Equations, inéquations dans *R*. Systèmes d'équations linéaires

Cours, exercices corrigés, programmation

1. Equation à une inconnue

Une équation à une inconnue est une égalité contenant un nombre inconnu noté en général x et qui est appelé l'inconnue. Résoudre l'équation consiste à chercher les valeurs éventuelles de x qui rendent l'égalité vraie. Ces valeurs constituent les solutions de l'équation.

Exemples

1) ***Résoudre (4x + 1)(x – 3) = 5(x – 3)***

On fait ressortir le facteur commun
$(x – 3)(4x + 1) – 5(x – 3) = 0$
$(x – 3)(4x + 1 – 5) = 0$
$(x – 3)(4x – 4) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si un facteur est nul.
$x = 3$ ou $x = 1$. L'équation admet ces deux solutions.

Remarque : Si l'on avait simplifié au départ par $(x – 3)$, c'est-à-dire divisé des deux côtés par $x – 3$, on aurait perdu une solution (on n'a pas le droit de diviser par 0, ce qui se produit pour $x = 3$). Et quand on oublie la moitié des résultats, cela vaut zéro !

Mais on peut agir ainsi :
On distingue deux cas selon les valeurs de x:
- $x = 3$, c'est une solution évidente.
- $x \neq 3$. On peut alors diviser par 3. L'équation devient : $4x + 1 = 5$, $x = 1$.

On retrouve les deux solutions.

2) ***Résoudre*** $(3x-1)^2 = (x+5)^2$

$(3x-1)^2 - (x+5)^2 = 0$ On reconnait une une identité remarquable

$(3x-1+x+5)(3x-1-x-5) = 0$

$(4x+4)(2x-6) = 0$

$x = -1$ ou $x = 3$

L'équation admet deux solutions.

3) ***Résoudre*** $\dfrac{x-2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-3x+1}{x^2-1}$

On n'a pas le droit de diviser par 0, on ne pourra jamais avoir $x = 1$ ou $–1$. Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{(x-2)(x-1)-(x+1)}{x^2-1} = \frac{-3x+1}{x^2-1}$$

$\frac{(x-2)(x-1)-(x+1)+3x-1}{x^2-1}=0$. Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul. En développant au numérateur, il reste :

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$x=0$ ou $x=1$

Mais on a vu que x = 1 ne peut pas être solution. Il reste une seule solution : x = 0.

4) *Résoudre* $\sqrt{x+5}=x-1$

Commençons par les contraintes imposées à x :

- La racine carrée existe si et seulement si ce qui est sous le radical est ≥ 0, ce qui impose $x \geq -5$.
- La racine carrée est ≥ 0, ce qui impose $x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$.

Ces deux conditions se réduisent à $x \geq 1$.

Maintenant élevons au carré : $x+5=x^2-2x+1$ [1]

$x^2-3x-4=0$

$x=-1$ ou $x=4$

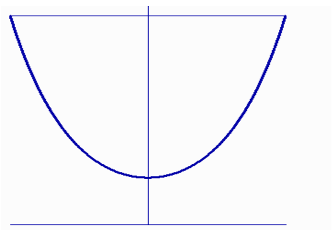
Mais comme on doit avoir $x \geq 1$, il reste la solution unique x = 4.

Avec ces quatre exemples, nous avons vu comment traiter certaines équations. Mais souvent, dans les problèmes réels, on ne sait pas résoudre les équations qui leur sont associées. Dans ce cas, pour parer au plus pressé, on fait un traitement par ordinateur, en essayant un grand nombre de valeurs de x, jusqu'à ce que l'équation soit vérifiée. Voici un exemple :

5) *Entre deux points A et B situés à la même hauteur, et distants de 2 m, on laisse pendre une corde ayant une longueur de 4 m. On veut connaître la hauteur du point le plus bas de la corde par rapport à celle de A et B.*

Pour cela, on admettra que l'équation de la courbe [2] formée par la corde est de la forme $y=k\frac{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}{2}$**,**

k étant un nombre réel positif pour le moment inconnu, et que la longueur de la courbe entre A et B est $k(e^{\frac{1}{k}}-e^{-\frac{1}{k}})$**.**



Il s'agit de trouver k vérifiant $k(e^{\frac{1}{k}}-e^{-\frac{1}{k}})$ = 4. On ne peut pas extraire k de là en appliquant les règles de calculs disponibles. C'est impossible. On n'aura jamais k sous forme de formule. On fait alors un traitement sur ordinateur, avec un programme du style :

```
for(k=0.05; k<5; k+=0.00001)
if (fabs(k*(exp(1./k)-exp(-1./k)) -4.)<0.0001)  {valeur=k; break;}
```

---

[1] Avec $x \geq 1$, on a $\sqrt{x+5}=x-1 \Leftrightarrow x+5=x^2-2x+1$.

[2] Cette courbe est appelée une chaînette.

Ainsi, on pratique une série d'essais pour des valeurs de *k* partant d'une valeur proche de 0. Et l'on teste si l'expression $k(e^{\frac{1}{k}} - e^{-\frac{1}{k}})$ – 4, prise en valeur absolue (grâce à la fonction *fabs* utilisée pour les nombres flottants) devient inférieure à 0,0001. Dès qu'on tombe sur un résultat (placé dans *valeur*) on arrête la boucle. On obtient ainsi *k* = 0,46. Il ne reste plus qu'à utiliser l'équation de la courbe : pour *x* = 0, on a *y* = *k*, et pour *x* = 1, on a $y = k\frac{e^{\frac{1}{k}} + e^{-\frac{1}{k}}}{2}$.La distance verticale entre le haut et le bas de la corde est $k\frac{e^{\frac{1}{k}} + e^{-\frac{1}{k}}}{2} - k$, soit 1,59 *m*.

2. Trinôme et équation du second degré

Un trinôme du second degré n'est autre qu'un polynôme du second degré, soit :

$P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Cherchons à le factoriser. On commence par mettre *a* en facteur :

$P(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$. On considère que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement du carré $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

$$= a\left((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac .$$

On distingue deux cas :

- $\Delta \geq 0$. Dans ce cas, $\sqrt{\Delta}$ existe.
  $P(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ grâce à l'identité remarquable sur la différence de deux carrés. Remarquons que si Δ =0, cela s'écrit plus simplement :
  $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
- $\Delta < 0$. Dans ce cas on ne peut plus factoriser car $\left((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right)$est la somme de deux carrés.

Signe du trinôme

Grâce à ce qui précède, on déduit :

- Si $\Delta \leq 0$, le trinôme est du signe de *a*.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme s'écrit :

$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ *avec* $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. On appelle x_1 et x_2 les racines du trinôme, ce sont les valeurs de *x* qui l'annulent : $P(x_1) = P(x_2) = 0$. Quitte à faire un tableau de signe, on en conclut que le trinôme est du signe de – a entre les racines et du signe de a ailleurs.

Equation du second degré

Il s'agit de $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Les calculs précédents permettent de conclure :

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet les deux solutions x_1 et x_2 distinctes.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double $x = -b/2a$ (ou encore deux solutions confondues).
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution.

Somme *S* et produit *P* des racines

On a $\boxed{S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}}$

Recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

On veut trouver **x** et y tels que :

$$\begin{cases} x + y = S \\ x\ y = P \end{cases} \quad \text{avec } S \text{ et } P \text{ donnés.}$$

Procédons par substitution : $y = S - x$ et $x(S - x) = P$. La deuxième équation s'écrit $x^2 - S x + P = 0$, de racines (si elles existent) x_1 et x_2. En faisant $x = x_1$, on trouve $y = x_2$ grâce à l'autre équation, et en faisant $x = x_2$, on a $y = x_1$. Finalement :

Pour trouver deux nombres x et y connaissant leur somme S et leur produit P, on forme l'équation $X^2 - S X + P = 0$, ayant pour racines X_1 et X_2, et l'on a deux couples solutions : $(x, y) = (X_1, X_2)$ ou (X_2, X_1).

Exercices

1) *Résoudre le système* :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Résoudre un tel système de deux équations à deux inconnues, c'est chercher les valeurs de x et de y qui vérifient en même temps les deux équations. Dans le cas général, on procède par substitution : on extrait une inconnue d'une équation (par exemple ici $y = x - 3$), puis on substitue ce résultat dans la deuxième équation, ce qui donne une équation à une inconnue x. On est ainsi ramené à la résolution d'une équation à une inconnue, ce que l'on sait faire.

Mais dans le cas présent, on peut s'aider du résultat précédent sur la somme et le produit des racines.

Le système s'écrit aussi, en faisant apparaître la somme S et le produit P de x et y :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ (x + y)^2 - 2xy = 5 \end{cases}$$

d’où $S = 3$ et $P = 2$. Formons l’équation $X^2 – S\,X + P = 0$, ici $X^2 – 3\,X + 2 = 0$, de racines 1 et 2. D’où les deux couples-solutions : $x = 1$ et $y = 2$ ou $x = 2$ et $y = 1$.

2) *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x\,y = -14 \end{cases}$$

Procédons au changement d’inconnues $Y = – y$. On est ramené à chercher deux nombres x et Y connaissant leur somme 9 et leur produit 14. Prenons l’équation $X^2 – 9X + 14 = 0$ qui a pour solutions 2 et 7. En revenant aux inconnues initiales, on obtient : $(x, y) = (2, – 7)$ ou $(7, – 2)$.

3. Inéquations

Nous allons traiter quelques exemples, en utilisant avec prudence les règles sur les inégalités vues dans le *chapitre 4. Calculs numériques*.

1) *Résoudre* $2x(x+1) \geq (1-3x)(x+1)$

On procède par différence (surtout ne pas « simplifier », c’est-à-dire diviser en haut et en bas par $(x + 1)$, car on pourrait diviser par 0 et en plus cela dépend du signe de $(x + 1)$).

$$2x(x+1) - (1-3x)(x+1) \geq 0$$
$$(x+1)(2x-1+3x) \geq 0$$
$$(x+1)(5x-1) \geq 0$$

On est ramené à un problème de signe. On a un trinôme du second degré de racines –1 et 1/5. Il est positif en dehors de l’intervalle des racines. Les solutions sont les x tels que $x \leq – 1$ ou $x \geq 1/5$. L’ensemble des solutions est $]\infty , –1] \cup [1/5, +\infty[$.

2) *Résoudre* $\dfrac{x}{x-2} - 2 \geq -\dfrac{x-3}{x+1}$

D’abord on ne peut pas avoir $x = 2$ ni $x = – 1$, à cause des divisions. Réduisons au même dénominateur , puis soustrayons:

$$\frac{x-2x+4}{x-2} \geq -\frac{x-3}{x+1} \qquad \frac{-x+4}{x-2} \geq -\frac{x-3}{x+1} \qquad \frac{-x+4}{x-2} + \frac{x-3}{x+1} \geq 0$$
$$\frac{(-x+4)(x+1)+(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+1)} \geq 0 \qquad \frac{-2x+10}{(x-2)(x+1)} \geq 0 \qquad \frac{2(-x+5)}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

Faisons un tableau de signes

x		-1		2		5	
-x+5	+		+		+	0	−
x-2	−		−	0	+		+
x+1	−	0	+		+		+
signe final	+	‖	−	‖	+		−

Finalement on trouve une infinité de solutions, tous les x tels que $x < – 1$ ou $2 < x \leq 5$.

3) *Résoudre* $x+3>\sqrt{x+1}$

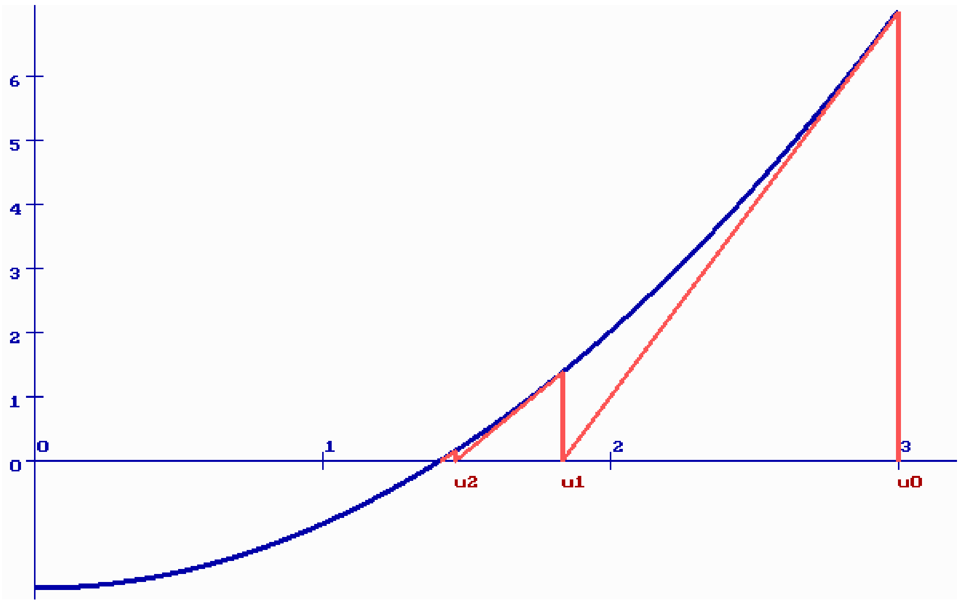
A cause de la racine carrée, l'inéquation n'a de sens que pour $x \geq -1$, et lorsqu'il en est ainsi, on a aussi $x + 3 > 2 > 0$. Les deux membres de l'inéquation sont alors ≥ 0. On sait qu'avec a et $b \geq 0$, $a > b$ équivaut à $a^2 > b^2$. L'inéquation devient $(x + 3)^2 > x + 1$, soit $x^2 + 5x + 8 > 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 25 - 32 < 0$. Le trinôme est toujours positif. L'inéquation est toujours vérifiée lorsque $x \geq -1$. L'ensemble des solutions est $S = [-1, +\infty[$.

4. Méthode de Newton pour avoir la valeur approchée d'une solution d'une équation

Revenons au traitement d'une équation, que l'on utilise en l'occurrence pour chercher la valeur précise d'un nombre qui en est solution. Par exemple, on veut connaître une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec un certain nombre de chiffres exacts derrière la virgule. Le nombre $\sqrt{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$. C'est même la seule solution sur l'intervalle [1 2]. Le nombre $\sqrt{2}$ est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des x et de la courbe d'équation $y = x^2 - 2$ sur [1 2], qui est un morceau de parabole. En posant $g(x) = x^2 - 2$, on est dans le contexte où la dérivée $g'(x)$ est positive et $g''(x)$ aussi sur [1 2]. Cela signifie que la fonction est croissante, et que sa dérivée est aussi croissante. Ainsi la pente de la tangente augmente quand x augmente, la courbe a une forme de cuvette (*voir dessin ci-dessous*). On dit dans ce cas que la fonction est convexe.

On va construire une suite (u_n) de points sur l'axe des x, qui vont s'approcher de $\sqrt{2}$ rapidement, grâce à ce que l'on appelle la méthode des tangentes, attribuée à Newton.

On part de $u_0 = 2$ (*sur le dessin on est parti de $u_0 = 3$ pour mieux voir*), puis on prend le point de la courbe correspondant, de coordonnées $(u_0 = 2, g(u_0))$. A partir de ce point on trace la tangente à la courbe. Cette tangente coupe l'axe des x en u_1. Puis on recommence, en remontant verticalement sur la courbe, et en traçant la tangente qui va couper l'axe des x en u_2, etc.



Comment passe-t-on dans le cas général de u_n à u_{n+1} ? La tangente à la courbe au point d'abscisse u_n passe par le point $(u_n , g(u_n))$ et a pour pente $g'(u_n)$. Son équation est : $Y - g(u_n) =$

$g'(u_n)$ $(X - u_n)$. On fait $Y = 0$ pour avoir l'abscisse $X = u_{n+1}$ du point d'intersection avec l'axe des x, d'où $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)}$ ou encore :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}.$$

Dans le cas présent, cela donne :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^{\,2} - 2}{2u_n} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$$

La suite (u_n) obéit à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$, et en condition initiale $u_0 = 2$. On a constaté graphiquement que cette suite converge vers $\sqrt{2}$ très rapidement.

A titre d'exercice faisons une étude théorique de cette suite (les suites sont étudiées dans le *chapitre 11.Suites numériques*).

1) *Etudier la fonction f sur R*+*

Avec $x > 0$, la division $2/x$ est toujours possible, $f(x)$ existe bien pour tout $x > 0$.

Limites :

- Lorsque x tend vers $+\infty$, $2/x$ tend vers 0, $f(x) \approx x/2$ tend vers $+\infty$. Pour étudier cette branche infinie, on constate que $f(x) - 1/2\, x = 2 / (2x)$ qui tend vers 0+. Cela prouve que la droite d'équation $y = (1/2)\, x$ est une asymptote oblique pour la courbe de f, et que la courbe est située au-dessus.
- Lorsque x tend vers 0+, $2/x$ tend vers $+\infty$, et $f(x)$ tend vers $+\infty$. La courbe admet l'axe des y comme asymptote verticale.

Cherchons la dérivée : $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{2}{x^2}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2 - 2}{x^2}$. Elle est du signe de :
$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ qui est du signe de $(x - \sqrt{2})$. D'où les variations de f :

Sur $]0, \sqrt{2}\,]$, la fonction décroît de $+\infty$ à $\sqrt{2}$, et sur $[\sqrt{2}\ +\infty[$ elle croît de $\sqrt{2}$ à $+\infty$. On a partout $f(x) \geq \sqrt{2}$.

2) *Etude de la suite (u_n) avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$*

a) *Montrer que pour tout x dans l'intervalle $[\sqrt{2}\ \ 2]$, on a $0 \leq f'(x) \leq 1/4$.*

On sait que $f'(\sqrt{2})=0$. Lorsque x augmente à partir de là, $2 / x^2$ diminue, $-2 / x^2$ augmente, donc la dérivée augmente. Avec $f'(2) = 1/4$, cela signifie que la dérivée va de 0 à 1/4. On a bien $0 \leq f'(x) \leq 1/4$.

b) *Montrer que pour tout n, $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.*

Faisons un raisonnement par récurrence.

- La propriété est vraie au départ : $u_0 = 2 \ \leq 2$ et $\geq \sqrt{2}$.

- Supposons la propriété vraie à un certain rang n et montrons qu'elle reste vraie au rang n+1 : avec $\sqrt{2} \le u_n \le 2$ par hypothèse de récurrence, et f croissante sur [$\sqrt{2}$ +∞[, on en déduit que $f(\sqrt{2}) \le f(u_n) \le f(2) = 3/2 \le 2$, soit

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le 2.$$

c) *Montrer que* $u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{4}(u_n - \sqrt{2})$.

Plaçons-nous sur l'intervalle I = [$\sqrt{2}$ 2], où l'on a vu que $0 \le f'(x) \le 1/4$. D'où :

$|f'(x)| \le 1/4$. Les nombres $\sqrt{2}$ et u_n , comme on l'a vu, sont dans I. On est alors dans les conditions de l'inégalité des accroissements finis :

$| f(u_n) - f(\sqrt{2}) | \le \frac{1}{4} | u_n - \sqrt{2} |$ ou $| u_{n+1} - \sqrt{2} | \le \frac{1}{4} | u_n - \sqrt{2} |$. Et comme $u_n \ge \sqrt{2}$ pour tout n, on peut supprimer les barres : $u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{4}(u_n - \sqrt{2})$

d) *Montrer que* $u_n - \sqrt{2} \le \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$. *En déduire la convergence de la suite et indiquer sa limite.*

$$u_n - \sqrt{2} \le \frac{1}{4}(u_{n-1} - \sqrt{2})$$
$$u_{n-1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{4}(u_{n-2} - \sqrt{2})$$
…..
$$u_1 - \sqrt{2} \le \frac{1}{4}(u_0 - \sqrt{2})$$

En multipliant membre à membre ce inégalités, où tout est positif, il se produit des simplifications .en cascade, et il reste : $u_n - \sqrt{2} \le \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$.

On a aussi l'encadrement $0 \le u_n - \sqrt{2} \le \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$. Lorsque n tend vers l'infini, $u_n - \sqrt{2}$ est pris en tenaille entre 0 et une quantité qui tend vers 0, d'où u_n tend vers $\sqrt{2}$. Le terme $\left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$ indique que la convergence est rapide. Pour n = 6, on a déjà

$0 \le u_6 - \sqrt{2} \le 0{,}00015$. Cette rapidité s'explique par le fait qu'au point fixe $\sqrt{2}$, la courbe de f admet une tangente horizontale, le diagramme en toile d'araignée confirme alors cette vitesse de convergence.

5. Système d'équations linéaires

Par définition, une équation linéaire ne possède que des termes du premier degré.

On sait déjà résoudre une équation linéaire du premier degré (ou moins), de la forme $a\,x = b$, où x est l'inconnue et a et b des nombres réels donnés. Pour cela on distingue plusieurs cas :

* Si $a \neq 0$, on peut diviser par a, $x = b/a$. L'équation admet une solution réelle unique.
* Si $a = 0$, quelle que soit la valeur de x que l'on essaye, on a toujours $0x = 0$.
  Si $b \neq 0$, on n'a jamais $0x = b$. L'équation n'a aucune solution.
  Si $b = 0$, l'équation devient $0x = 0$. N'importe quelle valeur de x est solution. L'équation admet une infinité de solutions : x est un nombre réel quelconque.

Maintenant prenons un système de p équations linéaires à n inconnues. Il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ .... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Les coefficients a_{11}, a_{12},…, $a_{p\,n}$ sont des nombres réels donnés.

On veut résoudre ce système, c'est-à-dire chercher les valeurs que doivent prendre les inconnues x_1, x_2,…, x_n , de façon que toutes les équations soient vérifiées simultanément. Pour cela on est amené à remplacer ce système par un système plus simple, mais équivalent, c'est-à-dire qui a exactement les mêmes solutions. Et l'on continue à simplifier, en faisant en sorte que certaines des équations aient moins d'inconnues qu'auparavant. A la fin on aura une des équations qui sera linéaire à une inconnue, et que l'on sait résoudre.

Commençons par un exemple : on veut résoudre le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 = 3 \end{cases}$

Pour cela remplaçons la deuxième équation par elle-même moins la première. On obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ \qquad 3x_2 = 2 \end{cases}$$

D'où en remontant : $x_2 = 2/3$ et $x_1 = 1 + 4/3 = 7/3$. Le système admet une solution unique : $x_1 = 7/3$, $x_2 = 2/3$, ce qui peut s'écrire $(x_1, x_2) = (7/3, 2/3)$.

Maintenant généralisons cette méthode, spécifique aux systèmes d'équations linéaires, et que l'on appelle la méthode (du pivot) de Gauss. Commençons par définir les opérations élémentaires qui permettent de remplacer un système par un système équivalent.

Opérations élémentaires transformant un système en un système équivalent

Rappelons que deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont exactement les mêmes solutions. Il existe essentiellement deux opérations élémentaires :

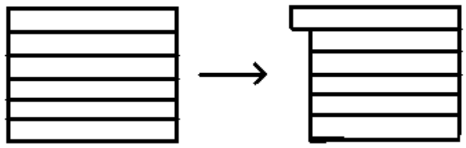
* Si l'on échange deux équations, c'est-à-dire deux lignes du système, on obtient un système équivalent.

* Si l'on remplace une équation par elle-même plus k fois une autre, on obtient un système équivalent. Cela s'écrit $L_i \rightarrow L_i + k\,L_j$.

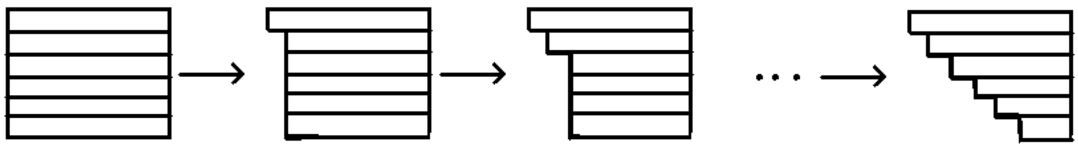
Remarquons qu'en cas de besoin, on peut aussi changer l'ordre des inconnues, par exemple commencer par mettre les x_2 avant les x_1. Pour simplifier les calculs, on sera aussi amené à multiplier une équation par un nombre, pourvu qu'il soit non nul (sinon l'équation disparaîtrait).

La méthode de Gauss : passage à un système triangulaire (ou en échelons)

Partons de la première équation L_1, dont on suppose que le coefficient a_{11} n'est pas nul. D'ailleurs, s'il l'était, on procèderait avec un échange avec une autre équation ayant son premier coefficient non nul. Cela fait, on remplace la deuxième équation L_2 par une combinaison L_2+kL_1 de façon que le premier coefficient a_{21} de la nouvelle deuxième ligne L_2 devienne nul. Et l'on fait de même pour chacune des lignes L_j qui suivent L_1, en remplaçant L_j par $Lj+kL_1$ de façon que son premier coefficient devienne nul. A la fin de cette première étape, on a un nouveau système avec une inconnue en moins dans toutes les lignes sauf la première.



Ce que l'on vient de faire à partir de la première ligne, on le recommence à partir de la deuxième ligne en raccourcissant les équations qui sont au-dessous d'elle. Et ainsi de suite, ce qui donne finalement un système d'allure triangulaire, en échelons.



Dans le cas le plus simple, on tombe sur une dernière équation ayant une seule inconnue x_n, que l'on sait maintenant résoudre. On substitue à x_n la solution que l'on vient de trouver, cela dans toutes les équations précédentes. A son tour, l'avant-dernière équation ne possède plus qu'une inconnue x_{n-1}. Et ainsi de suite en remontant jusqu'à la première équation. Mais tout ne se passe pas toujours aussi bien. En règle générale, un système de n équations à n inconnues aura une solution unique, mais ce n'est pas obligatoire. Par contre, s'il a plus d'équations que d'inconnues, cela rajoute des contraintes, et il n'y aura en général aucune solution. Et s'il y a moins d'équations que d'inconnues, cela enlève des contraintes, et la tendance sera à l'obtention d'une infinité de solutions.

Tout cela sera plus compréhensible et plus précis en traitant quelques exemples.

Exemple 1 : Résoudre le système $\begin{cases} 2x+y-z-t=-18 \\ x+y+z+t=0 \\ 3x+5z=1 \\ x+y-7z+13t=-40 \end{cases}$

Pour simplifier l'écriture, nous allons écrire seulement les coefficients des inconnues, ce qui donne ce que l'on appelle l'écriture matricielle du système [3] :

---

[3] Plus précisément l'écriture sous forme matricielle du système est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -7 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 1 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad =-18 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad = 0 \\ 3 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad = 1 \\ 1 \quad 1 \quad -7 \quad 13 \quad =-40 \end{cases}$$

Afin de simplifier le calcul, on commence par échanger la première et la deuxième ligne, soit $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\begin{cases} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad =0 \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad =-18 \\ 3 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad =1 \\ 1 \quad 1 \quad -7 \quad 13 \quad =-40 \end{cases}$$

Puis on fait $L_2 \to L_2\text{-}2L_1$, $L_3 \to L_3\text{-}3L_1$, $L_4 \to L_4\text{-}L_1$

$$\begin{cases} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad =0 \\ 0 \quad -1 \quad -3 \quad -3 \quad =-18 \\ 0 \quad -3 \quad 2 \quad -3 \quad =1 \\ 0 \quad 0 \quad -8 \quad 12 \quad =-40 \end{cases}$$

Multiplions la 2^{è} ligne par –1

$$\begin{cases} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad =0 \\ 0 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad =18 \\ 0 \quad -3 \quad 2 \quad -3 \quad =1 \\ 0 \quad 0 \quad -8 \quad 12 \quad =-40 \end{cases}$$

Puis on fait $L_3 \to L_3+3L_2$

$$\begin{cases} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad =0 \\ 0 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad =18 \\ 0 \quad 0 \quad 11 \quad 6 \quad =55 \\ 0 \quad 0 \quad -8 \quad 12 \quad =-40 \end{cases}$$

Divisons la 3^{è} ligne par 11

$$\begin{cases} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad =0 \\ 0 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad =18 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad \dfrac{6}{11} \quad =5 \\ 0 \quad 0 \quad -8 \quad 12 \quad =-40 \end{cases}$$

Enfin , $L_4 \to L_4\text{-}8L_1$

$$\begin{cases} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad =0 \\ 0 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad =18 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad \dfrac{6}{11} \quad =5 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dfrac{180}{11} \quad =0 \end{cases}$$

Le système est devenu triangulaire. La dernière équation donne t = 0. On reporte cette valeur dans les précédentes. L’avant-dernière équation n’a à son tour plus qu’une inconnue : z = 5. Puis en remontant y = 3, et x = – 8. On en conclut que le système admet une solution unique :

(x, y, z, t)=(– 8, 3, 5, 0).

Exemple 2 :

$$\begin{cases} 5x+\ y+\ z\ =-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ x\ -\ y+\ z=1 \end{cases}$$

Echangeons la première et la troisième ligne : $L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{cases} 1 \quad -1 \quad 1 \quad =1 \\ 2 \quad 13 \quad -7 \quad =-1 \\ 5 \quad 1 \quad 1 \quad =-5 \end{cases}$$

$L_2 \to L_2\text{-}2L_1$, $L_3 \to L_3\text{-}5L_1$

$$\begin{cases} 1 \quad -1 \quad 1 \quad =1 \\ 0 \quad 15 \quad -9 \quad =-3 \\ 0 \quad 6 \quad -4 \quad =-10 \end{cases}$$

$L_2 \to L_2/3$ $\quad L_3 \to L_3/6$ $\quad L_3 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} 1 & -1 & 1 & =1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & =-\frac{5}{3} \\ 0 & 5 & -3 & =-1 \end{cases} \qquad L_3 \to L_3 - 5L_2$$

$$\begin{cases} 1 & -1 & 1 & =1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & =-\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & =\frac{22}{3} \end{cases}$$

D'où $z = 22$, $y = 13$, $x = -8$. Le système admet une solution unique

$(x, y, z) = (-8, 13, 22)$.

Exemple 3 : $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5x + y + z = -4 \\ -2x - 10y + 5z = 7 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 & -3 & 2 & =1 \\ 5 & 1 & 1 & =-4 \\ -2 & -10 & 5 & =7 \end{cases} \quad L_2 \to L_2 - 5L_1,\ L_3 \to L_3 + 2L_1 \quad \begin{cases} 1 & -3 & 2 & =1 \\ 0 & 16 & -9 & =-9 \\ 0 & -16 & 9 & =9 \end{cases}$$

On constate que les deux dernières équations sont les mêmes. Le système se réduit à deux équations
$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 16y - 9z = -9 \end{cases}$.

On va considérer que z est un nombre arbitraire que l'on se donne, et on l'envoie à droite, ce qui ramène le système à deux équations en x et y. On dit que l'on a pris x et y comme inconnues principales, et z comme inconnue non principale :
$\begin{cases} x - 3y = 1 - 2z \\ 16y = -9 + 9z \end{cases}$ d'où $y = -9/16 + (9/16)z$, puis $x = -11/16 - (5/16)z$.

Le système admet une infinité de solutions

$(x, y, z) = (-\frac{5}{16}z - \frac{11}{16}, \frac{9}{16}z - \frac{9}{16}, z)$ avec z nombre quelconque réel.

Exemple 4 : $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 5x - 3y + z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \\ x \quad + 7z = 4 \end{cases}$

Cela peut s'écrire : $\begin{cases} 1 & 2 & -3 & =1 \\ 5 & -3 & 1 & =2 \\ 3 & -1 & 1 & =3 \\ 1 & 0 & 7 & =4 \end{cases}$

$L_2 \to L_2\text{-}5L_1,\ L_3 \to L_3\text{-}3L_1,\ L_4 \to L_4\text{-}L_1$ $\begin{cases} 1 & 2 & -3 & =1 \\ 0 & -13 & 16 & =-3 \\ 0 & -7 & 10 & =0 \\ 0 & -2 & 10 & =3 \end{cases}$

$L_2 \to L_2/(\text{-}13),\ L_3 \to L_3+7L_2,\ L_4 \to L_4+2L_2$ $\begin{cases} 1 & 2 & -3 & =1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{16}{13} & =\dfrac{3}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{18}{13} & =\dfrac{21}{13} \\ 0 & 0 & \dfrac{98}{13} & =\dfrac{45}{13} \end{cases}$

On s'aperçoit qu'aucune valeur de z ne peut convenir en même temps aux deux dernières équations. On ne peut pas avoir à la fois $z = 21/18$ et $z = 45/98$. Le système n'a aucune solution. On dit qu'il est incompatible.

Exemple 5

Soit un polynôme P de degré 3 : $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, vérifiant $P(1) = -9$, $P(2) = -9$, $P(3) = 5$, $P(4) = 45$. Montrer qu'il existe un polynôme unique obéissant à ces conditions, et le trouver.

Cela s'appelle, comme on l'a déjà vu, un polynôme d'interpolation de Lagrange.

Ecrivons les quatre contraintes imposées au polynôme P :

$$\begin{cases} a+b+c+d=-9 \\ 8a+4b+2c+d=-9 \\ 27a+9b+3c+d=5 \\ 64a+16b+4c+d=45 \end{cases}$$

On obtient un système de quatre équations à quatre inconnues. Résolvons-le par la méthode de Gauss. Pour le calcul, on a intérêt à inverser l'ordre des inconnues :

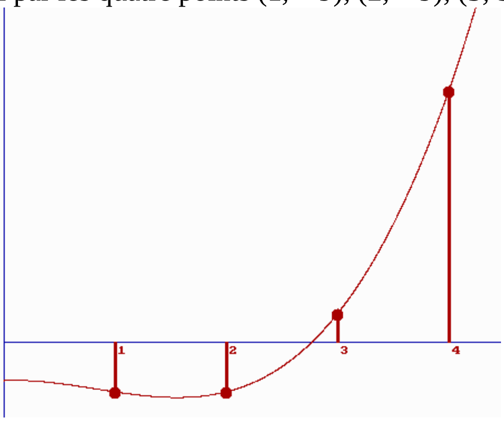
$\begin{cases} d+c+b+a=-9 \\ d+2c+4b+8a=-9 \\ d+3c+9b+27a=5 \\ d+4c+16b+64a=45 \end{cases}$ $L_2 \to L_2\text{-}L_1,\ L_3 \to L_3\text{-}L_1,\ L_4 \to L_4\text{-}L_1$ $\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 & =-9 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & =0 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & =14 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & =54 \end{cases}$

$L_3 \to L_3\text{-}2L_2,\ L_4 \to L_4\text{-}3L_2$ $\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 & =-9 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & =0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & =14 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & =54 \end{cases}$ $L_3 \to L_3/2\ \ L_4 \to L_4/6$

$\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 & =-9 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & =0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & =7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & =9 \end{cases}$ $L_4 \to L_4\text{-}L_3$ $\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 & =-9 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & =0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & =7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & =2 \end{cases}$

On trouve un système triangulaire, d'où en remontant et en tenant compte de l'ordre des inconnues : $a = 2$, $b = -5$, $c = 1$, $d = -7$. On trouve le polynôme unique $P(\mathrm{x}) = 2x^3 - 5x^2 + x - 7$.

On trouvera ci-dessous la courbe représentative de ce polynôme. On constate qu'elle passe bien par les quatre points (1, – 9), (2, – 9), (3, 5), (4, 45).



.

Cas d'un système ayant autant d'équations que d'inconnues, et sa programmation

Prenons un système de N équations à N inconnues. En prenant par exemple $N = 3$, il s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x3 = b_3 \end{cases}$$

Plaçons-nous dans le cas favorable où a_{11} n'est pas nul (s'il était nul, il faudrait choisir un autre coefficient non nul de la première ligne et changer l'ordre des inconnues). On peut alors procéder à l'opération élémentaire $L_2 \rightarrow L_2 - (a_{21}/a_{11})L_1$, ou encore on commence par diviser la première équation par a_{11}, soit $L_1 \rightarrow L_1/a_{11}$ puis on fait $L_2 \rightarrow L_2 - a_{21}L_1$. On fait de même $L_3 \rightarrow L_3 - (a_{31}/a_{11})L_1$. C'est la première étape d'élimination des inconnues, ce qui donne le système équivalent :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ & (a_{22} - (a_{21}/a_{11})a_{12})x_2 & + (a_{23} - (a_{21}/a_{11})a_{13})x_3 & = & b_2 - (a_{21}/a_{11})b_1 \\ & (a_{32} - (a_{21}/a_{11})a_{12})x_2 & + (a_{33} - (a_{21}/a_{11})a_{13})x_3 & = & b_3 - (a_{21}/a_{11})b_1 \end{cases}$$

Le système est de la forme:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = B_2 \\ \qquad A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = B_3 \end{cases}$$

Passons maintenant à la deuxième étape d'élimination, et la dernière dans le cas présent, en faisant $L_3 \rightarrow L_3 - (A_{32}/A_{22})L_2$, sous réserve que A_{22} ne soit pas nul. Le système est devenu parfaitement triangulaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = B_2 \\ \qquad (A_{33} - (A_{32}/A_{22})A_{23})x_3 = B_3 - (A_{32}/A_{22})B_2 \end{cases}$$

ou encore, aux notations près :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 = B_1 \\ \qquad A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = B_2 \\ \qquad\qquad A_{33}x_3 = B_3 \end{cases}$$

Cela se généralise à un système de N équations à N inconnues, avec $N - 1$ étapes d'élimination, sous réserve que tout se passe bien (aucune division par 0, lorsque l'on prend les coefficients diagonaux)[4]. Le système a dans ce cas une solution unique. On en déduit le programme correspondant :

On se donne N, et on déclare les tableaux : *float a*[N+1][N+1] et *b*[N+1]. Remarquons que l'on utilise seulement les cases de 1 à N de ces tableaux, la case 0 restant inutilisée. Puis on remplit ces deux tableaux. Et on lance la boucle des étapes :

```
for(etape=1; etape<N; etape++)
  {
   for(l=etape+1;  l<=N;  l++)
    {
    for(c=etape+1; c<=N; c++) a[l][c] - = (a[l][etape]/a[etape][etape])*a[etape][c];
    b[l] - = (a[l][etape] /a[etape][etape])*b[etape];
    a[l][etape]=0.;
    }
   afficher le système pour voir son évolution
  }
```

On passe ensuite à la phase de substitution, à partir de la dernière équation. En reprenant le cas d'un système à $N = 3$ inconnues, cela donne :

$$x_3 = \frac{B_3}{A_{33}} \quad \text{puis} \quad x_2 = \frac{B_2 - A_{23}x_3}{A_{22}} \quad \text{puis} \quad x_1 = \frac{B_1 - A_{12}x_2 - A_{13}x_3}{A_{11}}$$

On en déduit la partie finale du programme, après avoir déclaré un tableau *float x*[*N*+1] qui va recevoir la solution du système :

```
x[N]= b[N]/a[N][N];
for(i=N-1; i>=1; i--)
  {
  cumul=b[i];       /*   cumul contiendra à la fin ce qui est le numérateur de x[i]  */
  for(k=N; k>i; k--)  cumul - = a[i][k]*x[k];
  x[i]=cumul/a[i][i];
  }
afficher le tableau x[N+1] de 1 à N
```

[4] Ces coefficients diagonaux non nuls sont appelés des pivots, d'où le nom de méthode du pivot de Gauss. Si l'on tombe sur un coefficient nul, on procède à un échange de lignes, en choisissant une ligne ayant un coefficient diagonal non nul, ou bien on cherche le pivot parmi les autres coefficients de la même ligne, sous réserve que l'on en trouve un qui ne soit pas nul. Si l'on n'en trouve pas, on n'arrive pas à une « triangularisation » parfaite du système, et celui-ci peut avoir une infinité de solutions ou bien aucune.

Au sens strict, à chaque étape de la triangularisation, le pivot est le coefficient non nul le plus petit en valeur absolue dans la zone matricielle concernée. On procède alors à un changement de l'ordre des inconnues et à celui de l'ordre des lignes de façon que cet élément pivot soit placé tout en haut à gauche.

Cas particulier d'un système tri-diagonal

On se place dans le cas particulier d'un système de N équations à N inconnues, où la matrice du système n'a des coefficients non nuls que sur sa diagonale ainsi que juste au-dessus, et juste en dessous. Il est de la forme, par exemple pour $N = 5$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ \qquad\qquad a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_4 \\ \qquad\qquad\qquad a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 \end{cases}$$

Les $N - 1$ phases d'élimination sont simplifiées, car à chaque fois seule une équation est transformée, et plus précisément deux seulement de ses coefficients. Ainsi l'étape 1 de l'élimination consiste à faire $L_2 \to L_2 - (a_{21}/a_{11})L_1$, ce qui donne :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \quad + \quad a_{12}x_2 = b_1 \\ \quad (a_{22} - (a_{21}/a_{11})a_{12})x_2 \ + \ a_{23}x_3 = b_2 - (a_{21}/a_{11})b_1 \\ \qquad a_{32}x_2 \quad + \quad a_{33}x_3 \ + \ a_{34}x_4 = b_3 \\ \qquad\qquad a_{43}x_3 \ + \ a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_4 \\ \qquad\qquad\qquad a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 \end{cases}$$

On constate que seuls deux coefficients sont modifiés. Il en est de même pour chaque étape de l'élimination.

1) *En s'aidant de ce qui précède, faire le programme correspondant aux étapes d'élimination.*

```
for(etape=1;etape<N;etape++)
 {
 a[etape+1][etape+1]-= (a[etape+1][etape]/a[etape][etape])*a[etape][etape+1];
 b[etape+1]-=(a[etape+1][etape]/a[etape][etape])*b[etape];
 a[etape+1][etape]=0.;
 }
```

Au terme des éliminations, on a un système en échelons de la forme suivante (toujours pour $N = 5$):

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = B_1 \\ \qquad A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = B_2 \\ \qquad\qquad A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = B_3 \\ \qquad\qquad\qquad A_{44}x_4 + A_{45}x_5 = B_4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad A_{55}x_5 = B_5 \end{cases}$$

Le processus de substitution conduit à :

$$x_5 = \frac{B_5}{A_{55}}\ ,\ x_4 = \frac{B_4 - A_{45}x_5}{A_{44}}\ ,\ x_3 = \frac{B_3 - A_{34}x_4}{A_{33}}\ ,\ x_2 = \frac{B_2 - A_{23}x_3}{A_{22}}\ ,\ x_1 = \frac{B_4 - A_{12}x_2}{A_{11}}\ .$$

2) *Faire le programme correspondant aux substitutions pour N quelconque.*

```
x[N]=b[N]/a[N][N];
for(i=N-1; i>=1; i--)   x[i] = (b[i] - a[i][i+1]*x[i+1])/a[i][i];
afficher
```

On remarquera que dans ce cas particulier de système tri-diagonal, la résolution est beaucoup plus rapide que pour un système quelconque.

5. Exercices

Exercice 1

Déterminer le ou les polynômes P de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :
P(1) = 1, P'(1) = 1, P''(1) = 2 , P'''(1) = 2 (il s'agit des dérivées successives).

Posons $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ que nous avons ordonné (volontairement) suivant ses puissances croissantes. Ses dérivées successives sont :

$P'(X) = a_1 + 2\, a_2 X + 3\, a_3 X^2$, $P''(X) = 2\, a_2 + 6\, a_3 X$, $P'''(X) = 6\, a_3$.

On aboutit au système d'équations :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1 \\ 2a_2 + 6a_3 = 2 \\ 6a_3 = 2 \end{cases}$$

Grâce à l'ordre choisi pour les inconnues, le système est déjà triangulaire, en en remontant on trouve la solution unique :

$a_3 = 1/3$, $a_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_0 = 2/3$, soit le polynôme $P(X) = 2/3 + (1/3)X^3$.

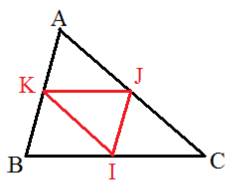
Exercice 2 : Polygone des milieux

Considérons un polygone à N sommets A_k numérotés en succession de 0 à N – 1, et prenons les N milieux I_k de ses côtés, eux aussi numérotés de 0 à N – 1, avec le numéro 0 pour le côté 0-1, 1 pour le côté 1-2, etc. Le problème est le suivant : Si l'on se donne les N points I_k, existe-t-il des polygones dont les milieux des côtés sont ces I_k, et si oui combien ? On pourra traiter le problème soit par la méthode lourde, en traitant un système d'équations, soit par une méthode plus légère, purement géométrique.

Méthode géométrique

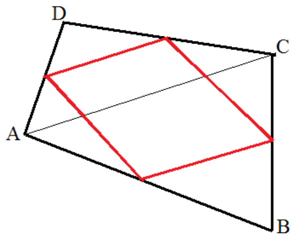
Comme on n'a aucune idée préconçue en la matière, commençons par des exemples simples.

1) $N = 3$. On sait que pour un triangle ABC, le triangle des milieux a ses côtés parallèles à celui du triangle *ABC*, avec des côtés de longueur moitié (réciproque du théorème de Thalès, élargie aux trois côtés d'un triangle).

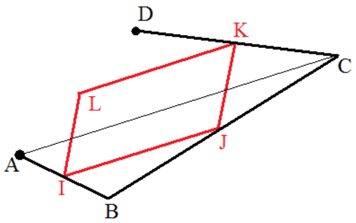


Inversement, à partir de trois points IJK, il suffit de mener par ces points des parallèles à (IJ), (JK) et (KI). On obtient ainsi un triangle ABC unique, dont on vérifie aisément que I, J et K sont les milieux des côtés. Le problème a une solution unique.

2) $N = 4$. Lorsque l'on prend un quadrilatère $ABCD$, on vérifie que le quadrilatère des milieux est un parallélogramme. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème des milieux aux deux triangles ABC et CDA.

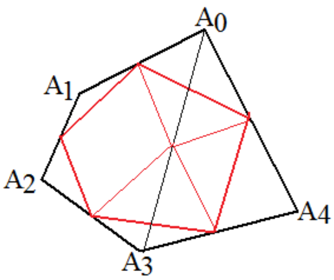


On peut déjà en déduire que si le quadrilatère des milieux n'est pas un parallélogramme, il n'existe aucun quadrilatère $ABCD$ répondant au problème.

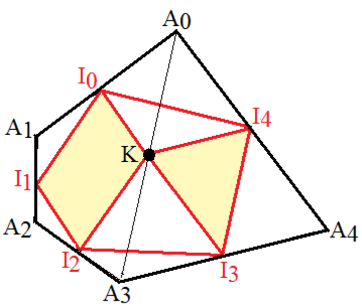


Mais qu'en est-il dans le cas exceptionnel où le quadrilatère des milieux $IJKL$ est un parallélogramme ? Prenons un point A quelconque, et construisons les points B, C, D avec des côtés ayant pour milieux I, J et K. Puis montrons que L est aussi le milieu de [AD]. Pour cela appelons L' le milieu de [AD]. Comme [KL] et [KL'] sont tous deux parallèles à (AC), les points L et L' sont alignés, et l'on a aussi $LK = 1/2\ AC$ et $L'K = 1/2\ AC$. L et L' sont confondus. Finalement, on obtient une infinité de quadrilatères $ABCD$, il suffit de partir d'un point A quelconque du plan.

3) $N = 5$.

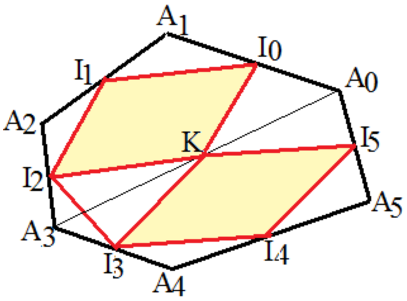


Le pentagone peut être partagé en un quadrilatère et un triangle, ceux-ci ayant comme côté commun $A_0\ A_3$ par exemple, avec pour milieu K. Dans le triangle $A_0A_3A_4$ le triangle des milieux a ses côtés parallèles à ceux du triangle.



Procédons maintenant en sens inverse. Commençons par construire le parallélogramme $I_0I_1I_2K$ avec le nouveau point K qui devra être le milieu de [$A_0\ A_3$]. Ce parallélogramme correspond au quadrilatère $A_0A_1A_2A_2$ inconnu pour le moment. Puis construisons le triangle des milieux $I_3\ I_4\ K$. Grâce à ce triangle, il est possible de construire le triangle $A_0A_3A_4$. De là on déduit aussi les autres points A_1 et A_2. On a une solution unique à notre problème.

Ce que nous venons de faire pour $N = 5$ se généralise à tout polygone ayant un nombre impair de sommets, avec une solution unique. Il suffit de procéder par récurrence. Tout comme le pentagone a été divisé en un triangle et un quadrilatère accolés, un polygone à N sommets peut être partagé entre un polygone à $N - 2$ côtés et un quadrilatère. Grâce au quadrilatère, on trouve le point K milieu du côté en commun. Dès lors, on connaît tous les milieux du polygone à $N - 2$ côtés. Par hypothèse de récurrence, celui-ci donne une solution unique. Il ne reste plus qu'à ajouter les sommets du quadrilatère.



Passons au cas où N est pair. Nous avons vu le cas où N = 4. Faisons maintenant N = 6. L'hexagone peut être divisé entre deux quadrilatères ayant pour côté commun A_0A_3. A partir des milieux I_0 I_1 I_2 du premier quadrilatère on construit le parallélogramme I_0 I_1 I_2 K, où K devra être le milieu de $[I_0I_3]$ Lorsque l'on prend le deuxième quadrilatère, deux cas sont possibles :

- Si le quadrilatère I_3 I_4 I_5 K n'est pas un parallélogramme, le problème n'a aucune solution.

- Si le quadrilatère I_3 I_4 I_5 K est un parallélogramme, il existe une infinité de quadrilatères, en prenant A_0 quelconque, et par suite une infinité d'hexagones.

Cela se généralise à N pair quelconque. On divise le polygone en un quadrilatère et un polygone à N – 2 sommets. Grâce au quadrilatère et à son parallélogramme des milieux, on trouve un point K qui devra être le milieu du côté en commun. Dès lors, on connaît tous les milieux des côtés du polygone à N – 2 sommets, le problème du polygone à N sommets est ramené à celui du polygone à N – 2 sommets, et l'on a soit aucune solution, soit une infinité de solutions. Remarquons que pour N = 4, on devait avoir un parallélogramme des milieux pour obtenir une infinité de solutions, pour N = 6, il en fallait deux, pour N = 8, il en faudra trois, etc.

Méthode algébrique (en utilisant les nombres complexes pour simplifier)

Plaçons-nous dans le plan complexe, appelons z_i les affixes des points A_i formant le polygone, et Z_i les affixes des milieux I_i des côtés. Sachant que l'affixe d'un milieu est la demi-somme des affixes des deux points, on trouve un système de N équations à N inconnues z_i, les Z_i étant donnés.

$$\begin{cases} z_0 + z_1 & = 2Z_0 \\ \quad z_1 + z_2 & = 2Z_1 \\ \qquad z_2 + z_3 & = 2Z_2 \\ \qquad\quad z_3 + z_4 & = 2Z_3 \\ \qquad\qquad z_4 + z_5 & = 2Z_4 \\ \qquad\qquad\quad ..... & \\ z_0 + \qquad\qquad\qquad z_{N-1} & = 2Z_{N-1} \end{cases}$$

Seule la dernière équation est concernée, quand il s'agit de rendre le système triangulaire. On fait successivement sur la dernière ligne : $L_{N-1} \to L_{N-1} - L_0$, $L_{N-1} \to L_{N-1} + L_1$, $L_{N-1} \to L_{N-1} - L_2$, …, $L_{N-1} \to L_{N-1} \pm L_{N-2}$ avec le signe + quand N est impair, et – quand N est pair, d'où la présence de deux cas.

Prenons N impair, avec le cas le plus simple N = 3 :

$$\begin{cases} z_0 + z_1 = 2Z_0 \\ \quad z_1 + z_2 = 2Z_1 \\ z_0 \quad + z_2 = 2Z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_0 + z_1 = 2Z_0 \\ \quad z_1 + z_2 = 2Z_1 \\ -z_1 + z_2 = 2(Z_2 - Z_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_0 + z_1 = 2Z_0 \\ \quad z_1 + z_2 = 2Z_1 \\ \qquad 2z_2 = 2(Z_2 - Z_0 + Z_1) \end{cases}$$

Dans le cas général, la dernière équation devient $z_{N-1} = Z_{N-1} - Z_0 + Z_1 - Z_2 + \ldots + Z_{N-2}$. En remontant, on trouve finalement que le système admet une solution unique, avec pour chaque i de 0 à $N-1$:

$z_i = Z_i - Z_{i+1} + Z_{i+2} - \ldots + Z_{(i+N-1)\,[N]}$ où les indices sont ramenés modulo N.

Prenons maintenant N pair, avec le cas le plus simple $N = 4$:

$$\begin{cases} z_0+z_1 = Z_0 \\ z_1+z_2 = Z_1 \\ z_2+z_3 = Z_2 \\ z_0+z_3 = Z_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_0+z_1 = Z_0 \\ z_1+z_2 = Z_1 \\ z_2+z_3 = Z_2 \\ -z_1+z_3 = Z_3-Z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_0+z_1 = Z_0 \\ z_1+z_2 = Z_1 \\ z_2+z_3 = Z_2 \\ z_2+z_3 = Z_3-Z_0+Z_1 \end{cases}$$

On tombe sur une condition de compatibilité : $Z_3 - Z_0 + Z_1 - Z_2 = 0$. Si cette condition n'est pas remplie, le système est incompatible, il n'a aucune solution. Par contre dans le cas où elle est satisfaite, on peut prendre z_3 comme inconnue non principale, et le système se réduit à trois équations à trois inconnues (principales) :

$$\begin{cases} z_0+z_1 = Z_0 \\ z_1+z_2 = Z_1 \\ z_2 = Z_2 - z_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_0 = Z_0 - Z_1 + Z_2 - z_3 \\ z_1 = Z_1 - Z_2 + z_3 \\ z_2 = Z_2 - z_3 \end{cases}$$

Dans le cas général avec N pair, on tombe sur la condition de compatibilité :

$Z_0 - Z_1 + Z_2 - \ldots - Z_{N-1} = 0$

Exercice 3

On se propose d'étudier, selon les valeur du paramètre réel a, les solutions du système :

$$\begin{cases} (2-a)x - y = 0 \\ -x + (2-a)y - z = 0 \\ -y + (2-a)z = 0 \end{cases}$$

Un tel système est dit homogène, les seconds membres des équations étant tous à 0.

Remarquons qu'un système homogène admet toujours au moins une solution, les inconnues étant toutes nulles. On démontre qu'il admet soit cette unique solution nulle, soit une infinité de solutions, ce que nous allons vérifier dans le cas présent.

1) *Démontrer que par des opérations élémentaires convenables, on peut transformer le système de façon que les deux premières colonnes ne contiennent plus a : pour cela faire d'abord une opération de la forme L2→L2 + k L3 pour faire disparaître le terme en y, puis L1→L1 + k' L2.*

Faisons $L2 \to L2 + (2-a)L3$

$$\begin{cases} (2-a)x - y = 0 \\ -x + ((2-a)^2 - 1)z = 0 \\ -y + (2-a)z = 0 \end{cases}$$

Puis $L1 \to L1 + (2-a)L2$

$$\begin{cases} \quad -y + (2-a)((2-a)^2 - 1)z = 0 \\ -x \qquad + ((2-a)^2 - 1)z = 0 \\ \quad -y + (2-a)z = 0 \end{cases}$$

2) *Transformer le système obtenu en système en échelons. En déduire que le système initial est indéterminé (il possède une infinité de solutions) si et seulement si :*

$(2-a)(\sqrt{2} - 2 + a)(\sqrt{2} + 2 - a) = 0$.

Le résoudre pour chacune de ces valeurs de a.

Mettons la deuxième équation en premier, et la troisième en deuxième :

$$\begin{cases} -x \qquad + (a^2 - 4a + 3)z = 0 \\ \quad -y + (2-a)z = 0 \\ \quad -y + (2-a)(a^2 - 4a + 3)z = 0 \end{cases}$$

Faisons $L3 \rightarrow L3 - L2$

$$\begin{cases} -x \qquad + (a^2 - 4a + 3)z = 0 \\ \quad -y + (2-a)z = 0 \\ \qquad (2-a)(a^2 - 4a + 2)z = 0 \end{cases}$$

Le système est triangulaire. Constatons que le trinôme $a^2 - 4a + 2$ a pour racines $2 \pm \sqrt{2}$. Pour résoudre le système, on distingue deux cas :

a) *a* différent de 2 et de $2 \pm \sqrt{2}$. On en déduit que *z* = 0, puis *y* = 0 et *x* = 0. C'est la solution nulle (0, 0, 0).

b) *a* est égal à 2 ou à $2 \pm \sqrt{2}$: *z* est quelconque. Prenons *z* comme inconnue non principale, en distinguant les trois cas :

- *a* = 2, on trouve *y* = 0, puis *x* = – *z*, d'où une infinité de solutions (*x*, *y*, *z*) = (– *z*, 0, *z*) avec *z* qui décrit **R**.
- $a = 2 + \sqrt{2}$. On trouve $y = -\sqrt{2}\,z$, $x = z$, d'où l'infinité de solutions $(z, -\sqrt{2}\,z, z)$.
- $a = 2 - \sqrt{2}$. On trouve $y = \sqrt{2}\,z$, $x = z$, d'où l'infinité de solutions $(z, \sqrt{2}\,z, z)$.

Exercice 4

Résoudre le système $\begin{cases} x^{-2}y^3z^5 = 2 \\ x \;\; y^4z^3 = 1 \\ x^3y^{-1}z^2 = 3 \end{cases}$

Pour cela commencer par montrer que x, y, z doivent être tous positifs ou tous négatifs. Puis procéder à un changement d'inconnues (qui va remplacer les multiplications par des additions) pour traiter le cas des solutions positives, et en déduire les négatives.

La première équation impose que *y* et *z* aient le même signe (à cause des exposants impairs de *y* et *z*). La deuxième équation impose que *x* et *z* aient le même signe. Il s'ensuit que *x*, *y* et *z* doivent avoir le même signe. Plus précisément, si (*x*, *y*, *z*) est une solution positive (soit *x*, *y* et *z* positifs) alors on a aussi comme solution négative (*x*', *y*', *z*') avec *x*' = – *x*, *y*' = –*y* et *z*' = –*z*. Et vice versa. Il suffit donc de chercher les solutions positives.

Avec x, y et z positifs, nous pouvons passer en logarithmes, et poser $X = \ln x$, $Y = \ln y$, $Z = \ln z$, étant entendu que le lien entre (x, y, z) et (X, Y, Z) est bijectif. Le système devient :

$$\begin{cases} -2X + 3Y + 5Z = \ln 2 \\ X + 4Y + 3Z = 0 \\ 3X - Y + 2Z = \ln 3 \end{cases}$$

Pour le résoudre, commençons par échanger les lignes L_2 et L_1 :

$$\begin{cases} X + 4Y + 3Z = 0 \\ -2X + 3Y + 5Z = \ln 2 \quad L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ 3X - Y + 2Z = \ln 3 \quad L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + 4Y + 3Z = 0 \\ 11Y + 11Z = \ln 2 \quad L_2 \to L_2 / 11 \\ -13Y - 7Z = \ln 3 \quad L_3 \to -L_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} X + 4Y + 3Z = 0 \\ Y + Z = (\ln 2)/11 \\ 13Y + 7Z = -\ln 3 \quad L_3 \to L_3 - 13L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + 4Y + 3Z = 0 \\ Y + Z = (\ln 2)/11 \\ -6Z = -\ln 3 - (13/11)\ln 2 \end{cases}$$

Ce système en échelons admet une solution unique :
$Z = (13/66) \ln 2 + (1/6) \ln 3$, $Y = (-7/66) \ln 2 - (1/6) \ln 3$, $X = (-1/6) \ln 2 + (1/6) \ln 3$.

En revenant aux inconnues initiales, on trouve la solution positive :

$$\begin{cases} x = 2^{-1/6}\ 3^{1/6} \\ y = 2^{-7/66}\ 3^{-1/6} \\ z = 2^{13/66}\ 3^{1/6} \end{cases}$$

Finalement le système admet deux solutions, la précédente et la solution négative associée.