Quelques problèmes corrigés

Problème I (intégrales et suites)

Pour tout nombre entier k positif ou nul, on considère la suite de nombres (I_k) telle que $I_k = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}dx$. L'objectif est d'étudier cette suite.

1) Calcul de I_0

a) On considère la fonction $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Montrer qu'elle est définie sur *R*.

b) Calculer sa dérivée $g'(x)$.

c) En déduire la valeur de I_0.

2)Calculer I_1.

3)a) Pour tout entier k supérieur ou égal à deux, écrire $I_k + I_{k-2}$ sous forme d'une seule intégrale, en simplifiant au mieux.

b) Procéder à une intégration par parties sur cette intégrale pour démontrer que : $I_k + I_{k-2} = \frac{\sqrt{2} - I_k}{k-1}$.

c) En déduire l'expression de I_k en fonction de I_{k-2} et k.

d) Calculer I_2 et I_3.

4)a) Montrer que $I_k \leq \frac{1}{k+1}$.

b) En déduire le comportement à l'infini de la suite (I_k).

5) Montrer que la suite (I_k) est décroissante.

6)a) En utilisant le résultat du 5° et du 3-b, montrer que :
$$\frac{\sqrt{2} - I_{k+2}}{k+1} \leq 2I_k \leq \frac{\sqrt{2} - I_k}{k-1}.$$

b) En déduire que $k\sqrt{2}\ I_k$ tend vers 1 lorsque k tend vers l'infini.

1a) L'expression $x + \sqrt{1+x^2}$ est positive (>0) lorsque x est ≥0, comme somme des deux termes x≥0 et $\sqrt{1+x^2} \geq 1 > 0$. Prenons maintenant x<0, et utilisons la quantité conjuguée : $x + \sqrt{1+x^2} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1+x^2}} = \frac{-x^2}{x - \sqrt{1+x^2}} > 0$

Ce qui est sous le logarithme est toujours >0, le logarithme existe pour tout x réel, et g est définie sur ***R***.

1b)La fonction g est dérivable comme mélange de fonctions usuelles dérivables sur leur ensemble de définition, et la $\sqrt{\ }$ l'est aussi car ce qui est sous le radical n'est jamais nul.

$$g'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1c) On en déduit que $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ admet comme primitive $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ sur $\boldsymbol{R}$.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = [\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,]_0^1 = \ln 2\,.$$

2) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$, avec $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ qui admet comme primitive $\sqrt{u}$, d'où $I_1 = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1$.

3a) $I_k + I_{k-2} = \int_0^1 \frac{x^k + x^{k-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^{k-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 x^{k-2}\sqrt{1+x^2}dx$

3b) Procédons à une intégration par parties en posant :

$u' = x^{k-2}$, $v = \sqrt{1+x^2}$, d'où $u = \frac{x^{k-1}}{k-1}$, $v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$I_k + I_{k-2} = [\frac{1}{k-1}x^{k-1}\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \frac{1}{k-1}\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{k-1}(\sqrt{2}-I_k)$$

3c) En ordonnant, l'égalité précédente devient :

$$\frac{k}{k-1}I_k = \frac{\sqrt{2}}{k-1} - I_{k-2}$$

$$I_k = \frac{1}{k}(\sqrt{2}-(k-1)I_{k-2})$$

3d) $I_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-I_0) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-\ln 2)$

$$I_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-2I_1) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)) = \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$$

4a) On a toujours $\sqrt{x^2+1} \geq 1$, d'où $\frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^k$ sur [0 1]. L'intégration préserve les inégalités, avec les bornes dans le sens croissant : $I_k \leq \int_0^1 x^k dx$, $I_k \leq \frac{1}{k+1}$.

b) Puisque $0 \leq I_k \leq \frac{1}{k+1}$, lorsque tend vers l'infini, I_k est pris en tenaille entre 0 et une quantité qui tend vers 0. D'où $\lim_{k\to\infty} I_k = 0$.

5) $I_{k+1} - I_k = \int_0^1 \frac{x^k(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Ce qui est sous l'intégrale est négatif ou nul sur [0 1] à cause de x-1 . Par intégration $I_{k+1} - I_k \leq 0$. La suite (I_k) est décroissante.

6) On a vu que $I_k + I_{k-2} = \frac{\sqrt{2}-I_k}{k-1}$. Comme la suite ($I_k$) est décroissante, $I_k + I_{k-2} \geq 2I_k$ et $2I_k \leq \frac{\sqrt{2}-I_k}{k-1}$. De même, avec $I_{k+2} + I_k = \frac{\sqrt{2}-I_{k+2}}{k+1}$, et $I_{k+2} + I_k \leq 2I_k$, $\frac{\sqrt{2}-I_{k+2}}{k+1} \leq 2I_k$. On a bien l'encadrement demandé.

Problème 2 (fonctions)

On considère la fonction f telle que $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$. L'objectif est l'étude de cette fonction.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f*.

2) Recherche de la limite de *f* en 0

a) Déterminer $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}$ et en déduire la limite de $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}-1}$ lorsque *x* tend vers 0.

b) En s'aidant du résultat précédent, chercher la limite de $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}$ lorsque *x* tend vers 0.

c) Justifier et préciser la limite de *f* en 0.

3) Déterminer la limite de *f* en +∞.

4) Montrer que la fonction *f* est paire.

5) Montrer que la fonction *f* est dérivable sur R* et calculer la dérivée *f '*.

6) En étudiant une fonction auxiliaire sur *R+ pour avoir le signe de *f '*, déterminer le sens de variation de *f* sur R*+.**

7) Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction *f* de façon à avoir une fonction *F* définie et continue sur *R*. Montrer que la fonction *F* est aussi dérivable en 0.

8) Tracer la courbe représentative de *f*.

1) Ce qui est sous le radical dans $\sqrt{1+x^2}$ est toujours ≥ 0 (et même ≥ 1). La racine carrée existe.

Le logarithme existe si et seulement si $x+\sqrt{1+x^2}>0$. Etudions le signe de $x+\sqrt{1+x^2}$ en distinguant deux cas :

- Si *x* est ≥0, on a aussi $1+x^2 \geq 1$, $\sqrt{1+x^2} \geq 1$, d'où $x+\sqrt{1+x^2} > 0$.
- Si *x* est < 0,

$$x+\sqrt{1+x^2} = x+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \quad \text{car } x<0$$

$$= x(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) > 0 \quad \text{car } \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} > 1 \quad \text{d'où } 1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} < 0$$

Le logarithme existe toujours.

1/*x* existe si et seulement si $x \neq 0$.

L'exponentielle n'a aucun problème.

Finalement l'ensemble de définition est D = ***R****.

2a) On sait bien (cours !) que $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}$ =1.

Posons $h = x+\sqrt{1+x^2}-1$. Lorsque x tend vers 0, on constate que h tend vers 0. Appliquons le résultat précédent : $\dfrac{\ln(1+h)}{h} = \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}-1}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 (d'où h aussi).

2b) $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. On sait déjà que $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}-1}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. D'autre part :

$$\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{x+\dfrac{1-x^2-1}{\sqrt{1+x^2}+1}}{x} = \frac{x(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1})}{x} \quad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$= 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \quad \text{qui tend vers 1}$$

Finalement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = 1$.

2c) $f(x)$ est de la forme e^{u} avec u qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0. D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e$.

3) $x+\sqrt{1+x^2} = x+\sqrt{x^2(1+\dfrac{1}{x^2})} = x+x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = x(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}})$ pour $x > 0$

$\dfrac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \dfrac{1}{x}\ln x(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}})$ pour $x > 0$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x / x$ est de la forme indéterminée $+\infty / +\infty$ mais dans ce cas, on sait que c'est x qui l'emporte : $\ln x / x$ tend vers 0+. D'autre part :

$\dfrac{1}{x}\ln(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}})$ est de la forme 0+. *ln* 2, et tend vers 0+.

Ainsi $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+$. La courbe de f admet (Ox) comme asymptote, et elle est au-dessus.

4) Sur $\boldsymbol{R}^*$,

$$f(-x) = e^{-\frac{1}{x}\ln(-x+\sqrt{x^2+1})} = e^{-\frac{1}{x}\ln\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}} = e^{-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{x^2+1})} = f(x)$$

.

La fonction est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des y. On peut réduire l'intervalle d'étude à $\boldsymbol{R}^{*+}$.

5) Comme mélange de fonctions usuelles dérivables sur leur ensemble de définition (et aussi par ce qui est sous le radical de $\sqrt{1+x^2}$ est >0) , f est dérivable sur $D=\boldsymbol{R}^*$.

$$f'(x) = f(x)\left(-\frac{1}{x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$= f(x)\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}(x-\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}))$$
(on a abrégé les calculs)

6) Le signe de *f '* est celui de $x-\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Posons $g(x) = x-\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$g'(x) = 1-\sqrt{1+x^2}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$
$$= 1-1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

Ce qui est sous *ln* est >1, d'où *ln* >0. En prenant x>0, on a $g'(x) < 0$ sur R*+, et $g'(x) \leq 0$ sur ***R***+. On en déduit que g est strictement décroissante sur ***R***+, à partir de g(0) = 0. D'où $g(x) > 0$ sur ***R****+.

On en déduit que *f '* < 0 sur ***R****+, la fonction *f* est strictement décroissante sur ***R****+.

7) Prenons la fonction *F* telle que $F(x) = f(x)$ sur ***R***+ et $F(0) = 0$.

Cette fonction est définie sur ***R***. Comme $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et que cette limite vaut e, avec en en plus $F(0) = e$, *F* est continue en 0 (elle l'est aussi, comme *f*, sur ***R****). La fonction *F* est le prolongement par continuité de *f*, sur ***R***.

F est-elle dérivable en 0 ? Formons le taux d'accroissement au voisinage de 0 :

$$\frac{F(x)-e}{x} = \frac{f(x)-e}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2}}-e}{x} = e\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-1}-1}{x}.$$

Posons $u = \frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-1$. Grâce au 2°, on peut affirmer que u tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

$\frac{F(x)-e}{x} = e\frac{e^u-1}{x} = e\frac{e^u-1}{u}.\frac{u}{x}$. On sait que $\frac{e^u-1}{u}$ tend vers 1 lorsque u tend vers 0. Il s'agit de montrer que $\frac{u}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0+ (alors, à cause de la symétrie, la dérivée à gauche sera aussi 0), et *F* sera dérivable en 0.

Montrons que $0 \leq -\frac{u}{x} \leq x$ sur ***R****+, plus précisément au voisinage de 0+. On sait déjà que $0 \leq -\frac{u}{x}$ car $u < 0$ à cause de la décroissance de *f*. Il reste à montrer que $-u \leq x^2$.

Formons $x^2+u = x^2+\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-1 = \frac{1}{x}(x^3-x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

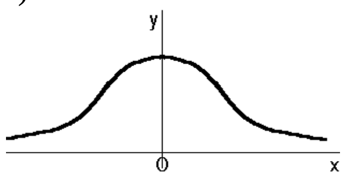
Posons $h(x) = x^3-x+\ln(x+\sqrt{1+x^2}$, h a le même signe que x^2+1

$$h'(x) = 3x^2 - 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 3x^2 - 1 + (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 3x^2 - 1 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$$

>0 au voisinage de 0+.

D'où $h(\mathrm{x})$ est croissante au voisinage de 0+, et $h(0) = 0$, d'où $h(\mathrm{x}) > 0$ au voisinage de 0+, et $u(x) + x^2$ aussi. D'où $0 \le -\frac{u}{x} \le x$ et $-\frac{u}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, comme annoncé. La fonction F est aussi dérivable en 0.

8)



Problème 3 (suites)

On considère les deux suites couplées (x_n) et (y_n) avec *n* entier naturel, vérifiant les relations de récurrence : $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n})$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n})$,

avec au départ $1 \le x_0 \le y_0$.

1) **Montrer que ces deux suites existent et que pour tout *n* , $1 \le x_n \le y_n$.**
2) **Montrer que (y_n) est décroissante et qu'elle converge. On appelle sa limite *M*.**
3) **Montrer que (x_n) converge aussi. En déduire que (x_n) et (y_n) ont la même limite et que *M*=1.**
4) **Montrer que (x_n) finit par décroître, c'est-à-dire que $x_{n+1} \le x_n$ pour tout $n \ge n_0$.**
5) **A quelle condition sur les conditions initiales la suite (x_n) ne cesse de décroître ? A quelle condition a-t-on $x_1 > x_0$? A quelle condition aura-t-on $x_1 > x_0$ puis $x_2 > x_1$?**

1) Montrons cette propriété en faisant un raisonnement par récurrence.

- x_0 et y_0 existent, et $1 \le x_0 \le y_0$.
- Supposons la propriété vraie à un certain rang n, et montrons qu'elle reste vraie au rang suivant : avec x_n et y_n qui existent et sont positifs, $\sqrt{x_n}$ et $\sqrt{y_n}$ existent, donc x_{n+1} et y_{n+1} existent aussi. D'autre part, avec $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n})$, sachant que $x_n \ge 1$ et $\sqrt{y_n} \ge 1$ (puisque $y_n \ge 1$) par hypothèse de récurrence, on constate que $x_{n+1} \ge 1$. De même, $y_{n+1} \ge 1$. Enfin, formons :

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n - x_n + \sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right)\left(\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n} + 1\right).$$

Avec $y_n \ge x_n$, on a aussi $\sqrt{y_n} \ge \sqrt{x_n}$, le premier facteur est supérieur ou égal à 0. D'autre part $\sqrt{x_n} \ge 1$ et $\sqrt{y_n} \ge 1$, le deuxième facteur est supérieur à 1. On a bien $y_{n+1} - x_{n+1} \ge 0$.

2) Formons $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}\left(y_n + \sqrt{x_n}\right) - y_n = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - y_n)$. Avec $\sqrt{x_n} \leq x_n \leq y_n$ puisque $x_n \leq 1$ et $x_n \leq y_n$, on en déduit que $y_{n+1} - y_n \leq 0$. La suite (y_n) est décroissante. Décroissante et minorée par 1, elle converge vers une limite $M \geq 1$.

3) Puisque $\sqrt{x_n} = 2y_{n+1} - y_n$, en passant à la limite, $\sqrt{x_n}$ tend vers $2M - M = M$, et x_n converge vers M^2. En reprenant l'une des deux relations de récurrence, et en passant à la limite, on trouve que $M^2 = \frac{1}{2}\left(M^2 + \sqrt{M}\right)$, d'où $M^2 = \sqrt{M}$, ou $M^4 = M$. Comme M ne peut être égal à 0, puisque les termes des deux suites sont supérieurs ou égaux à 1, il reste $M^3 = 1$, d'où $M=1$. Les deux suites convergent vers 1.

4) Si la suite (x_n) ne cessait de croître, avec x_0 supérieur à 1, elle ne pourrait pas converger vers 1. [1] Il est donc sûr qu'à un moment, on aura pour la première fois $x_{n0+1} < x_{n0}$. Une fois que cela se produit, montrons que la suite ne cesse de décroître. Faisons un raisonnement par récurrence pour prouver que $x_{n+1} < x_n$ dès que $n \geq n_0$.

C'est vrai au rang n_0. Supposons que cela soit vrai à un rang $n \geq n_0$ et montrons que cela reste vrai au rang suivant. Alors :

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \sqrt{y_{n+1}} - x_n - \sqrt{y_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_{n+1} - x_n + \sqrt{y_{n+1}} - \sqrt{y_n}\right) \leq 0$$ puisque $x_{n+1} \leq x_n$ par hypothèse de récurrence, et $y_{n+1} \leq y_n$. D'où $x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

5) Exprimons que $x_1 < x_0$: $x_1 - x_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_0} - x_0)$. Ainsi, lorsque $\sqrt{y_0} < x_0$ ou encore $y_0 < x_0^2$, la suite ne cesse de décroître.

- Prenons maintenant $y_0 > x_0^2$, alors $x_1 > x_0$. Mais que se passe-t-il ensuite ?
  Formons $x_2 - x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y_1} - x_1\right) = \frac{1}{2}\frac{y_1 - x_1^2}{(\sqrt{y_1} + x_1)}$ qui est du signe de $y_1 - x_1^2$. Le calcul de cette expression donne, à un facteur près : $y_0 + 2x_0\sqrt{y_0} + 2\sqrt{x_0} - x_0^2$. Ce trinôme du second degré en $\sqrt{y_0}$ a pour racines $x_0 \pm \sqrt{2(x_0^2 - \sqrt{x_0}}$. Sachant que l'on doit déjà avoir $\sqrt{y_0} > x_0$, cela impose, pour que le trinôme soit positif, que $\sqrt{y_0} > x_0 + \sqrt{2(x_0^2 - \sqrt{x_0}}$. Lorsque cette inégalité est vérifiée pour les conditions initiales, on aura non seulement $x_1 > x_0$ mais aussi $x_2 > x_1$.

[1] Le cas exceptionnel est celui où x_n resterait constamment égal à 1, ce qui suppose que $x_0 = 1$, et à son tour il faudrait que y_n reste aussi égal à 1, d'où $y_0 = 1$.