Calculs numériques

formules de calcul, polynômes, programmation, exercices corrigés

Dans ce chapitre, nous rappelons les principales formules de calcul, en commençant par traiter les nombres écrits en binaire, particulièrement importants en informatique. Nous insistons aussi sur les calculs de polynômes, avec les programmes correspondants.

1. Les nombres en binaire

On travaille habituellement en décimal, c'est-à-dire en base 10 : les nombres que nous utilisons sont formés d'une succession de chiffres compris entre 0 et 9. En lisant un nombre entier (sans virgule) de droite à gauche, on a le chiffre des unités, puis le chiffre des dizaines, puis celui des centaines, des milliers, etc. Cela veut dire qu'un nombre qui s'écrit 329 est égal à 3.100 + 2.10 + 9.

Mais il existe d'autres bases possibles. Un ordinateur se prête bien au calcul le plus simple, du style oui-non. Il s'agit du calcul en binaire, en base 2, avec l'utilisation exclusive des deux chiffres 0 et 1. Par exemple le nombre qui s'écrit en binaire 10011 est égal à

$1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 = 16 + 2 + 1 = 19$ en décimal. Nous allons voir comment effectuer la conversion binaire $\leftrightarrow$ décimal.

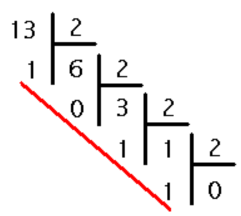
1.1. Comment passer du décimal en binaire ?

Par exemple le nombre (en décimal) 13 s'écrit en binaire 1101, soit :

$1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 13$ en allant des poids forts aux poids faibles, ou si l'on préfère 1011, soit $1.2^0 + 0.2^1 + 1.2^2 + 1.2^3 = 13$ en allant des poids faibles aux poids forts, et l'on peut y ajouter autant de 0 qu'on le désire. Par exemple 13, qui s'écrit 1011 sur une longueur minimale 4, peut s'écrire sur une longueur 6 sous la forme 101100 en allant des poids faibles aux poids forts.

Pour obtenir ce nombre, on commence par diviser 13 par 2. Avec $13 = 1.2^0 + 2.\,(0.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2)$, la division donne comme quotient 6 et comme reste 1, ce qui constitue le coefficient du terme en 2^0, soit le premier chiffre dans l'écriture en binaire en allant des poids faibles aux poids forts.

Puis on recommence avec le quotient $6 = 0.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2$. On le divise par 2, d'où le nouveau quotient 3 et le reste 0, qui est le deuxième chiffre dans l'écriture en binaire de 13. Les restes successifs des divisions par 2 donnent l'écriture en binaire des poids faibles au poids fort. Et l'on fait autant de divisions que l'on désire de chiffres dans l'écriture en binaire. Si l'on en veut le moins possible on s'arrête lorsque le quotient est nul.



Programme

On passe d'un quotient q au quotient suivant par division par 2. Pour harmoniser les notations, on appelle aussi q le nombre initial, ici 13.

```
nombre=13   /* c'est un exemple */; q=nombre ;
while (q !=0)  { r=q%2 ;  afficher r ;  q=q/2 ;}
```

Variante : On veut avoir tous les nombres en binaire qui s'écrivent avec *P* chiffres. Par exemple pour *P*=3, on écrit en binaire tous les nombres de 0 à $2^3 - 1 = 7$, ce qui donne :

000 001 010 011 100 101 110 111, chaque nombre étant écrit en allant des poids faibles aux poids forts. Il suffit pour cela d'effectuer chaque fois *P* divisions. Voici le programme complet, avec les déclarations préliminaires.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define P 5    /* ici pour avoir tous les nombres ayant cinq chiffres en binaire */
int main()
{ int nombre,q,i,r;
for (nombre=0 ; nombre < pow(2, P) ; nombre++)    /* pow(2,P) donne 2^P */
  { q=nombre ;
    printf("\n%d: ", nombre);  /*on va à la ligne et on affiche le nombre décimal*/
    for(i=0 ;i<P ; i++)  { r=q%2 ; printf(« %d », r)  ;  q=q/2 ;}  /* nombre en binaire */
  }
getchar() ;return 0 ;
}
```

Remarquons que si l'on veut passer d'un nombre en décimal à un nombre en base *N*, il suffit de remplacer 2 par *N* dans les programmes précédents.

1.2. Comment passer du binaire au décimal ?

On part d'un nombre écrit en binaire sur une longueur *L*, en allant des poids faibles aux poids forts. Il est placé dans un tableau *b*[*L*]. On calcule les puissances successives de 2, en faisant une multiplication par 2 à chaque fois, ce qui s'écrit ainsi :

puiss2 = 2 puiss2*, en partant de *puiss2=1.* On prend ou on ne prend pas cette puissance selon qu'il y a 1 ou 0 dans le tableau *b*[]. Les résultats sont ajoutés au fur et à mesure dans une variable de *cumul*. A la fin *cumul* contient le nombre en décimal. D'où le programme :

```
déclarer et remplir le tableau b[L]
puiss2=1 ; cumul=b[0] ;
for(i=1; i<L; i++)  { puiss2=2*puiss2;  if b[i]==1) cumul+=puiss2; }
afficher cumul
```

2. Les divers types de nombres

On appelle :

N l'ensemble formé par les nombres entiers naturels : ***N***={0,1,2,3,…}

Z l'ensemble des nombres entiers relatifs ***Z***={ …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}

D l'ensemble des nombres décimaux, qui sont les nombres à virgule ayant un nombre fini de décimales derrière la virgule, comme 3,137 ou –45,9876. Ils peuvent aussi s'écrire avec une infinité de chiffres derrière la virgule à condition de se terminer par une infinité de 0. Ces nombres sont aussi tous de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec *a* entier.

Q l'ensemble des nombres rationnels, qui sont des fractions de deux nombres entiers, comme 1/3 ou – 56/19.

R l'ensemble des nombres réels, s'écrivant avec une virgule et une infinité de chiffres derrière la virgule, comme 1/3 ou $\sqrt{2}$. L'ensemble ***R*** est formé des nombres rationnels (comme 1/3) et des nombres non rationnels, dits irrationnels (comme $\sqrt{2}$).

Ces ensembles sont emboîtés les uns dans les autres :

$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$
(le symbole $\subset$ indiquant qu'un ensemble est inclus dans un autre).

Exercice 1 : *Montrer que* $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel*

Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Il s'écrirait alors $\sqrt{2} = a/b$, soit $a = b\sqrt{2}$ ou encore $a^2 = 2b^2$. Faisons appel au théorème fondamental de l'arithmétique, qui dit que tout nombre entier s'écrit de façon unique comme produit de nombres premiers. Les nombres a et b se décomposent chacun en produit de nombres premiers (comme 2, 3, 5, 7, …), Un exemple : $12 = 2^2. 3$. Notamment a possède soit zéro 2, soit un 2, soit deux 2, etc. De même pour b. A son tour le nombre au carré a^2 possède soit zéro 2, soit deux 2, soit quatre 2, etc. : il contient un nombre pair de 2. Et de même b^2. Mais si a^2 possède un nombre pair de 2, $2b^2$ en a un nombre impair. On ne peut jamais avoir $a^2 = 2\ b^2$. On tombe sur une contradiction. Notre supposition était fausse. Conclusion : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 2 : *Montrer que tout nombre rationnel peut s'écrire avec une infinité de chiffres derrière la virgule, avec à partir d'un certain moment la répétition infinie d'un même bloc de chiffres. Conséquence : un nombre irrationnel s'écrit avec un nombre infini de chiffres derrière la virgule, sans qu'il y ait jamais la répétition infinie d'un même bloc de chiffres.*

Réponse dans le *chapitre 11* sur l'arithmétique.

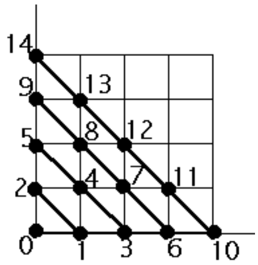
Exercice 3 : *Comment fabriquer un nombre réel quelconque ?*

Il suffit de prendre un nombre au hasard entre 0 et 9, et de recommencer éternellement, en ayant mis une virgule quelque part. On obtient une suite de chiffres qui est un nombre réel quelconque. Conséquence : En fabriquant ainsi un nombre réel quelconque, la probabilité d'avoir la répétition infinie d'un même bloc de chiffres est nulle, on n'aura quasiment jamais un nombre rationnel. Cela indique qu'il y a infiniment plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels.

Revenons maintenant à la réalité. Un ordinateur travaille dans le fini (comme l'être humain d'ailleurs). Jamais on ne pourra construire une succession de chiffres infinie sur une machine. Il faudra bien s'arrêter. Les nombres traités par une machine ont tous une limite de taille. Au-delà de cette taille, en règle générale, tout se passe comme s'il n'y avait que des 0. D'où la notion de nombres flottants, qui sont une pâle approximation des nombres réels. Ceux-ci ne font partie que de l'univers parfait des mathématiques.

Propriété : L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable. Celui des nombres réels ne l'est pas (on dit qu'il a la puissance du continu).

Un ensemble est dénombrable lorsque l'on peut numéroter tous ses éléments, autrement dit on associe à chaque élément un nombre entier. Un nombre rationnel positif ou nul est une fraction de deux nombres entiers naturels. Plaçons-nous dans un repère et prenons les points à coordonnées entières dans le quart de plan positif. Chacun de ces points, formé de deux nombres qui sont ses coordonnées, peut représenter une fraction de ces deux nombres, c'est-à-dire un nombre rationnel. On pourra numéroter les nombres rationnels si l'on peut numéroter les points à coordonnées entières dans le quart de plan. Voici un moyen de le faire, par montées sur les diagonales successives :



Finalement, on peut considérer qu'il y a autant de nombres rationnels que de nombres entiers.

Mais qu'en est-il avec les nombres réels ? Contentons-nous de prendre les nombres réels dans [0 1[, qui s'écrivent tous avec un 0 à gauche de la virgule, et une infinité de chiffres après la virgule. Nous allons montrer que l'on ne peut pas les numéroter tous, en utilisant la méthode de la diagonale élaborée par Georg Cantor vers 1880, ce qui fit sensation à l'époque.

Faisons un raisonnement par l'absurde. Imaginons que l'on ait trouvé –miraculeusement- un moyen de les numéroter. Cela donne :

1 : 0 , **3** 1 4 1 5 9 …
2 : 0 , 2 **5** 3 8 9 4 …
3 : 0 , 1 4 **9** 5 6 8 …
4 : 0 , 1 2 6 **3** 2 2 …
5 : 0 , 8 9 6 4 **3** 6 …
etc.,
et tous les nombre réels sont censés être numérotés.

Prenons alors les chiffres soulignés situés sur la diagonale, ce qui donne le nombre 0,35933….. Enlevons maintenant 1 à chacun de ces chiffres derrière la virgule (et si c'est 0 mettons 9). On obtient un nombre réel A = 0,24822… Ce nombre A ne peut pas être le nombre numéro 1, (car ils ont un chiffre différent au moins) ni le nombre numéro 2, ni aucun des nombres numérotés. Il n'a donc pas été numéroté, contrairement à ce qui avait été annoncé. On tombe sur une contradiction. L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

3. Les deux opérations sur les nombres réels

Il s'agit de l'addition et de la multiplication. Les deux autres opérations, soustraction et division, s'en déduisent :

Soustraire, c'est additionner l'opposé : $a - b = a + (-b)$

Diviser, c'est multiplier par l'inverse : $\frac{a}{b} = a \, . \, b^{-1}$. Seule la division par 0 est impossible.

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $a\,(b + c) = ab + ac$.

Quand on passe de $a\,(b + c)$ à $ab + ac$, on dit que l'on **développe** (passage d'une multiplication à une addition).
Quand on passe de $ab + ac$ à $a\,(b + c)$ on dit qu'on **factorise**, avec a facteur commun.

4. Egalités, inégalités

* On a toujours $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$. [1] On ne change pas une égalité quand on ajoute ou qu'on enlève le même nombre des deux côtés.

---

[1] Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit « équivaut à ». Il indique une équivalence à double sens : si $a = b$ alors $a + c = b + c$, en ajoutant c des deux côtés. Et inversement si $a + c = b + c$, alors $a = b$ (en soustrayant c des deux côtés)

* Avec c différent de 0, on a toujours $a = b \Leftrightarrow a\,c = b\,c$ [2]

* Si $a = b$ et $c = d$, alors $a + c = b + d$, et on a aussi $a\,c = b\,d$.

Pour les inégalités, il faut faire plus attention :

* On a toujours $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

* Si l'on a $a < b$ et que l'on multiplie des deux côtés par un nombre c positif, l'inégalité est préservée : $a\,c < b\,c$.
Si l'on a $a < b$ et que l'on multiplie des deux côtés par un nombre c négatif, l'inégalité change de sens : $a\,c > b\,c$. [3]
Avec c **strictement positif** , $a < b \Leftrightarrow a\,c < b\,c$

* Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

* Avec a, b, c, d **tous positifs**, si l'on a $a < b$ et $c < d$, alors $a\,c < b\,d$.

Règle pour prouver une inégalité

Dans les problèmes, lorsqu'il est demandé de démontrer une certaine inégalité du style $a < b$, comment faire ? On a intérêt à former la différence $b - a$ et par des égalités successives, on arrive à un résultat simple où l'on voit que le signe est positif. Au lieu de travailler sur une inégalité, on traite des égalités et on se ramène à un problème de signe.

Exercice 4

On considère deux nombres réels a et b tels que $0 < a \le b$. Montrer que :

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le b.$$

Il y a quatre inégalités à prouver. On forme les différences :

* $\frac{2ab}{a+b} - a = \frac{2ab - a^2 - ab}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b} \ge 0$ tout étant positif, d'où $\frac{2ab}{a+b} \ge a$

* $\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab}\,(1 - \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}) = \sqrt{ab}\;\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b} = \sqrt{ab}\;\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \ge 0$, d'où $\sqrt{ab} \ge \frac{2ab}{a+b}$.

* $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \ge 0$, d'où $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

* $b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} \ge 0$, d'où $b \ge \frac{a+b}{2}$.

---

[2] On n'a pas l'équivalence $\Leftrightarrow$ si c est nul. Car dans ce cas, $a = b$ entraîne bien $a\,c = b\,c$ (tout est nul), mais par contre à partir de $a\,c = b\,c$, on n'a pas le droit de diviser par $c = 0$, et l'on ne peut pas en déduire que $a = b$.

[3] En effet formons $b\,c - a\,c = c\,(b - a) < 0$, car $c < 0$ et $b - a > 0$, d'où finalement $b\,c < a\,c$

Remarque : On appelle $m = \frac{a+b}{2}$ la moyenne arithmétique de a et b, $g = \sqrt{ab}$ leur moyenne géométrique, et $h = \frac{2ab}{a+b}$ ou encore $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ leur moyenne harmonique. On vient de montrer que $h \leq g \leq m$.

5. Opération puissance

Définition

$a^n = a \times a \times a \ldots \times a$ répétés n fois, pour n entier naturel ≥1, et $a^0 = 1$. Dans a^n, le nombre n est appelé l'exposant.

Cette définition est ensuite élargie aux entiers négatifs, en prenant $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,

puis aux nombres rationnels $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$, en particulier $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Plus tard on l'étend même à des exposants qui sont des nombres réels quelconques, en s'aidant de la fonction exponentielle.

Formules

Il existe trois formules sur les puissances, et pas plus :

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & a^{p+q} = a^p a^q \\ 2) & (a^p)^q = a^{pq} \\ 3) & (ab)^n = a^n b^n \end{array}}$$

Exercice 5 : *Jeu de puissances*

Imaginons que l'on veuille calculer sur ordinateur une grosse puissance d'un nombre, comme 2^{37} par exemple. Passons outre le fait qu'il risque d'y avoir un dépassement.[4] Il suffit de faire 2^{37} = 2 . 2 . 2 … . 2, soit 36 multiplications (ou 37 si l'on part de 1). Le programme se réduit à :

```
nombre=2; exposant=37; puiss2=1 ;
for(i=0 ; i<exposant ; i++) puiss2=2*puiss2 ;
afficher puiss2.
```

Il existe une meilleure méthode, demandant moins de calculs. On commence par écrire 37 en binaire, soit 37 = 32 + 4 + 1, le nombre en binaire étant 100101 dans l'ordre des puissances décroissantes, ou bien 101001 dans l'ordre des puissances croissantes. On a alors $2^{37} = 2^{1+4+32} = 2^1 \times 2^4 \times 2^{32}$. Pour la programmation, on fabrique la suite des puissances :

$2^0 \to 2^1 \to 2^2 \to 2^4 \to 2^8 \to 2^{16} \to 2^{32}$, ce qui revient à élever au carré à chaque fois.

Et selon qu'il leur correspond un 1 ou un 0 dans l'écriture en binaire, on prend cette puissance ou on ne la prend pas pour le calcul de 2^{37}. Finalement, on n'a fait que 6 multiplications, au lieu de 36.

```
nombre=3 ; exposant=37 ; puissance=1 ; resultat=1 ;
q=exposant ;
```

[4] En fait on calcule souvent une forte puissance comme 2^{37}, mais en se ramenant modulo un nombre m donné Les calculs se font alors entre 0 et m-1, et il ne risque pas d'y avoir le moindre débordement. Si ce n'est pas le cas, on a intérêt à déclarer les nombres en *flottants* (*float*) ou mieux encore en *double*.

```
while (q !=0)
   { puissance=puissance*puissance ;
     r=q%2 ; if (r==1) resultat= puissance*resultat ;
     q=q/2 ;
   }
afficher resultat
```

6. Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Généralisation : **Formule du binôme**

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n b^n$$

$$avec \quad C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}$$

7. Racine carrée $\sqrt{a}$

Définition

Prenons un nombre *a* positif ou nul. La racine carrée de *a* que l'on note $\sqrt{a}$ est le nombre positif ou nul qui, élevé au carré, donne *a*.

Cette définition comporte trois faits distincts :

- La racine carrée d'un nombre *a* existe si et seulement si *a* est positif ou nul (si le nombre *a* est négatif, il est impossible de trouver un nombre qui, élevé au carré, donnerait *a* puisqu'un carré est toujours positif ou nul).
- Une fois que la racine carrée existe, elle est à son tour toujours positive ou nulle : $\sqrt{a} \geq 0$.
- La racine carrée est telle que $(\sqrt{a})^2 = a$.

Propriétés

1) Avec *a* et *b* positifs ou nuls $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. On peut casser une racine carrée en multiplication (et aussi en division). [5]

Remarque : si *a* et *b* sont tous deux négatifs ou nuls, on a $a\,b \geq 0$, d'où $\sqrt{ab}$ existe, tout comme $\sqrt{-a}$ et $\sqrt{-b}$, et la formule s'écrit $\sqrt{ab} = \sqrt{-a}\sqrt{-b}$.

2) $\sqrt{a^2} = a$ si a est positif ou nul, ou $-a$ si a est négatif. Ou encore $\sqrt{a^2} = |a|$.

[5] Attention : cela n'est pas vrai pour l'addition : $\sqrt{a+b}$ n'est pas (du tout) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

3) Avec a et b positifs ou nuls, $a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$.

Ou encore, avec a et b positifs ou nuls, $a = b$ équivaut à $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

4) L'équation $x^2 = a$, du second degré à une inconnue x, avec a donné, n'admet aucune solution si a est négatif, et en admet deux si a est positif ou nul : $x = \pm\sqrt{a}$.

5) Lorsque x (≥ 0) augmente, sa racine carrée $\sqrt{x}$ augmente.

6) Lorsque x est entre 0 et 1, $x^2 \leq x$, ou encore $x \leq \sqrt{x}$. Lorsque x est supérieur ou égal à 1, $x^2 \geq x$, ou encore $x \geq \sqrt{x}$.

Remarque pour la programmation

Pour utiliser les fonctions mathématiques du langage *C*, il faut d'abord intégrer la bibliothèque correspondante, en faisant *#include <math.h>* . Pour faire une puissance, on dispose de la fonction *pow*(), par exemple *pow*(2,5) ramène $2^5 = 32$. Pour faire une racine carrée, on a la fonction *sqrt*(), par exemple *sqrt*(64) ramène $\sqrt{64} = 8$.

Quantité conjuguée

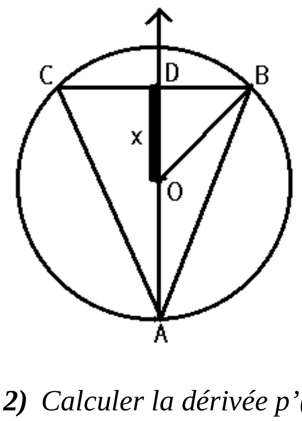
Par définition la quantité conjuguée de $a+b\sqrt{c}$ est $a-b\sqrt{c}$. On peut alors transformer une expression comme celle-ci :

$$a+b\sqrt{c} = \frac{(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})}{a-b\sqrt{c}} = \frac{a^2-b^2c}{a-b\sqrt{c}}$$

où l'on a multiplié en haut et en bas par la quantité conjuguée. On verra plus tard, et en de nombreuses occasions, l'intérêt d'une telle transformation. En particulier dans l'exercice suivant.

Exercice 6

Montrer que parmi les triangles isocèles inscrits dans un cercle, celui qui a un périmètre maximal est le triangle équilatéral.



Pour cela :

1) *Prendre un triangle isocèle ABC inscrit dans le cercle de rayon 1, comme sur le dessin ci-contre. On pose OD =x , avec x entre –1 et 1. Déterminer son demi-périmètre p en fonction de x.*

On a $p = DB + AB$. En appliquant le théorème de Pythagore dans OBD et ADB, on trouve que $DB^2 = 1 - x^2$ et $AB^2 = (1+x)^2 + 1 - x^2 = 2(1 + x)$.

D'où $p(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{2}\sqrt{1+x}$

2) *Calculer la dérivée p'(x) et déterminer son signe. Conclure.*

$$p'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+x}} = \frac{-2x+\sqrt{2(1-x)}}{2\sqrt{1-x^2}}$$

. On voit que si x est négatif, $p'(x)$ est positif. Mais que se passe-t-il pour x positif ? Pour s'en sortir, on multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée du numérateur :

$$p'(x) = \frac{2(1-x)-4x^2}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{2(1-x)}+2x)} = \frac{2-2x-4x^2}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{2(1-x)}+2x)}$$
$$= \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{2(1-x)}+2x)}$$

Pour $x \geq 0$, le dénominateur est positif, et $p'(x)$ est du signe de $1 - x - 2x^2$, qui a pour racines 1/2 et –1. Entre les racines (par suite entre 0 et 1/2), le trinôme est positif. On en déduit les variations de $p(x)$. Entre –1 et 1/2, $p(x)$ croît, et de 1/2 à 1, $p(x)$ décroît. Le périmètre admet un maximum lorsque x vaut 1/2, ce qui signifie que le triangle est équilatéral (puisque cos(BOD) = 1/2, l'angle BOD vaut 60°).

8. Valeur absolue

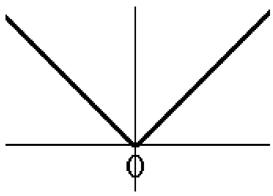
La valeur absolue d'un nombre a, notée $|a|$, est le nombre a auquel on a gommé son signe. Cela signifie que : $|a| = a$ si $a \geq 0$, ou $-a$ si $a \leq 0$.

Propriétés

1) $|a| \geq 0$
2) $|a\,b| = |a|\,|b|$
3) $|a+b| \leq |a| + |b|$

Règle pratique : En présence d'une valeur absolue, on a souvent intérêt à la supprimer en distinguant deux cas, selon que ce qui est sous elle est positif ou négatif.

Exemple : Tracer la courbe représentative d'équation $y = |x|$



On distingue deux cas : Si $x \geq 0$, on a $y = x$, ce qui donne une demi-droite. Et si $x \leq 0$, on a $y = -x$, ce qui donne aussi une demi-droite. Les deux demi-droites ont pour extrémité commune le point O. La fonction correspondante est continue sur ***R*** et elle est dérivable partout sauf en O.

9. Polynômes

Un polynôme $p(x)$ est une fonction de la variable x s'écrivant comme une somme de puissances de x avec des coefficients. Son degré est l'exposant du terme ayant le plus grand exposant.

Par exemple $p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ est un polynôme de degré 3, et on l'a écrit suivant les puissances décroissantes de x. S'il est écrit suivant les puissances croissantes, cela donne $p(x) = 1 - 2x^2 + x^3$. Plus généralement, un polynôme de degré N s'écrit :

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + a_{N-2} x^{N-2} + ... + a_0 \quad \text{avec } a_N \neq 0.$$

Un polynôme de degré inférieur ou égal à N s'écrit exactement de la même façon, étant entendu que certains coefficients comme a_N, a_{N-1},… peuvent être nuls.

Un polynôme de degré N au plus est tout simplement représenté par ses coefficients successifs de a_N à a_0, comme un vecteur ayant N+1 coordonnées. Pour la programmation, les coefficients sont placés dans un tableau $a[N+1]$. Nous allons utiliser cela pour faire les deux opérations d'addition et de multiplication sur les polynômes.

9.1. Addition de deux polynômes

Imaginons que l'on doive additionner $x^3 - 2x + 4$ et $x^2 + 3x - 5$. Cela donne :
$(x^3 - 2x + 4) + (x^2 + 3x - 5)=x^3 + x^2 + x - 1$. Il suffit d'additionner les coefficients correspondants $a[i]$ et $b[i]$ des deux polynômes. Ou encore additionner les deux vecteurs des coefficients associés aux polynômes.

Le programme est immédiat, en prenant pour N le degré du polynôme de plus haut degré.

```
for(i=0 ; i<=N ; i++) c[i]=a[i]+b[i];
```

Faisons aussi l'affichage de l'opération:

```
printf(" ( ") ;    for(i=N ;i>=0 ;i--) if (a[i]!=0) printf("%d x^%d", a[i],i);
printf(") + ("); for(i=N ;i>=0 ;i--) if (b[i]!=0) printf("%d x^%d", b[i],i);
printf(" = ");    for(i=N ;i>=0 ;i--) if (c[i]!=0) printf("%d x^%d", c[i],i);
```

9.2. Produit de deux polynômes

Prenons un exemple où l'on voit apparaître tous les coefficients même nuls, avec deux polynômes de degré inférieur ou égal à 3 (on a pris le degré le plus élevé des deux polynômes) :

$$\begin{aligned}(x^3 - 2x^2 + 0x + 4)\times(0x^3 + x^2 + 3x - 5) &= x^5 + 3x^4 - 5x^3 \\ &\quad - 2x^4 - 6x^3 + 10x^2 \\ &\quad\quad 4x^2 - 12x + 20 \\ &= x^5 + x^4 - 11x^3 + 14x^2 - 12x + 20\end{aligned}$$

Pour développer le produit des polynômes, on a pris chaque terme du premier, et à chaque fois, on l'a multiplié par les termes du deuxième. Le produit d'un terme de degré i et d'un terme de degré j donne un terme de degré $i+j$. Le produit des deux polynômes de degré au plus N est de degré au plus $2N$.

Pour le programme, on doit d'abord déclarer :

```
int a[N+1],b[N+1], c[2*N+1] ;
```

Puis :

remplir les tableaux a *et* b*, et mettre le tableau* c *à 0. Dans la case* i *des tableaux, on met le coefficient du terme de degré* i*. Dans leurs tableaux, les polynômes sont ordonnés selon leurs puissances croissantes.*

```
for(i=0 ; i<=N ; i++) for(j=0 ; j<=N ; j++)  c[i+j] + = a[i]*b[j];
```

On peut aussi s'y prendre autrement. On se demande d'où provient le terme de degré k (k entre 0 et $2N$). Par exemple le terme en x^3 de l'exemple précédent provient de : $a[3]\ b[0] + a[2]\ b[1] + a[1]\ b[2] + a[0]\ b[3] = 1.(-5) - 2.3 + 0.1 + 4.0 = -11$.

Pour avoir le coefficient $c[k]$ du terme de degré k, on fait le produit $a[k]\ b[0]$ puis on ajoute le produit $a[k-1]\ b[1]$ puis $a[k-2]\ b[2]$, et on poursuit les additions jusqu'à $a[0]\ b[k]$, soit :

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\ b_{k-i}\ .$$

D'où le programme :

```
int a[N+1], b[N+1], c[2*N+1] ;
```

Mettre le tableau c[] à 0

```
for(k=0; k<=2*N; k++)
for(i=0 ; i<=N ; i++) for(j=k-i; j>=0; j--)  c[k]+=a[i]*b[j];
```

9.3. Evaluation d'un polynôme, algorithme de Horner

Etant donné un polynôme $P(x)$ et une valeur x_0 de x, évaluer le polynôme en x_0 signifie calculer $P(x_0)$. Par exemple, l'évaluation du polynôme $x^3 - x^2 + x + 1$ pour $x = 1$ donne 2.

Comment programmer l'évaluation d'un polynôme de degré N ?

Une méthode consisterait à évaluer successivement chaque terme, d'abord le terme de degré N, puis le terme de degré $N - 1$, et cela jusqu'au terme de degré 0. Pour le terme de degré N, il faut $N - 1$ multiplications pour la puissance de x, et une de plus pour avoir $a_N x^N$, puis il en faut $N - 1$ pour le terme de degré $N - 1$, etc., soit au total $N (N+1) / 2$ multiplications, et en plus N additions.

On peut faire beaucoup mieux en calculant progressivement les puissances de x, dans l'ordre croissant, chaque nouvelle puissance étant x fois l'ancienne, et à chaque fois, on multiplie par le coefficient correspondant à la puissance. D'où le programme :

On se donne le degré N *du polynôme, que l'on déclare par :*

```
float a[N+1] ;
```

Puis on se donne les coefficients du polynôme pour remplir le tableau a[N+1]. On se donne aussi la valeur de x *:* x=5./7. ; *par exemple. La variable* puissancex *va contenir les puissances successives de* x *à partir de* puissancex = 1, *soit* x^0. *Le polynôme est calculé suivant les puissances croissantes. Les résultats successifs à additionner sont placés dans la variable* cumul, *où l'on met* a[0] *au départ.*

```
puissancex=1.;   cumul=a[0];
for(i=1; i<=N; i++)  { puissancex=x*puissancex;   cumul += a[i]*puissancex;}
printf("%3.5f",cumul);
```

A l'étape $i = 1$, c'est $1 - 2x$ qui se trouve dans *cumul*, puis à l'étape 2 : $1 - 2x + 3x^2$, etc. Le programme ne demande plus que N multiplications et N additions.

Par exemple, pour le polynôme $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4 + 4x^5$ avec $x = 5/7$, on trouve 0,90867 (Vérifiez-le).

Une légère variante, appelée algorithme de Horner, consiste à « parenthéser » le polynôme toujours dans le sens des puissances croissantes, soit dans notre exemple :

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4 + 4x^5 = 1 + x\,(-2 + x\,(3 + x\,(-4 + x\,(2 + x(4))))).$$

Le calcul doit se faire à partir de la plus petite parenthèse (*parenthese* = 4 ici) correspondant à la plus forte puissance de x. Puis on passe d'une parenthèse à la parenthèse suivante en multipliant par x et en ajoutant le coefficient correspondant du polynôme, soit le programme :

```
parenthese=a[N];
for(i=N-1; i>=0; i--) parenthese=x*parenthese+a[i];
printf("\n%3.5f",parenthese);
```

9.4. Interpolation d'un polynôme

C'est en quelque sorte l'opération inverse de l'évaluation.

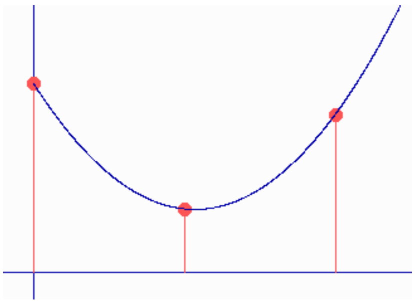
On se donne N points par leurs coordonnées (x_i, y_i), les abscisses x_i étant toutes différentes. On veut trouver une fonction polynomiale dont la courbe représentative passe par ces N points. C'est cela que l'on appelle interpolation. On démontre qu'il existe un polynôme unique de degré $N - 1$ dont la courbe passe par les N points.

Par exemple, on sait que par deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) d'abscisses différentes passe une droite unique d'équation $y = a\,x + b$. Plus précisément la pente de la droite est $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, (la variation verticale rapportée à la variation horizontale) et en exprimant qu'elle passe par le point (x_0, y_0), son équation est de la forme :

$y - y_0 = a\,(x - x_0)$, d'où $y = a\,x + y_0 - a\,x_0$, et $b = y_0 - a\,x_0$. Remarquons, pour préparer ce qui suit, que l'équation est aussi de la forme $y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$.

Par trois points passe une parabole unique d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$. Cette équation s'écrit aussi :

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$



Mais pourquoi ? D'abord on constate en développant que cette équation est du second degré en x. C'est bien l'équation d'une parabole. Faisons maintenant $x = x_0$: on constate que le premier des trois termes se réduit à y_0 et que les deux autres termes sont nuls. D'où $y = y_0$: la parabole passe par le point (x_0 , y_0). On ferait de même avec les deux autres points. On vient de trouver la parabole qui passe par les trois points. En développant et en ordonnant, on trouverait les coefficients a, b, c correspondant à $y = a\,x^2 + b\,x + c$.

Et cela se généralise, avec N points indexés de 0 à N-1. Profitons-en pour donner l'écriture concentrée obtenue en utilisant le symbole de sommation Σ et celui de produit Π :

$$y = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

Par exemple pour $n = 4$, cela s'écrit :

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} y_4$$

Programmation

On se donne le nombre N des points et leurs coordonnées qui sont placées dans les tableaux $x[N]$ et $y[N]$ déclarées en flottants ou plutôt en *double*. Le calcul de la formule précédente fait intervenir l'addition de N termes. Le résultat est un polynôme de degré $N - 1$ dont on note *coeff*[i] le coefficient du terme de degré i.

Avant de commencer les calculs, tous les *coeff*[*i*] sont mis à 0.
Puis on commence par calculer le terme numéro 0, qui est :

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{N-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_{N-1})}y_0.$$

Son dénominateur, noté *deno*[0] est un nombre que l'on calcule facilement par multiplications successives. Son numérateur est un produit de polynômes du premier degré. On entre le premier polynôme x - x_1 en notant ses coefficients *b*[0] = – *x*[1] et *b*[1] = 1. Puis on le multiplie par $x - x_2$, ce qui donne un polynôme de degré *k* = 2 dont on note les coefficients *B*[0], *B*[1], *B*[2]. On obtient :

B[0] = b[0]*(- x[2])
B[1] = b[1]*(-x[2]) + b[0]
B[2] = b[1]

Cela fait, on met les coefficients *B*[] dans *b*[] pour préparer l'étape suivante.

A l'étape *k* = 3, on multiplie le polynôme précédent à coefficients *b*[] par x - x_3 (*k* = 3) ce qui donne un polynôme de degré *k* = 3 à coefficients *B*[] que l'on calcule comme précédemment.

B[0] = b[0]*(- x[2])
B[1] = b[1]*(-x[2]) + b[0]
B[2] = b[2]*(-x[2]) + b[1]
B[3] = b[2]

Cela fait on met *B*[] dans *b*[] et on passe à la multiplication suivante, cela jusqu'à la multiplication par $x - x_{N-1}$.

Puis le polynôme obtenu (de degré *N* – 1) est multiplié par *y*[0], et enfin divisé par *deno*[0]. On obtient ainsi le polynôme correspondant au terme numéro 0, avec ses coefficients notés *coeff*[]. On en déduit le début du programme :

```
for(i=0; i<N; i++) coeff[i]=0;

b[0]=-x[1]; b[1]=1;
for(k=2;k<N;k++)
  { B[0]=-b[0]*x[k];
    for(i=1;i<k;i++) B[i]=-b[i]*x[k]+b[i-1];
    B[k]=b[k-1];
    for(i=0;i<=k;i++) b[i]=B[i];
  }
for(m=0;m<N;m++) {B[m]=B[m]*y[0];}
deno[0]=1.;
for(i=0;i<N;i++) if (i!=0) deno[0]*=(x[0]-x[i]);
for(m=0;m<N;m++) { coeff[m]=B[m]/deno[0]; }
```

Ce que l'on a fait pour le terme numéro 0, on le refait pour chacun des autres termes, en les additionnant l'un après l'autre. Par exemple le terme numéro 1 est :

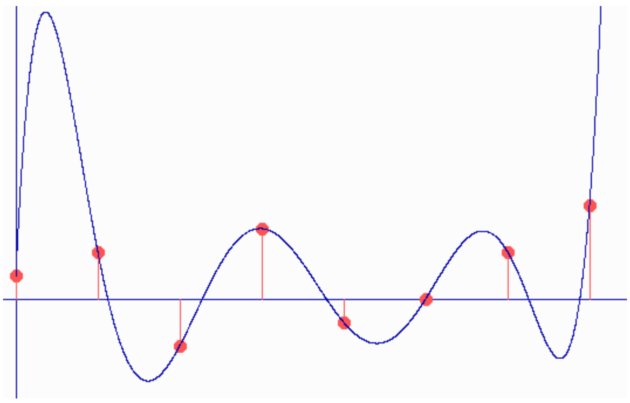
$$\frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_{N-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_{N-1})}y_1$$

Pourquoi avoir séparé le calcul du terme numéro 0 des autres ? Parce qu'il est le seul à commencer par $x - x_1$, alors que tous les autres commencent tous par $x - x_0$, ce qui modifie les conditions initiales du calcul. Autre différence : au cours du calcul, quand on multiplie le polynôme $(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$ par $(x - x_k)$ lors du cumul des multiplications, le degré du polynôme obtenu n'est pas forcément k, car un des facteurs est enlevé, le terme numéro t ne contenant pas $x - x_t$., et ce terme peut se trouver avant ou après le terme numéro k lorsque k va de 0 à $N - 1$.

Le calcul des termes du numéro $t = 1$ à $t = N - 1$ se fait dans une grande boucle, et c'est la suite du programme :

```
for(t=1;t<N;t++)
 {
  b[0]=-x[0]; b[1]=1; degre=1;
  for(k=1;k<N;k++) if (k!=t)   /* noter que k n'est plus le degré des polynômes, à
    {degre++;                  cause du trou k ≠ t ; il faut gérer le degré par une
     B[0]=-b[0]*x[k];          variable particulière degre  */
     for(i=1;i<degre;i++) B[i]=-b[i]*x[k]+b[i1];      B[degre]=b[degre-1];
     for(i=0;i<=degre;i++) b[i]=B[i];
    }
  for(m=0;m<N;m++) {B[m]=B[m]*y[t];}
  deno[t]=1.;   for(i=0;i<N;i++) if (i!=t) deno[t]*=(x[t]-x[i]);
  for(m=0;m<N;m++) { coeff[m]+= B[m] / deno[t]; }
 }
```

Il ne reste plus qu'à tracer la courbe correspondant au polynôme de degré N-1 dont les coefficients sont dans *coeff*[], et à vérifier qu'elle passe bien par les N points que l'on s'est donné.



Un exemple avec 8 points et la courbe d'interpolation

10. Exercices

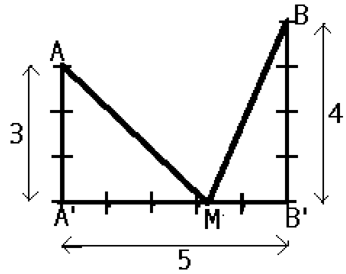
10.1. *Un produit soldé à 75% vaut 50 euros. Combien valait-il avant les soldes ?*

Rappelons que 75% signifie 75 / 100 = 0,75.

Appelons x le prix du produit avant les soldes. Il est diminué de 75% lorsqu'il est soldé, soit

$x - (75/100)\, x = 50$
$x - 0{,}75\, x = 50$
$0{,}25\, x = 50$
$x = 200$ euros.

10.2. a) *Sur le dessin suivant, on dispose un point M tel que AM = BM. Quelle est la position de M sur [A' B'] ? On posera x = AM.* [6]



Appliquons le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles *A'MA* et *B'MB* :

$x^2 + 9 = MA^2$ et $(5 - x)^2 + 16 = MB^2$. Avec $MA = MB$:

$x^2 + 9 = (5 - x)^2 + 16$
$x^2 + 9 = 25 - 10\,x + x^2 + 16$
$10\,x = 32$
$x = 3{,}2$

b) *Construire géométriquement le point M.*

Puisque *AM = BM*, *M* est sur la médiatrice de [*AB*]. Il est aussi sur (*A' B'*), d'où à l'intersection des deux droites.

10.3. *Montrer que parmi tous les rectangles ayant la même aire A, le carré est celui des rectangles qui a le plus petit périmètre. On pourra appeler x et y les longueurs des côtés des rectangles, et p = x + y le demi-périmètre.*

Ramenons nous à une seule inconnue *x*, en écrivant $y = A / x$. Le demi-périmètre *p* est une fonction $p(x)$ telle que $p(x) = x + A / x$. Dérivons : $p'(x) = 1 - A / x^2$. La dérivée s'annule pour $x^2 = A$, d'où $x = \sqrt{a}$ puisque *x* est positif. Lorsque *x* augmente, A / x^2 diminue, $- A / x^2$ augmente, donc la dérivée passe du signe – au signe +. La fonction $p(x)$ admet un minimum, obtenu pour $x^2 = A$, d'où $x = y$, et l'on a bien un carré.

10.4. *On rappelle que la vitesse V est égale à la distance d parcourue divisée par le temps t que l'on a mis pour parcourir cette distance (soit d = V t, ce qui sous-entend que la vitesse est restée constante pendant le temps t, ou encore c'est la vitesse moyenne).*

a) *Une voiture roule à 60 km/h pendant une heure puis à 90 km/h pendant une heure. Quelle est sa vitesse moyenne ?*

En deux heures, la voiture parcourt 150 km. Sa vitesse moyenne est 150 / 2 = 75 km/h. Il s'agit de la moyenne arithmétique de 90 et 60.

b) *Elle roule à 60 km/h pendant deux heures puis à 90 km/h pendant une heure. Quelle est sa vitesse moyenne ?*

---

[6] Il s'agit d'un problème classique, ainsi posé par Al Karagi dans son *Livre suffisant sur la science de l'arithmétique* (années 1000 au Moyen Orient) : Sur les rives opposées d'un fleuve large de 50 aunes poussent deux palmiers l'un en face de l'autre, le premier haut de 20 aunes, et l'autre de 30 aunes. Au sommet des deux palmiers se trouvent deux oiseaux qui aperçoivent à la surface un poisson. Ils se précipitent tous les deux en même temps sur le poisson et l'atteignent en même temps. Il faut trouver le point de rencontre des oiseaux et la longueur (identique) du chemin parcouru par chacun. Ce problème est une application du « théorème de Pythagore », fort connu aussi en Chine et en Inde.

En trois heures, la voiture parcourt 120 + 90 = 210 km. Sa vitesse moyenne est 210 / 3 = 70 km/h. Il s'agit d'une moyenne pondérée.

c) *Elle route entre deux villes A et B à 60 km/h de A à B, puis à 90 km/h de B à A. Quelle est sa vitesse moyenne ?*

Appelons t_1 le temps mis pour parcourir la distance d de A à B, soit $d = 60\ t_1$. De même avec t_2 temps mis pour aller de B à A : $d = 90\ t_2$. On en déduit $t_1 = d / 60$, $t_2 = d / 90$, et
$t_1 + t_2 = d / 60 + d / 90$.

D'autre part, en appelant V la vitesse moyenne : $2\ d = V\ (t_1 + t_2)$, ou $t_1 + t_2 = 2d / V$.

En égalisant, $2d / V = d / 60 + d / 90$
$2 / V = 1 / 60 + 1 / 90$
$2 / V = 5 / 180$
$V = 360 / 5 = 72$ km/h. Il s'agit de la moyenne harmonique entre les deux nombres 60 et 90.

Pour aller plus loin (si vous êtes mordu !) :

10.5. *Un petit avion fait du 150 km/h. Il effectue un aller-retour entre deux villes A et B distantes de 308 km. Le vent souffle de A vers B. La vitesse de l'avion est augmentée de celle du vent dans le sens AB, et diminuée d'autant dans le sens BA. Calculer la vitesse du vent sachant que l'avion met une demi-heure de plus au retour qu'à l'aller ?*

Appelons v la vitesse du vent, t_1 et t_2 les temps mis par l'avion à l'aller et au retour. On a :

$(150+v)t_1 = 308$ et $(150-v)t_2 = 308$ avec $t_2 - t_1 = 0{,}5$. On obtient l'équation en v :
$\frac{308}{150-v} - \frac{308}{150+v} = 0{,}5$, ce qui donne après calculs $v^2 + 1232\ v - 22500 = 0$. La seule solution positive est v = – 616 + $\sqrt{401956}$ = – 616 + 634 = 18 km/h.

10.6. *Une armée s'étire sur 50 km de long, et avance à vitesse constante. Un messager part de l'arrière pour délivrer un message à l'avant, puis il revient à l'arrière, toujours à la même vitesse. Pendant sa course, l'armée parcourt 50 km. Quelle est la distance parcourue par le messager ?*
Indication : en appelant V la vitesse du messager et v celle de l'armée, on aura intérêt à utiliser comme inconnue x = V / v.

Appelons t_1 le temps mis par le messager de l'arrière à l'avant de l'armée, et t_2 le temps mis au retour. A l'aller, le messager parcourt la distance $V\,t_1$ tandis que l'armée avance de $v\ t_1$, ce qui donne l'équation : $V\ t_1 = v\ t_1 + 50$. Au retour, le messager parcourt la distance $V\ t_2$ et l'armée avance de $v\ t_2$, ce qui donne l'équation : $V\ t_2 = 50 - v\ t_1$. Enfin, pendant le temps $t_1 + t_2$, l'armée a parcouru 50 km, soit la troisième équation $v\ (t_1 + t_2) = 50$.

Les deux premières équations se réécrivent : $t_1 = \frac{50}{V-v}$, $t_2 = \frac{50}{V+v}$, d'où

$t_1 + t_2 = 50\ (\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v})$. Combinons cela à la troisième équation $v\ (t_1 + t_2) = 50$.

$v\ (\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}) = 1$ ou encore $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1$, $\frac{2x}{x^2-1} = 1$, $x^2 - 2x - 1 = 0$. Cette équation a comme seule solution positive $1 + \sqrt{2}$.

La distance totale parcourue par le messager est $D = V\,(t_1 + t_2) = \dfrac{V}{v}v\,(t_1 + t_2) = x\,50.$ Finalement, $D = 50\,(1 + \sqrt{2}\,) \approx 120{,}7$ km.