Suites à récurrences faisant intervenir des moyennes

(prolongement du chapitre sur les suites numériques)

Nous nous intéressons au comportement à l'infini de suites dont les récurrences d'ordre deux font intervenir les moyennes arithmétique, géométrique, ou harmonique. Voici ces suites et les résultats obtenus, que nous démontrerons ensuite.

1) $u_{n+2} = (u_{n+1} + u_n) / 2$, avec u_0 et u_1 donnés quelconques. Sa limite est $(u_0 + 2u_1) / 3$.
2) $u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}\ u_n}$, avec u_0 et $u_1 > 0$. Sa limite est $\sqrt[3]{u_0 u_1^{\,2}}$
3) $u_{n+2}= -(u_{n+1} + u_n)/2$, avec u_0 et u_1 quelconques. Sa limite est 0.
4) $2/u_{n+2} = 1/u_{n+1} + 1/u_n$, avec u_0 et $u_1 > 0$. Sa lmite est $3\, u_0\, u_1 / (2u_0 + u_1)$.
5) $u_{n+2}= 2/(u_{n+1} + u_n)$ avec u_0 et $u_1 > 0$. Sa limite est 1.
6) $u_{n+2}=(k/2)(1/u_{n+1} + 1/u_n)$, avec u_0 et $u_1 > 0$. Sa limite est $\sqrt{k}$.

1. Suite 1 : Un terme de la suite est la moyenne arithmétique des deux termes précédents, soit $u_{n+2} = (u_{n+1} + u_n)/2$

Première méthode :

1) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

Sur un axe, le terme u_{n+2} est le milieu du segment u_{n+1}, u_n. Il s'agit là du phénomène essentiel qui caractérise cette suite. Notamment au départ u_2 est entre u_0 et u_1. Supposons que jusqu'à un certain rang n, les termes de la suite soient entre u_0 et u_1. Comme u_{n-1} et u_n sont alors entre u_0 et u_1, il en est de même de u_{n+1}. En faisant marcher cette récurrence, u_n reste compris entre u_0 et u_1 quel que soit n. Etant minorée et majorée, la suite (u_n) est bornée.

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique.

$v_n = u_n - u_{n-1} = (u_{n-1} + u_{n-2}) / 2 - u_{n-1} = -(u_{n-1} - u_{n-2})/2 = -v_{n-1} / 2$. La suite ($v_n$) est géométrique de raison –1/2 et de terme initial $v_1 = u_1 - u_0$. Sa forme explicite est $v_n = v_1\,(1/2)^{n-1}$.

3) Calculer la somme des n premiers termes de la suite (v_n). En déduire la forme explicite de u_n, et la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini.

$\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1(1+(-1/2) + (-1/2)^2 + ... + (-1/2)^{n-1} = (2/3)\, v_1\, (1-(-1/2)^n)$. Mais on a aussi

$\sum_{k=1}^{n} v_k = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + ... + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0$. Finalement:

$u_n = u_0 + (2/3)(u_1 - u_0)(1 - (-1/2)^n)$. Lorsque n tend vers l'infini, u_n tend vers :
$u_0 + (2/3)\,(u_1 - u_0) = (2u_1 + u_0) / 3$.

Remarque : Nous avons trouvé que lorsqu'un terme est le barycentre du précédent, ici avec le coefficient ½, et de celui d'avant avec le coefficient 1/2, la suite converge vers le barycentre de u_1 avec le coefficient 2 et de u_0 avec le coefficient 1. Cela se généralise à toute suite vérifiant la relation de récurrence :

$u_{n+2} = (1 - k)\, u_{n+1} + k\, u_n$, avec $0 < k < 1$, ce qui signifie qu'un terme quelconque est le barycentre du terme précédent avec le coefficient $1 - k$ et de celui d'avant avec le coefficient k, un tel barycentre étant situé entre u_{n+1} et u_n. Avec le même raisonnement on trouve que u_n tend vers le barycentre de u_1 avec le coefficient 1 et de u_0 avec le coefficient k, soit à la limite $(u_1 + k\, u_0) / (1 + k)$.

Deuxième méthode :

1) Montrer que $u_n + u_{n-1} / 2$ ne dépend pas de n

$u_n + u_{n-1}/2 = (u_{n-1} + u_{n-2})/2 + u_{n-1}/2 = u_{n-1} + u_{n-2}/2$. En procédant à une descente en cascade, on arrive à $u_n + u_{n-1}/2 = u_1 + u_0/2$, ce qui donne bien $u_n + u_{n-1}/2 = k$ quel que soit n, k étant une constante, à savoir $k = u_1 + u_0/2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est arithmético-géométrique et en déduire sa limite.

$u_n = - u_{n-1} / 2 + k$, ce qui correspond bien à une suite arithmético-géométrique. Si la suite u_n admet une limite L, celle-ci doit vérifier $L = - L/2 + k$, d'où $L = 2k / 3$. Considérons la suite auxiliaire $v_n = u_n - L$. Que la suite u_n ait une limite ou pas, de toutes façons le nombre L vérifie $L = - L/2 + k$, et avec $u_n = - u_{n-1}/2 + k$, cela donne par soustraction des deux égalités, $u_n - L = - (u_{n-1} - L)/2$, soit $v_n = - v_{n-1} / 2$. Cette suite est géométrique de raison $- 1/2$, et son premier terme est $v_0 = u_0 - L$. Lorsque n tend vers l'infini, v_n tend vers 0, et u_n tend vers L, à savoir $2\, k / 3 = (2u_1 + u_0) / 3$.

Troisième méthode :

Montrer que la suite (u_n) satisfait à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. En déduire sa forme explicite et sa limite.

$u_n = (u_{n-1} + u_{n-2}) / 2$ se réécrit $2u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0$, ce qui constitue la forme demandée.

Considérons une suite (v_n) obéissant à la relation de récurrence $2v_n - v_{n-1} - v_{n-2} = 0$. Il existe une infinité de suites (v_n) vérifiant cette relation, car tout dépend des conditions initiales choisies, et il y a une suite pour chaque condition initiale. Cherchons une solution particulière v_n de la forme $v_n = r^n$, r étant une constante (non nulle). Cela impose $2r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$, ce qui se réduit à $2r^2 - r - 1 = 0$. Cela s'appelle l'équation caractéristique de la récurrence. Une solution évidente est $r = 1$, l'autre est $r = -1/2$. On vient de trouver deux solutions à la relation de récurrence : $v_n = 1$ et $v_n = (-1/2)^n$. A leur tour, $v_n = a$ et $v_n = b\,(-1/2)^n$ vérifient aussi la relation de récurrence, a et b étant des constantes arbitraires. Puis $v_n = a + b\,(-1/2)^n$ vérifie aussi la relation de récurrence, comme on le vérifie aisément. Cela est vrai quelles que soient les constantes a et b. On vient de trouver une infinité de suites solutions de la relation de récurrence. Parmi elles, voyons si l'on trouve la suite u_n avec ses conditions initiales u_0 et u_1. On doit avoir $a + b = u_0$ et $a - b/2 = u_1$. On trouve $a = (u_0 + 2u_1)/3$ et $b = 2(u_0 - u_1)/3$, d'où la formule explicite $u_n = (u_0 + 2u_1)/3 + 2(u_0 - u_1)(-1/2)^n/3$. Pour n infini, u_n a pour limite $(u_0 + 2u_1) / 3$.

Remarque : même si l'on n'en a pas besoin dans la démonstration précédente, on peut prouver que la relation de récurrence n'a pas d'autres solutions que les suites $v_n = a + b(-1/2)^n$.

Quatrième méthode :

On suppose ici, sans grande perte de généralité, que $u_0 < u_1$. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. L'objectif est de démontrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes, ce qui prouvera qu'elles ont la même limite, puis l'on déterminera cette limite, par exemple comme limite de la suite v_n.

1) On pose $d_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $d_n = - d_{n-1} / 2$.

$$d_n = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} - u_n = \frac{u_{n-1} - u_n}{2} = -\frac{d_{n-1}}{2}$$

2) En déduire que $w_n > v_n$.

On constate que $w_n - v_n = u_{2n+1} - u_{2n} = d_{2n}$. On a vu que la suite (d_n) obéissait à la relation de récurrence $d_n = - d_{n-1} / 2$, elle change de signe à chaque étape. Comme $d_0 = u_1 - u_0$ a été supposé positif, cela entraîne que les termes d'ordre pair de cette suite sont positifs. Finalement $w_n - v_n = d_{2n} > 0$, et $w_n > v_n$.

3) En utilisant la suite (d_n), montrer que la suite (v_n) est croissante, et que la suite (w_n) est décroissante.

Formons $v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = (u_{2n+1} + u_{2n}) / 2 - u_{2n} = (u_{2n+1} - u_{2n}) /2 = d_{2n} / 2 > 0$ comme on l'a vu au 2°. De la même façon on trouve que $w_{n+1} - w_n = d_{2n+1} / 2 < 0$. La suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) décroissante.

4) Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes, de limite l et l'.

Avec $v_n < w_n$, et sachant que les suites (v_n) et (w_n) sont respectivement croissante et décroissante, on a : $u_0 = v_0 < v_n < w_n < w_0 = u_1$. Croissante et majorée par u_1, la suite (v_n) converge, avec pour limite l. Décroissante et minorée par u_0, la suite (w_n) converge vers l'.

5) Montrer que les deux suite (v_n) et (w_n) sont adjacentes, et en déduire que $l = l'$.
Rappel : on dit que deux suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes lorsqu'elles obéissent aux quatre conditions: $v_n \le w_n$, v_n croissante, w_n décroissante, et $w_n - v_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (Signalons que la première condition $v_n \le w_n$ est superflue, car elle est entraînée par les trois autres conditions).

Avec $d_n = - d_{n-1} / 2$, la suite (d_n) est géométrique, de raison $- 1/2$ et de terme initial $d_0 = u_1 - u_0 > 0$, ce qui donne la formule explicite $d_n = d_0 (- 1/2)^n$. On en déduit que pour n infini d_n tend vers 0. Ainsi $w_n - v_n$ tend vers 0. Les deux suites sont adjacentes. Et par passage à la limite de $w_n - v_n$, on a aussi $l' - l$ qui tend vers 0, d'où $l = l'$.

6) Calculer cette limite. Pour cela on pourra chercher la limite de la suite v_n, en montrant d'abord que $v_{n+1} - v_n = (v_n - v_{n-1}) / 4$, puis en utilisant la première méthode de résolution vue ci-dessus.

On a vu que $v_{n+1} - v_n = d_{2n} / 2$ et de même $v_n - v_{n-1} = d_{2n-2} / 2$. Comme l'on a aussi $d_{2n} = - d_{2n-1} / 2 = d_{2n-2} / 4$, cela donne $v_{n+1} - v_n = (v_n - v_{n-1}) / 4$. Posons $t_n = v_n - v_{n-1}$. La suite (t_n) est géométrique, de raison 1/4 et de terme initial $t_1 = v_1 - v_0 = u_2 - u_0 = (u_1 - u_0) /2$. Sa forme explicite est $t_n = t_1 (1/4)^{n-1}$, et lorsque n tend vers l'infini, t_n tend vers 0. Reprenons la méthode utilisée au 1. :

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = t_1(1+(1/4)+(1/4)^2+...+(1/4)^{n-1}) = (4/3)\; t_1(1-(1/4)^n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + ... + v_n - v_{n-1} = v_n - v_0$$

En passant à la limite, on obtient $l - v_0 = (4/3)\, t_1$, soit
$l = v_0 + (4/3)\, t_1 = u_0 + (4/3)\,(u_1 - u_0) / 2 = u_0 / 3 + 2\, u_1 / 3$.

2. Suite 2 : Un terme de la suite est la moyenne géométrique des deux termes précédents, soit $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}\; u_n}$

1) Déterminer les conditions d'existence de cette suite, suivant les conditions initiales

Les problèmes d'existence sont dus à la présence d'une racine carrée.

Si u_0 ou u_1 sont nuls, on obtient la suite nulle à partir du rang 2 au plus. Supposons désormais u_0 et u_1 différents de 0, et distinguons trois cas :

1) u_0 et u_1 sont de signe contraire : u_2 n'existe pas.

2) u_0 et u_1 sont négatifs; u_2 existe et est positif, mais u_3 n'existe pas, puisque $u_2\, u_1 < 0$.

3) u_0 et u_1 sont positifs. Montrons que pour tout n, u_n existe et est positif.

Procédons par récurrence : d'abord u_0 existe et est positif. Supposons maintenant que jusqu'à un certain rang n, avec $0 \le k \le n$, u_k existe et est positif, et montrons qu'à son tour u_{n+1} existe et reste positif : $u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}\ u_n}$. Comme $u_n\, u_{n-1} > 0$, la racine carrée existe et est positive. En faisant marcher la récurrence, u_n existe et est positif pour tout n.

Finalement la suite est définie si et seulement si u_0 et u_1 sont positifs ou nuls.

2) Avec $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$, étudier cette suite, ainsi que son comportement à l'infini.

Posons $v_n = \ln u_n$, ce qui est permis puisque $u_n > 0$. La suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+2} = (v_{n+1} + v_n) / 2$, avec $v_0 = \ln u_0$ et $v_1 = \ln u_1$. On sait que la suite v_n tend vers $(v_0 + 2v_1)/3$ en oscillant de part et d'autre de cette limite. A son tour u_n tend vers $\exp((v_0 + 2v_1)/3) = u_0^{1/3}\ u_1^{2/3}$, en alternant tout autour, puisque la fonction *ln* est croissante. On sait aussi que

$v_n = (v_0 + 2v_1)/3 + (2/3)(v_0 - v_1)(-1/2)^n$, ce qui donne :

$$u_n = u_0^{1/3} u_1^{2/3} \left(\frac{u_0}{u_1}\right)^{\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n}$$

3. Suite 3: Un terme de la suite est l'opposé de la moyenne arithmétique des deux termes précédents : $u_n = -(u_{n-1} + u_{n-2}) / 2$ avec u_0 et u_1 donnés quelconques

1) Etudier cette suite ainsi que son comportement à l'infini.

L'équation caractéristique de cette récurrence linéaire d'ordre 2 est $2\, r^2 + r + 1 = 0$. Ses racines sont z et $\underline{z}$ complexes conjuguées, $\underline{z}$ désignant le nombre conjugué de z, avec $z = (-1 + i\sqrt{7}\,) / 4$. Les suites de la forme $k\, z^n + k'\, \underline{z}^n$ vérifient la relation de récurrence. Cherchons parmi elles la suite (u_n) en imposant les conditions aux rangs 0 et 1 :

$k + k' = u_0$ et $k\, z + k'\underline{z} = u_1$. On trouve $k = i\, 2\, (u_0\, \underline{z} - u_1) / \sqrt{7}$ et $k' = u_0 - k$

Après calcul, on trouve $u_n = i\, (1/\sqrt{7}\,)(- 2u_1\, (z^n - \underline{z}^n) + u_0\, (z^{n-1} - \underline{z}^{n-1}))$. Notons que, $z^n - \underline{z}^n$ étant un imaginaire pur, le résultat obtenu pour u_n est bien un nombre réel.

Or $0 \le |z^k - \underline{z}^k| \le 2\, |z|^k$, avec ici $|z| = 1/\sqrt{2}$. Lorsque k tend vers l'infini, $|z|^k$ tend vers 0, et $|z^k - \underline{z}^k|$ aussi. D'où $z^n - \underline{z}^n$ tend vers 0 ainsi que $z^{n-1} - \underline{z}^{n-1}$. Finalement u_n tend vers 0 quelles que soient les conditions initiales.

2) Etudier le comportement du signe de u_n dans le cas où $u_0 = u_1 = 1$.

Le calcul étant plus simple dans ce cas particulier, on trouve que $k' = \underline{k}$ avec $k = (\sqrt{7} - i\, 5)/(2\sqrt{7}\,)$, d'où $u_n = kz^n + \underline{k}\ \underline{z}^n = 2\,\mathrm{Re}(k\, z^n)$. Lorsque n évolue, le vecteur z^n tourne à chaque étape d'un angle φ égal à son argument. Cet angle est légèrement supérieur à $\pi/2$ et sa tangente vaut $-\sqrt{7}$. Il est incommensurable avec 2π. Sa partie réelle, projection sur l'axe des x, n'a donc aucune périodicité quant à son signe[1]. Le fait de multiplier z^n par le nombre complexe fixe $2k$ provoque une similitude globale sur les vecteurs z^n, ce qui ne change rien à l'évolution non périodique des signes.

4. Suite 4 : Un terme de la suite est la moyenne harmonique des deux termes qui le précèdent: $2 / u_{n+2} = 1 / u_{n+1} + 1 / u_n$ avec u_0 et $u_1 > 0$

Avec les conditions initiales choisies, la suite (u_n) est définie, puisque u_n reste toujours positif, par récurrence évidente, et il s'ensuit que les divisions sont toujours possibles. Posons $v_n = 1 / u_n$. La nouvelle suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+2} = (v_{n+1} + v_n) / 2$, relation déjà vue. On sait que v_n tend vers $(v_0 + 2v_1) / 3$. A son tour, u_n tend vers $3\, u_0\, u_1 / (2u_0 + u_1)$.

Un prolongement du problème consisterait à étudier les conditions d'existence de la suite (u_n) lorsque $u_0 > 0$ et $u_1 < 0$.

5. Suite 5 : Un terme de la suite est l'inverse de la moyenne arithmétique des deux termes qui le précèdent : $u_{n+2} = 2 / (u_{n+1} + u_n)$ avec u_0 et u_1 positifs (> 0)

Si u_0 et u_1 sont tous deux égaux à 1, la suite (u_n) reste constante. Plaçons-nous désormais dans tous les autres cas que celui-là. On va faire en sorte que deux termes, l'un d'indice pair et l'autre son successeur d'indice impair u_{2n} et u_{2n+1} soient encadrés par deux nombres, l'un étant appelé b_n et l'autre étant son inverse $1/b_n$, avec $b_n > 1$, soit : $1/b_n \le u_{2n} \le b_n$ et $1/b_n \le u_{2n+1} \le b_n$, avec b_n qui tend en décroissant vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Alors les termes de la suite (u_n) seront pris en sandwich entre les deux nombres $1/b_n$ et b_n qui tendent vers 1, et elle tendra elle aussi vers 1. Tout le problème est de trouver cette suite b_n. Pour cela on va procéder à une construction par récurrence.[2]

Au départ prenons b_0 tel que $1/b_0 \le u_0 \le b_0$ et $1/b_0 \le u_1 \le b_0$. Pour b_0, il suffit de prendre le maximum des quatre nombres u_0, u_1, $1/u_0$, $1/u_1$, il est bien supérieur à 1.

Supposons que l'on ait réussi à trouver b_n à un certain rang n, vérifiant les deux inégalités
$1/b_n \le u_{2n} \le b_n$ et $1/b_n \le u_{2n+1} \le b_n$
et cherchons quel successeur b_{n+1} prendre. Nous allons distinguer deux cas :

1) u_{2n} et u_{2n+1} sont du même côté de 1, tous les deux supérieurs, ou tous les deux inférieurs à 1.
2) u_{2n} et u_{2n+1} sont de part et d'autre de 1.

Avant de faire le bon choix de b_{n+1}, nous constatons deux choses:

a) Lorsque u_{2n} et u_{2n+1} sont compris entre b_n et $1/b_n$, ce qui constitue notre hypothèse de récurrence, alors u_{2n+2} et u_{2n+3} le sont aussi. En effet, additionnons les deux inégalités $1/b_n \le u_{2n} \le b_n$ et $1/b_n \le u_{2n+1}$

---

[1] Rappelons le théorème à ce sujet : **Soit une rotation d'angle φ sur un cercle, cet angle étant incommensurable avec 2π. Les images d'un point quelconque du cercle par les rotations d'angles successifs 0, φ, 2φ, 3φ, ..., modulo 2π, forment un ensemble partout dense sur le cercle.** Pour la démonstration, on utilise les faits suivants : on peut trouver un nombre entier k tel que l'angle $\varphi' = k\ \varphi$ soit inférieur à φ modulo 2π. Puis en faisant les rotations par blocs de k, on trouvera un nombre k' tel que l'angle $\varphi'' = k'\ \varphi'$ soit inférieur à φ', et ainsi de suite. C'est cette évolution qui empêche toute périodicité dans l'évolution des signes de la suite (u_n). Un autre théorème indique que **la répartition des points sur le cercle est uniforme**. Dans le problème qui nous concerne, cela entraîne qu'il y a en moyenne autant de termes de la suite (u_n) avec le signe + qu'avec le signe –.

[2] Cette méthode m'a été proposée par mon collègue P. Chibaudel.

$\leq b_n$. On trouve que $1/b_n \leq (u_{2n} + u_{2n+1})/2 \leq b_n$ et en inversant $1/b_n \leq u_{2n+2} \leq b_n$. Puis recommençons avec les mêmes encadrements de u_{2n+2} et de u_{2n+1}. On trouve aussi que $1/b_n \leq u_{2n+3} \leq b_n$.

b) Le deuxième cas (u_{2n} et u_{2n+1} de part et d'autre de 1) se produit une infinité de fois. Pour prouver cela, nous constatons d'abord que trois termes successifs de la suite (u_n) ne peuvent jamais rester du même côté de 1. En effet, si u_k et u_{k+1} sont du même côté de 1, la moyenne arithmétique de u_k et u_{k+1}, est entre ces deux nombres, et u_{k+2} obtenu par inversion, est envoyé de l'autre côté de 1. On en déduit qu'il y a une infinité de traversées de la frontière 1.[3]

Cela ne prouve pas que le deuxième cas (u_{2n} et u_{2n+1} de part et d'autre de 1) arrive une infinité de fois. Car il pourrait se produire le phénomène exceptionnel suivant : la traversée s'effectuerait toujours, à partir d'un certain rang, seulement lors du passage d'un rang impair à un rang pair, c'est-à-dire que ce serait toujours le premier cas qui reviendrait. Dans ce cas hypothétique (on peut même démontrer qu'il n'arrive jamais), il conviendrait de décaler la suite (u_n) d'un cran, un terme de rang pair devenant maintenant de rang impair, et vice versa, ce qui ne modifierait pas le comportement général de la suite, mais du même coup le deuxième cas reviendrait une infinité de fois.

Cela nous conduit à faire le choix suivant pour b_{n+1} par rapport à b_n :

Premier cas, avec u_{2n} et u_{2n+1} du même côté de 1. On choisit $b_{n+1} = b_n$. Grâce à la constatation du *a)*, on a bien $1/b_{n+1} \leq u_{2n+2} \leq b_{n+1}$ et $1/b_{n+1} \leq u_{2n+3} \leq b_{n+1}$ avec $b_{n+1} > 1$.

Deuxième cas, avec u_{2n} et u_{2n+1} de part et d'autre de 1. C'est ici que nous allons comprimer l'encadrement. D'abord les trois segments $[1/b_n, 1]$, $[u_{2n}, u_{2n+1}]$, $[1, b_n]$ sont entrelacés de gauche à droite. Leurs milieux sont dans l'ordre croissant :

$(1/b_n + 1)/2 \leq (u_{2n} + u_{2n+1})/2 \leq (1 + b_n)/2$. En inversant,
$2 / (1 + b_n) \leq u_{2n+2} \leq 2 / (1/b_n + 1) = 2\, b_n / (1 + b_n)$ et même, sachant que $2 < 1 + b_n < 2\, b_n$:
$1/b_n < 2 / (1 + b_n) \leq u_{2n+2} \leq 2\, b_n / (1 + b_n) < b_n$.

En utilisant maintenant cet encadrement de u_{2n+2} ainsi que celui de u_{2n+1}, à savoir $1/b_n \leq u_{2n+1} \leq b_n$, et en prenant les milieux (la demi-somme) on arrive à l'encadrement suivant :

$(2/(1 + b_n) + 1/b_n) / 2 \leq (u_{2n+1} + u_{2n+2}) / 2 \leq (2\, b_n / (1 + b_n) + b_n) / 2$, soit
$1/b_n < (3b_n + 1) / (2b_n^2 + 2b_n) \leq 1 / u_{2n+3} \leq (b_n^2 + 3b_n) / (2b_n + 2) < b_n$, et par inversion
$1/b_n < (2b_n + 2) / (b_n^2 + 3b_n) \leq u_{2n+3} \leq (2b_n^2 + 2b_n) / (3b_n + 1) < b_n$.

Posons $A = (b_n^2 + 3b_n) / (2b_n + 2)$ et $B = (2b_n^2 + 2b_n) / (3b_n + 1)$. L'encadrement précédent devient :
$1/b_n < 1/A \leq u_{2n+3} \leq B < b_n$

On vérifie aisément qu'avec $b_n > 1$, $1/A < 2 / (1 + b_n)$ et $2\, b_n / (1 + b_n) < B$. On trouve alors pour u_{2n+2} le même encadrement que celui de u_{2n+3} :
$1/b_n < 1/A \leq u_{2n+2} \leq B < b_n$.

En constatant que $1/B < 1/A < A < B$, on obtient comme encadrement final :
$1/b_n < 1/B \leq u_{2n+2}$ (ou u_{2n+3}) $\leq B < b$. On choisit donc $b_{n+1} = B$, soit :

$b_{n+1} = (2b_n^2 + 2b_n) / (3b_n + 1)$, et l'on a bien rétréci strictement l'encadrement.

---

[3] Si u_{2n} et u_{2n+1} sont du même côté de 1 -disons > 1, u_{2n+2} est de l'autre côté, < 1. Ensuite, soit u_{2n+3} reste de ce côté, <1, et u_{2n+4} redevient > 1, soit c'est u_{2n+3} qui est renvoyé de l'autre côté, > 1, et dans ce cas soit u_{2n+4} reste de ce côté et u_{2n+5} redevient < 1, soit c'est u_{2n+4} qui repasse < 1. Il y a bien une infinité de traversée de la frontière 1. Le même type de raisonnement s'applique si u_{2n} et u_{2n+1} sont de part et d'autre de 1.

Considérons maintenant la suite (c_k) telle que $c_{k+1} = f(c_k)$ avec $f(x) = (2x^2 + 2x) / (3x + 1)$, et $c_0 = b_0 > 1$. On montre facilement que cette suite converge vers 1 en décroissant.

Grâce au fait que le deuxième cas (u_{2n} et u_{2n+1} de part et d'autre de 1) se produit une infinité de fois, la suite (b_n) prend une infinité de valeurs successives de la suite (c_k). Cela prouve que la suite (b_n) tend aussi vers 1. On a bien la suite (u_n) qui est prise en tenaille entre deux éléments qui tendent vers 1. La suite (u_n) converge vers 1.

6. Suite 6 : Un terme de la suite est l'inverse de la moyenne harmonique des deux précédents, à un facteur positif *k* près : $\boldsymbol{u_{n+2} = (k / 2) (1 / u_{n+1} + 1 / u_n)}$, avec $\boldsymbol{u_0}$ et $\boldsymbol{u_1}$ positifs

Posons $v_n = \sqrt{k} / u_n$. on obtient $\sqrt{k} / v_{n+2} = u_{n+2} = (k / 2) (v_{n+1} + v_n) / \sqrt{k} = \sqrt{k}\ (v_{n+1} + v_n) / 2$, soit $v_{n+2} = 2 / (v_{n+1} + v_n)$. La suite ($v_n$) tend vers 1, et la suite (u_n) tend vers $\sqrt{k}$.