' = e^{-t}$, d'où $u' = 2t$ et $v = -e^{-t}$.

$$\int_0^1 t^2 e^{-t}dt = [-t^2 e^{-t}]_0^1 + 2\int_0^1 t\,e^{-t}dt = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 t\,e^{-t}dt$$

Ce n'est pas fini : il faut encore faire baisser le degré de la puissance de *t* dans la nouvelle intégrale :

Posons $u = t$ et $v' = e^{-t}$, d'où $u' = 1$ et $v = -e^{-t}$

$$\int_0^1 t\,e^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}dt = -\frac{1}{e} - [e^{-t}]_0^1 = -\frac{2}{e} + 1.$$

Finalement $\int_0^1 t^2 e^{-t}dt = -\frac{1}{e} + 2(-\frac{2}{e} + 1) = 2 - \frac{5}{e}$.

3) *Déterminer une primitive de la fonction ln sur **R***+*

Cela revient à calculer $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$. Il s'agit de la primitive de *ln* qui s'annule pour $x = 1$. Procédons à une intégration par parties en posant $u = \ln t$ et $v' = 1$. On en déduit $u' = 1/t$ et $v = t$, d'où

$$F(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x 1dt = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1.$$

Comme les primitives sont à une constante près, une autre primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$.

[7] Ces conditions garantissent l'existence des intégrales que nous allons considérer. Pour démontrer la formule d'intégration par parties, il suffit d'utiliser la formule de dérivation d'un produit :
$(u\,v)' = u\,v' + u'\,v$, puis d'intégrer cette formule entre *a* et *b*.

6. Exercices

(se reporter éventuellement au *chapitre 8* sur les fonctions logarithmes et exponentielles)

6.1. ***Démonstration de la formule*** $e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\ldots$

Posons $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$ avec *n* entier naturel.

1) *Trouver une relation entre* I_n *et* I_{n-1} *pour* $n > 0$.

Procédons à une intégration par parties en posant :
$u = (1-x)^n$ et $v' = e^x$, d'où $u' = -n(1-x)^{n-1}$ et $v = e^x$.

$$I_n = \frac{1}{n!}\left([(1-x)^n e^x]_0^1 + \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx \right) = -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$= -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

2) *En déduire* I_n.

Appliquons la formule précédente en descendant de *n* à 2 :

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$$

$$I_{n-1} = I_{n-2} - \frac{1}{(n-1)!}$$

…

$$I_1 = I_0 - \frac{1}{1!} \qquad \text{avec} \quad I_0 = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1$$

Par addition membre à membre, après simplifications en cascade, il reste :

$$I_n = e - \left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right) \qquad \text{(rappelons que } 0! = 1\text{)}$$

3) *Montrer que* $e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\ldots$, soit

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right).$$

Comme $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} = e - I_n$, il suffit de montrer que I_n tend vers 0 quand *n* tend vers l'infini.

Lorsque *x* est compris entre 0 et 1, $(1-x)$ est compris entre 0 et 1, et $(1-x)^n$ aussi.
D'où $0 \le (1-x)^n e^x \le e^x \le e$. L'intégration de 0 à 1 préserve ces inégalités :
$0 \le I_n \le \frac{e}{n!}$. Lorsque *n* tend vers l'infini, I_n est pris en sandwich entre 0 et une quantité qui tend vers 0, d'où I_n tend vers 0.

6.2. ***Calcul de*** $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt.$

1) *Etudier la fonction f telle que* $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

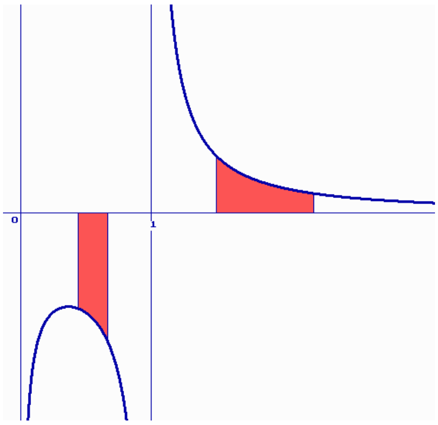
Le logarithme impose $x > 0$. D'autre part la division n'est pas possible lorsque $x = 0$ ou lorsque $\ln x = 0$, soit $x = 1$. D'où l'ensemble de définition $D_f =]0\ 1[\cup\ ]1\ +\infty[$.

Lorsque x tend vers 0, $x \ln x$ est de la forme indéterminée $0.\infty$, mais dans ce cas x l'emporte, $x \ln x$ tend vers 0-, et son inverse $f(x)$ vers $-\infty$.

Lorsque x tend vers $1\pm$, $x \ln x$ tend vers $0\pm$, son inverse $f(x)$ tend vers $\pm\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $x \ln x$ aussi, et l'inverse tend vers 0.

La dérivée est $f'(x)=-\frac{1}{x^2\ln x}-\frac{1}{x^2(\ln x)^2}=-\frac{1}{x^2(\ln x)^2}(\ln x+1)$. Le facteur $\ln x + 1$ s'annule pour $x = 1/e$, en étant négatif avant et positif après, puisque la fonction *ln* est croissante. La dérivée a le signe opposé de celui de $\ln x + 1$. La fonction est croissante sur $]0\ \ 1/e[$ puis décroissante sur $]1/e\ \ 1[$, elle est ensuite décroissante pour $x > 1$. D'où la courbe.



2) *On prend x sur]0 1[. Montrer que f admet des primitives sur]0 1[. On appelle G une primitive de f (ne pas chercher à calculer G), et l'on considère la fonction de x telle que :* $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt.$ *Ecrire F(x) à l'aide de G en vérifiant que F est bien définie sur]0 1[.*

Sur]0 1[, la fonction f est continue, comme produit de fonctions classiques continues. Elle admet des primitives sur]0 1[, notamment G. Lorsque x appartient à]0 1[, x^2 aussi, et $G(x^2)$ a un sens, tout comme $G(x)$. On peut écrire $F(x) = G(x^2) – G(x)$, par définition de l'intégrale.

3) *Faire de même pour x > 1.*

(*Remarque : On ne peut pas calculer directement F sur]0 1[*$\cup$*]1 +*∞*[, qui est une union de deux intervalles. Le cours impose le fait qu'une primitive est définie sur un intervalle*).

Lorsque $x > 1$, f est aussi continue et admet des primitives sur $]1\ \infty[$, notamment une primitive G_1. Lorsque $x > 1$, on a aussi $x^2 > 1$, $G_1(x^2)$ a un sens, et :

$F(x) = G_1(x^2) – G_1(x)$.

4) *Montrer que F est dérivable sur]0 1[*$\cup$*]1 +*∞*[et calculer la dérivée F***'** *à l'aide des formules précédentes. En conclure que F est une constante.*

Grâce à ce qui précède, sur]0 1[, $G(x)$ est dérivable comme toute primitive, sa dérivée étant $f(x)$, et $F'(x) = 2x\, G'(x^2) - G'(x)$

$$= 2x\frac{1}{x^2 \ln x^2} - \frac{1}{x \ln x} = \frac{2x}{2x^2 \ln x} - \frac{1}{x \ln x} = 0 \cdot$$

Cela prouve que F est une constante sur]0 1[.

Il en est exactement de même avec $G_1(x)$ sur]1 +∞[. F est aussi une constante sur]1 +∞[(mais pas forcément la même que sur]0 1[).

5) *Calculer maintenant F(x) par intégration, après avoir déterminé une primitive de f. En déduire que F(x) = ln2 sur]0 1[∪]1 +∞[.*

$f(t) = \dfrac{1}{t \ln t}$ est de la forme u'/u avec $u = \ln t$. Une primitive est $\ln u$.

$$F(x) = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln(\ln x^2) - \ln(\ln x) = \ln(2 \ln x) - \ln(\ln x)$$
$$= \ln 2 + \ln(\ln x) - \ln(\ln x) = \ln 2$$

Cela vaut aussi bien sur]0 1[que sur]1 +∞[. F vaut ln2 sur]0 1[∪]1 +∞[. L'aire comprise entre la courbe, l'axe des x, et deux verticales en x et x^2, est toujours la même, quand x varie (voir les aires en rouge sur le dessin ci-dessus).