Combinatoire
Cours, exercices corrigés, programmation

La combinatoire est la science des mélanges, qu'il va s'agir de compter et d'énumérer.

L'essentiel de la combinatoire tient en trois formules, ce qui est fort peu. Encore faut-il ensuite arriver à les appliquer correctement, ce qui est nécessite un certain entraînement. Dans ce contexte, ce que l'on appelle les combinaisons joue un rôle majeur. On appelle C_n^p le nombre de façons de choisir un paquet de p objets dans un ensemble de n objets. Signalons que ce nombre, que nous notons C_n^p, s'écrit aussi, dans la littérature mathématique récente, et américaine à l'origine, $\binom{n}{p}$. [1]

1. Nombre d'applications

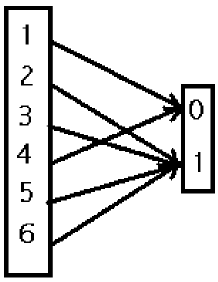
Commençons par un exemple qui nous concerne directement, celui de nombres écrits en binaire : Combien existe-t-il de nombres écrits en binaire avec 6 chiffres qui sont soit des 0 soit des 1 ?

La réponse est $2^6 = 64$. En effet, le premier des six chiffres que l'on écrit est soit 0 soit 1, d'où deux cas. A chaque fois que l'on a choisi ce premier chiffre, il y a deux façons de prendre le deuxième chiffre, soit 0 soit 1. A chaque fois qu'on a choisi le premier et le second chiffre, il y a deux façons de choisir le troisième chiffre. Et ainsi de suite. Finalement, cela fait $2.2.2.2.2.2 = 2^6$ cas.

Un nombre écrit en binaire, par exemple 011011, est mis dans un tableau sous la forme

1	2	3	4	5	6
0	1	1	0	1	1

Cela peut aussi être visualisé ainsi :



Ce dessin correspond à ce que l'on appelle une application de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} dans l'ensemble {0, 1}.

Par définition une application d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments fait correspondre à chaque élément de l'ensemble de départ un élément unique dans l'ensemble d'arrivée. Autrement dit, une flèche part de chaque élément du départ pour tomber dans l'ensemble d'arrivée. [2]

Dans l'exemple des nombres binaires, il y a exactement autant de tels nombres à six chiffres que d'applications d'un ensemble à six éléments dans un ensemble à deux éléments.

D'où la propriété qui généralise le cas des nombres en binaire :

Propriété 1 : Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.

---

[1] Choisissez la notation que vous préférez.

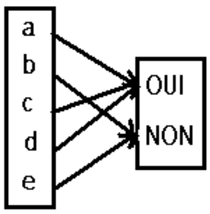
[2] On avait déjà rencontré le concept d'application, notamment dans les *chapitres 6 et 7*. Il s'agissait alors d'applications (ou fonctions) dont les ensembles de départ et d'arrivée étaient l'ensemble des réels *R* ou des parties de *R*. En combinatoire, la définition est la même, mais maintenant les ensembles de départ et d'arrivée ont un nombre fini d'éléments.

La démonstration de cette propriété se fait comme précédemment. A partir du premier élément au départ, on peut lancer n flèches vers l'ensemble d'arrivée, une vers chaque élément de cet ensemble. A chaque fois qu'on a lancé une flèche à partir de ce premier élément, on peut aussi lancer n flèches à partir du deuxième élément. Et ainsi de suite, d'où $n \,.\, n \,.\, n \ldots.\, n = n^p$ applications.

Cette propriété a une conséquence immédiate :

Le nombre de parties d'un ensemble à *n* éléments est 2^p.

En effet chaque partie peut être codée par un nombre en binaire. Prenons par exemple la partie $\{a\ c\ d\}$ de l'ensemble $\{a\ b\ c\ d\ e\}$. Cette partie peut être codée par 0 1 0 0 1, ou encore $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'informaticien reconnaîtra là un tableau, avec 0 qui signifie : « on prend » et 1 « on ne prend pas », d'où la lecture : on prend a, on ne prend pas b, on prend c et aussi d, et l'on ne prend pas e. Il y a autant de parties d'un ensemble à n éléments que de nombres en binaire de longueur n, soit 2^n.Cela peut aussi être vu sous forme d'applications. Il y a autant de parties d'un ensemble à n éléments que d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à deux éléments. Par exemple :



Cette application correspond à la partie $\{a\ c\ d\}$

Voici les huit parties d'un ensemble $\{a, b, c\}$ à trois éléments :

$\{\}$ qui est la partie vide, les parties à un éléments $\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$, les parties à deux éléments $\{a, b\}$,$\{a, c\}$,$\{b, c\}$, la partie à trois éléments ou partie pleine $\{a, b, c\}$

2. Nombre d'arrangements

2.a. Un exemple typique : Nombre de tiercés dans l'ordre

Posons-nous ce problème : Combien y a-t-il de tiercés possibles dans l'ordre dans une course de cinq chevaux ?

Appelons les chevaux *a, b, c, d, e*. Commençons par l'énumération de ces tiercés : *abc, abd, abe, acb, acd, ace, adb, adc, ade, aeb, aec, aed, bac, bad, bae, bca, bcd, bce, bda, bdc, bde, bea, bec, bed, cab*, ….. Remarquons que nous avons écrit ces tiercés successifs dans l'ordre alphabétique, de façon à n'en oublier aucun. Et maintenant, comptons-les. Comme premier arrivé, il y a cinq cas possibles (chacun des cinq chevaux). A chaque fois que le premier a été choisi, il reste quatre chevaux comme deuxième à l'arrivée. A chaque fois que l'on a choisi le premier et le deuxième, il reste trois chevaux arrivant troisième. Finalement, le nombre des tiercés dans l'ordre est 5.4.3 = 60.

2.b. Arrangements de *p* objets pris parmi *n*

Appelons arrangement de p objets pris parmi n objets une certaine façon de prendre ces p objets dans un certain ordre. Dans l'exemple précédent des tiercés dans l'ordre, les objets sont les cinq chevaux : $n = 5$ et $p = 3$. Le résultat obtenu pour les tiercés se généralise, ce qui conduit à la propriété suivante :

Propriété 2 : Le nombre d'arrangements de *p* objets pris parmi *n* est

$$A_n^p = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)$$

Remarquons que le nombre de facteurs dans la formule précédente est *p*. Pour démontrer la propriété, on fait comme précédemment. Comme premier objet, on a le choix parmi les *n* objets. A chaque fois qu'on a choisi ce premier objet, il y a $n - 1$ objets à choisir pour être le deuxième objet. A chaque fois qu'on a choisi les deux premiers objets, il reste $n - 2$ objets à choisir pour être le troisième. Et ainsi de suite jusqu'au $p^{\text{ème}}$ objet à choisir.

Cas particulier : la notion de permutation

Considérons *N* objets numérotés de 0 à $N - 1$. Une permutation de ces objets est une façon de les mettre dans un certain ordre. Le nombre de permutations de ces *N* objets est le nombre de façons de les mettre dans tous les ordres possibles. Par exemple, les permutations des 3 objets 0, 1, 2 sont 012, 021, 102, 120, 201, 210, au nombre de 6, soit 3 !. En effet le nombre de permutations de *N* objets n'est autre que le nombre d'arrangements de *N* objets pris parmi les *N*, ce qui donne bien *N* ! d'après la formule précédente.

3. Nombre de combinaisons

3.a. Un exemple typique : Nombre de tiercés dans le désordre

Prenons maintenant les tiercés dans le désordre. Combien y en a-t-il dans une course de cinq chevaux ?

Commençons par les énumérer : *abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde*. On vient de trouver dix tiercés dans le désordre. Prenons par exemple le cas *abc*. Ce tiercé est dans le désordre, mais remarquons que parmi toutes les façons de l'écrire, nous avons choisi celle qui est la plus petite dans l'ordre alphabétique. Plus précisément, il y a six façons d'écrire *abc* dans tous les ordres possibles : *abc, acb, bac, bca, cab, cba*, et nous choisissons celle où les lettres sont placées dans l'ordre alphabétique croissant. Pour chaque tiercé dans le désordre, on trouve six tiercés dans l'ordre. On avait trouvé 60 tiercés dans l'ordre, il y a 60 / 6 = 10 tiercés dans le désordre.

3.b. Combinaisons de *p* objets pris parmi *n*

Appelons combinaison de *p* objets parmi *n* une certaine façon de prendre un paquet de *p* objets parmi les *n*. Cela sous-entend que l'ordre dans lequel on prend ces *p* objets ne joue pas. Par analogie avec ce qui précède, on arrive à la propriété suivante :

Propriété 3 : Le nombre de combinaisons de *p* objets pris parmi *n* objets, ou encore le nombre de façons de prendre *p* objets parmi *n* sans tenir compte de l'ordre est

$$\boldsymbol{C_n^p = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+1)\,/\,p\,!}$$

Remarquons encore qu'au numérateur, sont présents *p* facteurs exactement. Une autre façon d'écrire cette formule est $C_n^p = n\,!\,/\,(p\,!\,(n-p)\,!)$ mais cela introduit des redondances, et cette formule ne s'applique que dans certains cas théoriques, ceux qui nécessitent la présence exclusive de permutations (notamment pour appliquer la formule de Stirling qui donne une valeur approchée de *n* !). Pour démontrer cette formule, il suffit de constater qu'une façon de prendre *p* objets dans le désordre correspond à *p*! façons de prendre *p* objets dans l'ordre, *p*! étant justement le nombre de permutations de ces *p* objets.

Quelle est la signification concrète du nombre C_n^p ?

- Puisque c'est le nombre de façons de prendre *p* objets (en paquet) parmi *n* objets, il s'agit aussi du nombre de parties à *p* éléments d'un ensemble à *n* éléments.

- Imaginons maintenant que nous ayons un casier de *n* cases vides devant nous. Le nombre de façons de placer *p* objets considérés comme identiques dans ces *n* cases, à raison d'un objet au plus par case, est aussi le nombre de façons de choisir *p* cases à remplir parmi les *n*, soit C_n^p.

3.c. Propriétés des C_n^p

Il existe deux formules essentielles sur les combinaisons.

1) $C_n^p = C_n^{n-p}$

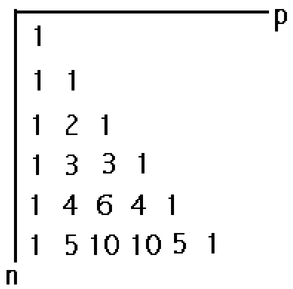
En effet, le nombre de façons de prendre *p* objets parmi *n* est aussi le nombre de façons d'en laisser (ou d'en éliminer) $n - p$ parmi les *n*. Cette formule permet de simplifier les calculs. Plutôt que de calculer $C_8^{\,6}$ on fera $C_8^{\,2} = 8 \,.\, 7 / 2 = 28$. Dès que *p* est supérieur à $n / 2$, on remplace *p* par $n - p$.

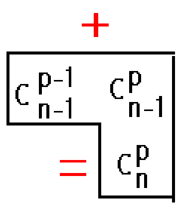
2) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Pour démontrer cette formule, imaginons que parmi les *n* objets nous en privilégions un, noté *X* par exemple. Les combinaisons de *p* objets parmi les *n* se divisent en deux catégories : celles qui contiennent cet objet *X*, et celles qui ne le contiennent pas. Pour avoir les combinaisons de la première catégorie, contenant *X*, il reste à prendre *p*-1 objets parmi $n - 1$, d'où C_{n-1}^{p-1} façons. Pour avoir celles ne contenant pas *X*, cela revient à prendre *p* objets parmi $n - 1$, d'où C_{n-1}^p façons.

3.d. Triangle de Pascal et formule du binôme

Plaçons les combinaisons C_n^p dans un repère *n*, *p*, ce qui donne un tableau quadrillé où l'on met dans la ligne *n* et dans la colonne *p* le nombre C_n^p .Le remplissage de ce tableau donne ce que l'on appelle en France le triangle de Pascal, le reste étant rempli par des 0. En effet dès que l'on doit prendre plus d'objets qu'il y en a, le nombre de combinaisons est nul.

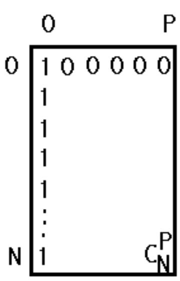




Comment construit-on ce triangle ? Cela se fait ligne après ligne. Un élément d'une ligne s'obtient en ajoutant celui qui est dans la ligne au-dessus de lui dans la même colonne, avec celui qui est dans la colonne précédente. Encore convient-il de connaître les éléments de la colonne 0 : on considère que $C_n^0 = 1$, autrement dit : ne rien prendre c'est une façon. Ce choix est plus qu'une convention, il est légitimé par la formule précédente, par exemple $C_1^1 = 1$, et l'on a bien $C_1^1 = C_0^0 + C_0^1 = 1 + 0$.

On en déduit l'algorithme permettant de calculer C_n^p, pour *n* et *p* donnés.

Programmation



Pour avoir C_N^P avec *N* et *P* donnés, on va calculer tous les nombres situés dans le rectangle ci contre, dont le point le plus bas à droite est justement C_N^P. On doit se donner la ligne 0 ainsi que la colonne 0, pour pouvoir appliquer la formule permettant d'aller d'une ligne à la suivante.

On va utiliser un tableau à double entrée que l'on doit déclarer ainsi : *int* $C[N+1][P+1]$. Quand le programme tournera, chaque case $C[i][j]$ avec i entre 0 et N et j entre 0 et P, contiendra la combinaison $C_i^{\,j}$.

```
for(i=1; i<=P ; i++) C[0][i]=0 ;  for(i=0; i<=N; i++) C[i][0]=1;  /* conditions initiales */
/*  passage d'une ligne à la suivante, à partir de la ligne 1 */
for(ligne=1; ligne<=N; ligne++) for(col=1; col<=P; col++)
C[ligne][col]=C[ligne-1][col-1]+C[ligne –1][col] ;
afficher C[N][P] ou bien tous les nombres dans le rectangle (on retrouve le triangle
            de Pascal si l'on n'affiche pas les 0).
```

Première amélioration : On va seulement utiliser deux tableaux linéaires dont les cases vont de 0 à N, soit le tableau *int* $aC[N+1]$ et le tableau $nC[N+1]$. Quand l'*ancien* tableau $aC[]$ est rempli, correspondant à une ligne dans le rectangle, on pourra remplir le *nouveau* tableau $nC[]$ correspondant à la ligne suivante. Cela étant fait, on mettra le nouveau dans l'ancien, et on recommence en calculant $nC[]$ à partir de $aC[]$.

```
aC[0]=1;   for(i=1; i<=P ; i++) aC[i]=0 ;  /* ligne 0  */
for(ligne = 1; ligne < =N; ligne++)
  {  nC[col]= 1;  for (col=1 ; col<=P ; col++)  nC[col]=aC[col-1]+ aC[col];
     for(col=0; col<=P; col++) aC[col)=nC[col];  /* on met le nouveau dans l'ancien  */
  }
```

Deuxième amélioration : On utilise un seul tableau, déclaré *int* $C[P + 1]$. Chaque ligne, à partir de la ligne 0, va être placée à tour de rôle dans ce tableau. Au départ, il est rempli avec la ligne 0. Une ligne k du triangle, intermédiaire entre les lignes 0 et n, a pour longueur occupée k+1, tout ce qui suit étant mis à 0. La connaissance d'une ligne permet de connaître la ligne suivante, à condition d'ajouter l'élément 1 en position initiale. La nouvelle valeur de $C[i]$ s'obtient en ajoutant ce qu'il y avait dans $C[i]$ avec $C[i - 1]$. Mais attention : si l'on fait un parcours de gauche à droite, et que l'on est en position *col*, ce qui est dans $C[i - 1]$ est la nouvelle valeur de $C[i - 1]$ et non pas l'ancienne, or on a besoin de cette dernière. Pour éviter cet ennui, il convient de faire un parcours de droite à gauche. D'où le programme :

```
C[0]=1 ;  for(i=1 ; i <= P ; i++) C[i]=0 ;
for(ligne=1; ligne <=N ; ligne++) for(i= P; i >=1; i--)  C[i] + = C[i-1];
```

Formule du binôme

Le triangle de Pascal permet notamment de développer le polynôme $(a+b)^n$. Par exemple $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, où l'on retrouve comme coefficients les éléments de la ligne 4 du triangle de Pascal. Cela s'appelle la formule du binôme du Newton, qui s'écrit sous sa forme générale

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Pour démontrer cette formule, il suffit de voir d'où provient le coefficient du terme en $a^k b^{n-k}$. Dans le produit $(a + b)(a + b)\dots(a + b)$, un terme en $a^k\, b^{n-k}$ provient des termes a pris dans k parenthèses (b étant pris dans les $n - k$ autres parenthèses). Il y a autant de termes $a^k\, b^{n-k}$ que de façons de choisir k parenthèses parmi les n, soit $C_n^{\,k}$ façons, ce qui donne le coefficient du terme en $a^k\, b^{n-k}$.

Pour cette raison, les $C_n^{\,k}$ sont aussi appelés coefficients binomiaux.

4. Exercices

4.1. Applications immédiates du cours

a) *Combien existe-t-il de mots de longueur N à base de trois lettres a, b, c ?*

Avec le même raisonnement que pour les nombres en binaire, le nombre de ces mots est 3^N.

b) *Combien existe-t-il de mots de longueur N, contenant k lettres a et N – k lettres b ?*

Traitons de problème de façon très concrète. Imaginons un casier de N cases, vides au départ. On commence par jeter les k lettres a dans ces cases (mais jamais plus d'une par case). Le nombre de façons de placer les k lettres a dans les N cases est aussi le nombre de façons de choisir k cases parmi les N, soit façons. Chaque fois que l'on a placé les k lettres a, les lettres b prennent les cases restantes. Le nombre de mots est C_N^k. Remarquons que l'on aurait pu aussi bien commencer par placer les $n – k$ lettres b.

c) *Combien existe-t-il de mots de longueur 9, contenant 4 lettres a, 3 lettres b et 2 lettres c ?*

Comme auparavant, nous allons remplir un casier de 9 cases. Commençons par placer les 4 lettres a. Le nombre de façons de les placer est aussi le nombre de façons de choisir 4 cases parmi les 9, soit C_9^4. Chaque fois que les lettres a sont placés, il convient de choisir 3 cases parmi les 5 cases restantes pour placer les lettres b, soit C_5^3 façons. Et chaque fois que les a et les b sont placés, les deux lettres c prennent les places restantes.

Remarquons que dans ce contexte, les combinaisons, au nombre de C_n^k, sont aussi les distributions de k objets dans n cases.

4.2. Démonstration de formules, sans trop faire de calculs

a) *Montrer que* $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ *, ou encore* $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

On reconnaît dans 2^n le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Maintenant, classons ces parties selon leur nombre d'éléments. Il y a une partie n'ayant aucun élément, c'est la partie vide. Il y a $C_n^1 = n$ parties ayant un élément. Plus généralement, les parties à k éléments sont au nombre de C_n^k. En faisant varier k de 0 à n, et en additionnant le nombre de parties ainsi classées selon leur nombre d'éléments, on obtient la formule demandée. Remarquons que l'on obtiendrait aussi cette formule en développant $(1 + 1)^n$ selon la formule du binôme.

b) *Montrer que :* $C_n^0 – C_n^1 + C_n^2 – C_n^3 + … + (-1)^n C_n^n = 0$

Il suffit de développer $(1 + x)^n$ suivant la formule du binôme, puis de faire $x = –1$.

c) *Montrer que* $\sum_{k=0}^{q} C_n^k \, C_p^{q-k} = C_{n+p}^q$

Considérons un ensemble à $n + p$ éléments, formé par exemple de n boules rouges et de p boules vertes. Le nombre de façons de prendre q objets parmi ces $n + p$ boules est C_{n+p}^q. Ces parties formées de q boules peuvent être classées suivant le nombre k de leurs boules rouges, avec k entre 0 et q, du moins lorsque le nombre total n de boules rouges est au moins égal à q. Pour avoir les parties ayant k boules rouges et $q – k$ boules vertes, on commence par choisir k boules rouges parmi les n, soit C_n^k façons, puis à chaque fois il reste à prendre $q – k$ boules vertes parmi les p, soit C_p^{q-k} façons. D'où la formule demandée. Cette formule reste vraie lorsque le nombre total n de boules rouges est inférieur à q, car les termes additionnels C_n^k de la formule avec $k > n$ sont tous nuls.

***d)** Calcul de* $S=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)$ *(n et k étant des entiers naturels)*

***d.1)** Montrer que* $\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^k$

C'est la formule du binôme.

***d.2)** Avec x nombre réel, donner la forme trigonométrique de $1 + e^{ix}$.*

$1+e^{ix}=e^{ix/2}(e^{ix/2}+e^{-ix/2})=2\cos(x/2)\,e^{ix/2}$ grâce à la formule d'Euler sur les cosinus.
= [2 cos(x/2), x/2] en module et argument.

***d.3)** Calculer* $\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx}$ *et en déduire S.*

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx}=(1+e^{ix})^n = 2^n \cos^n(x/2)\, e^{inx/2}$ grâce aux questions précédentes.

S est la partie réelle, soit $S=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)=2^n \cos^n(x/2)\cos(nx/2)$.

***e)** Calcul de* $\sum_{k=0}^{n} (\cos(k\pi/n))^{2n}$

***e.1)** Pour n entier positif (> 0), calculer* $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1+z+z^2+...+z^{n-1}$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison z. On distingue deux cas :

* Si $z = 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = n$

* Si $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \dfrac{1-z^n}{1-z}$

***e.2)** Soit j un entier tel que $0 \le j \le 2n$. On pose* $A_j=\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(j-n)2k\pi/n}$. *En utilisant la question précédente et en précisant qui joue ici le rôle de z, calculer A_j suivant les valeurs de j. On devra trouver que A_j est nul sauf pour trois valeurs de j que l'on précisera.*

On constate que $A_j=\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i(j-n)2\pi/n})^k$. Posons $z=e^{i(j-n)2\pi/n}$.

Quand a-t-on $z = 1$? C'est le cas si et seulement si l'argument de z est nul modulo 2π, soit $(j-n)2\pi/n = 2q\pi$, ce qui impose que $(j-n)/n = q$ entier. Les valeurs possibles de j, dans ses limites fixées par l'énoncé, sont $j = 0$, $j = n$ et $j = 2n$. Dans chacun de ces trois cas : $A_0 = A_n = A_{2n} = n$.

Sinon, on a $A_j=\dfrac{1-e^{i(j-n)2\pi}}{1-e^{i(j-n)2\pi/n}}=0$ car le numérateur est nul, $e^{i(j-n)2\pi}$ étant toujours égal à 1.

***e.3)** En déduire une expression simple de* $B=\sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^j \dfrac{A_j}{4^n}$.

Grâce au 2), on trouve $B = (C_{2n}^0 A_0 + C_{2n}^n A_n + C_{2n}^{2n} A_{2n}) / 4^n = (n + C_{2n}^n n + n) / 4^n$
$= n\,(2 + C_{2n}^n) / 4^n$

e.4) *Reprendre B avec A_j tel qu'il a été défini dans le 2). On obtient ainsi une formule avec une double sommation. On admettra que l'on peut intervertir les deux sommations, ce qui donne :*
$B=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n-1}(\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j e^{i(j-n)2k\pi/n})$. *Vérifier que* $e^{i(j-n)2k\pi/n}=e^{i2jk\pi/n}$ *, puis simplifier* $\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j e^{i(j-n)2k\pi/n}$ *grâce à la formule du binôme.*

$e^{i(j-n)2k\pi/n}=e^{i2jk\pi/n}e^{-i2k\pi}=e^{i2jk\pi/n}$ car $e^{-i2k\pi}$ vaut toujours 1.
Dans ces conditions,

$$\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j e^{i(j-n)2k\pi/n}=\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j e^{i2jk\pi/n}=\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j (e^{i2k\pi/n})^j$$
$$=(1+e^{i2k\pi/n})^{2n}$$

e.5) *On rappelle la formule* $(1+e^{iX})^N=2^N\cos^N(X/2)\,e^{iNX/2}$ *(démontrée dans l'exercice précédent d-3).L'utiliser pour réécrire* $\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j e^{i(j-n)2k\pi/n}$. *En déduire que* $B=\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(k\pi/n))^{2n}$.

$$\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j e^{i(j-n)2k\pi/n}=(1+e^{i2k\pi/n})^{2n}=2^{2n}\cos^{2n}(k\pi/n)e^{i2nk\pi/n}$$
$$=2^{2n}\cos^{2n}(k\pi/n)=4^n\cos^{2n}(k\pi/n)$$

Grâce à la formule donnant B au *4)*, on obtient :

$$B=\sum_{k=0}^{n-1}(\cos k\pi/n)^{2n}$$

e.6) *En combinant les résultats obtenus pour B au 5) et au 3), démontrer la formule finale* $\sum_{k=0}^{n}(\cos(k\pi/n))^{2n}=\frac{n}{4^n}(2+C_{2n}^n)+1$.

$$\sum_{k=0}^{n}(\cos(k\pi/n))^{2n}=B+(\cos\pi)^{2n}=B+1=\frac{n}{4^n}(2+C_{2n}^n)+1$$

4.3. Des tours sur un échiquier

On place p tours sur un échiquier de n cases sur n cases, de façon qu'aucune tour ne puisse être en position de prise par une autre. Cela signifie qu'il n'y a jamais deux tours sur une même ligne ni sur une même colonne. Cette contrainte impose que p soit inférieur ou égal à n. Combien y a-t-il de façons de placer ces p tours ?

Supposons d'abord que les p tours sont placées sur les p premières colonnes de l'échiquier (à raison d'une par colonne). Sur la première colonne, il a y a n façons de placer une tour. Une fois celle-ci placée, il y a $n-1$ façons de placer une tour sur la deuxième colonne. Et ainsi de suite jusqu'à la colonne numéro p. Cela donne déjà un total de $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)=A_n^p$ façons. Ce que nous venons de faire en prenant les p premières colonnes peut être refait avec n'importe quelle autre façon de choisir p colonnes parmi les n, ce qui donne C_n^p cas. Finalement, il y a $C_n^p\,A_n^p$ façons de placer les

p tours sur l'échiquier. Remarquons que si $p = n$, on retrouve le nombre de permutations. Le placement de n tours en position de non-attaque sur un échiquier $n \times n$ est la visualisation d'une permutation parmi les $n!$ permutations possibles.

4.4. Jetons sur un échiquier

On place quatre jetons sur un échiquier de $4 \times 4 = 16$ cases.

a) *Combien y a-t-il de placements possibles ?*

$C_{16}^{4} = 1820$.

b) *Combien y a-t-il de façons, lorsqu' aucune colonne ne reste vide ?*

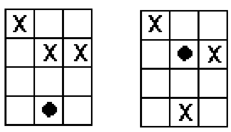
Cela exige de mettre un jeton par colonne, soit $4^4 = 256$ cas.

c) *Combien y a-t-il de façons, avec une et une seule colonne qui reste vide ?*

On commence par choisir la colonne qui reste vide, soit 4 cas. Une fois celle-ci choisie, il reste à placer les quatre jetons sur les trois colonnes restantes sans qu'aucune colonne ne reste vide, ce qui impose de placer deux jetons sur une colonne, et un jeton sur chacune des deux colonnes restantes. Il y a trois façons de choisir une colonne parmi trois, celle où l'on va mettre deux jetons, et à chaque fois, il y a $C_4^{2} = 6$ façons d'y mettre les deux jetons. A chaque fois que cela est fait, il y a quatre façons de placer un jeton sur une colonne restante, et quatre façons encore pour en mettre un sur la dernière colonne. D'où un total de 4.3.6.4.4 = 1152 cas.

c bis) *Pour la question qui précède, une personne propose la solution suivante : On commence par choisir la colonne qui va rester vide, ce qui fait quatre cas. A chaque fois, il reste à placer les 4 jetons sur les trois colonnes restantes, sans qu'aucune ne reste vide. Pour cela on commence par placer trois jetons, chacun dans une colonne, soit 4^3 cas. Puis on place le dernier jeton dans une des 9 cases restantes. On obtient au total $4.4^3.9 = 2304$ cas. Mais ce calcul est faux. Corrigez-le.*

L'erreur provient de l'ordre qui est pris pour placer d'abord trois jetons (notés x) puis le quatrième (noté ∗). En faisant cela, on compte deux fois le même placement. Par exemple, ces deux dispositions ne comptent que pour une :



D'où le résultat exact, obtenu en divisant le résultat précédent par 2, soit 2304 / 2= 1152 cas.

d) *Combien y a-t-il de façons de placer les quatre jetons avec deux colonnes vides exactement ?*

On commence par choisir les deux colonnes qui restent vides, soit $C_4^{2} = 6$ cas. A chaque fois, il reste à placer les quatre jetons dans les deux colonnes restantes. On distingue alors deux cas. Soit on met trois jetons dans une colonne et un jeton dans l'autre : il y a 2 façons de choisir la colonne où l'on met les trois jetons, puis $C_4^{3} = 4$ façons d'y mettre les trois jetons, et cela fait il reste 4 façons de placer un jeton dans la colonne restante, d'où un total de 2 . 4 . 4 = 32 cas. Soit on met deux jetons dans une colonne et deux jetons dans l'autre : il y a $C_4^{2} = 6$ façons de mettre deux jetons dans une colonne, et autant d'en mettre deux dans l'autre, d'où au total 6 . 6 = 36 cas. Finalement, on trouve 6 (32 + 36) = 408 cas.

e) *Combien y a-t-il de façons, lorsque trois colonnes restent vides ?*

Il y a 4 façons de choisir la colonne où mettre les quatre jetons, d'où 4 cas.

On peut alors vérifier que l'on retrouve toutes les façons de placer quatre jetons sur l'échiquier, en ajoutant tous les cas suivant le nombre de colonnes vides : 256 + 1152 + 408 + 4 = 1820.

4.5. Diagonales d'un polygone

Considérons un polygone à N côtés et N sommets, et supposons que jamais trois diagonales ne se coupent en un même point.

a) *Quel est le nombre de diagonales ?*

A partir de chaque sommet, on a N-3 diagonales. Avec tous les sommets, cela fait $N\,(N-3)$, mais ces diagonales sont comptées deux fois. Le nombre de diagonales est donc $N\,(N-3)\,/\,2$. Indiquons une autre méthode : on prend toutes les paires de sommets, soit C_N^2 cas, mais en faisant cela, on compte non seulement les diagonales mais les N côtés. Le nombre de diagonales est $C_N^2 - N = N\,(N-3)\,/\,2$.

b) *Quel est le nombre de points d'intersection des diagonales, considérées ici comme des segments intérieurs au polygone ?*

Chaque paire de côtés non successifs du polygone forment un quadrilatère. Ce quadrilatère a quatre côtés et deux diagonales, soit six segments. Si on enlève les deux côtés du polygone d'origine, il reste quatre segments : deux sont des diagonales ou des côtés du polygone qui ne se coupent pas (en tant que segment), deux sont deux diagonales du polygone qui se coupent en un point intérieur. Pour chaque paire de côtés du polygone, on a deux diagonales qui se coupent en un point intérieur. Cette association est bijective. Le nombre de points d'intersection des diagonales est C_N^4.

c) *Combien de segments obtient-on sur les diagonales (comme segments) du polygone, délimités par les points d'intersection et les sommets ?*

Il y a $C_N^{2\,-}\ N$ diagonales. Chaque point d'intersection de deux diagonales donne un segment de plus sur chacune des deux diagonales concernées, d'où 2 de plus. Le nombre de segments sur les diagonales est $C_N^2 - N + 2\,C_N^4 = N\,(N-3)\,(N^2 - 3N + 8)\,/\,12$.

4.6. *On considère tous les nombres, du nombre 0 au nombre 999…999 formé de n chiffres 9. Lorsque l'on écrit tous ces nombres, combien de fois le chiffre 5 est-il présent ? Traiter notamment le cas où n = 5.*

Pour $n = 1$, de 0 à 9, le chiffre 5 est écrit une fois.

Pour $n = 2$, de 0 à 99, le nombre 5 est écrit 10 fois comme chiffre des dizaines, de 50 à 59, et 10 fois comme chiffre des unités, pour chacun des dix blocs de dizaines, soit 20 fois au total.

Pour $n = 3$, de 0 à 999, le chiffre 5 est écrit 100 fois comme chiffre des centaines, et 20 fois pour chaque bloc de centaines, soit 20 . 10 = 200 fois comme chiffre des dizaines ou des unités, d'où 300 fois au total.

Pour $n = 4$, de 0 à 9999, le chiffre 5 est écrit 1000 fois comme chiffre des milliers, et ailleurs 300 . 10 = 3000 fois, soit 4000 fois au total.

Pour $n = 5$, de 0 à 99 999, le chiffre 4 est écrit 10 000 fois comme chiffre des dizaines de milliers, et ailleurs 4000 . 10 = 40 000 fois, soit au total 50 000 fois.

Par généralisation immédiate, pour n quelconque, de 0 à $10^n - 1$, le chiffre 5 est écrit $\boldsymbol{n \,.\, 10^{n-1}}$ fois. Cela se démontre par récurrence. C'est vrai pour $n = 1$. Et lorsque c'est vrai pour une certaine valeur de n, cela reste vrai pour $n + 1$, car le chiffre 5 est écrit $10^n + n\,.10^n = (n + 1)\,10^n$.

Autre méthode : La méthode précédente illustre parfaitement la réaction d'un mathématicien, disposant d'armes classiques, face au problème posé. Mais par la même occasion elle masque certains aspects de la situation, et empêche de voir la meilleure solution du problème. Pour cela, prenons tous les mots de longueur N, au nombre de 10^N. Commençons par considérer le chiffre des unités de ces nombres. Ce chiffre est autant de fois 0 que 1, 2, 3, …, 9. Le nombre de fois où le 5 est présent est donc $10^N / 10 = 10^{N-1}$. Prenons ensuite le chiffre des dizaines. Le chiffre 5 y est aussi présent que les autres chiffres, d'où 10^{N-1} chiffres 5 comme chiffre des dizaines. Et l'on continue ainsi pour le chiffre des centaines, des milliers, etc. Le nombre de 5 est donc $N\,10^{N-1}$. L'intérêt de cette méthode est de faire ressortir que le 5 est autant de fois présent comme chiffre des unités, des dizaines, etc., ce que la méthode précédente ne voyait pas.

4.7. Mots de longueur *N*, à base de 0 et de 1, sans aucun bloc de 1 répétés

a) *Déterminer le nombre u(N) de mots de longueur N, à base d'un alphabet de deux lettres 0 et 1, et ne présentant aucun bloc 11.*

Par exemple les mots de longueur 4 sont 0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010, au nombre de $u(4) = 8$. De tels mots peuvent être partagés en deux catégories :

- Ceux qui se terminent par 0. Les mots de longueur N-1 qui précèdent ce 0 n'ont aucun bloc 11, et ils sont au nombre de $u(N-1)$.

- Ceux qui se terminent par 1, et donc aussi par 01. Les mots de longueur $N - 2$ qui précèdent ce bloc 01 ne présentent aucun bloc 11, et sont au nombre de $u(N-2)$.

Finalement, $u(N)$ obéit à la relation de récurrence $u(N) = u(N-1)+u(N-2)$ avec $u(1) = 2$, pour les mots 0 et 1, et $u(2) = 3$, pour les mots 00, 01, 10. On aurait aussi $u(0) = 1$. Comme on l'a déjà vu à plusieurs reprises, une suite classique appelée suite de Fibonacci, et notée $F(N)$, obéit à la même relation de récurrence $F(N) = F(N-1)+F(N-2)$ avec au départ $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$. On en déduit que $F(2) = 1$, $F(3) = 2$, … La suite $u(N)$ n'est autre que la suite de Fibonacci, avec un décalage, plus précisément $u(N) = F(N + 2)$.

b) *On appelle u(N,K) le nombre de tels mots de longueur N avec la présence de K lettres 1. Déterminer u(N,K).*

Les lettres 1 isolées doivent s'insérer entre les $N - K$ lettres 0 ou aux extrémités des mots. Il s'agit de placer K lettres dans $N - K + 1$ positions possibles, ce qui vaut même pour $K = N$, soit $u(N,K) = C_{N-K+1}^{K}$. Notamment $u(N,K) = 0$ lorsque $N - K + 1 < K$, soit $N < 2K - 1$.

Voici une autre méthode : On sépare ces mots en deux catégories, ceux se terminant par 0 et ceux se terminant par 1. Dans le cas où le mot se termine par 0, tous les 1 sont suivis d'un 0, et l'on peut regrouper les blocs 10 en les notant A. On est alors avec des mots de longueur $N - K$, à base de 0 et de A, où la lettre A est présente K fois, soit C_{N-K}^{K} mots. Dans le cas où le mot se termine par 1, il reste un mot de longueur $N - 1$, avec la lettre 1 présente $K - 1$ fois et toujours suivie d'un 0. Si dans ce mot on remplace le bloc 10 par A, cela fait un mot de longueur $N - 1 - (K - 1) = N - K$, avec la lettre A présente $K - 1$ fois, soit C_{N-K}^{K-1} cas. Finalement le nombre de ces mots est :

$C_{N-K}^{K} + C_{N-K}^{K-1} = C_{N-K+1}^{K}$ mots.

4.8. Classement d'applications d'un ensemble à *N* éléments dans lui-même suivant la forme de leur graphe. Programmation.

Notons 0, 1, 2, 3, …, $N-1$ les éléments de l'ensemble de départ, comme ceux de l'ensemble d'arrivée. Le nombre des applications de l'ensemble à *N* éléments dans lui-même est N^N, puisque pour chaque élément du départ, on a le choix entre les *N* éléments de l'ensemble d'arrivée.

a) *Faire le programme qui énumère toutes ces applications.*

Prenons un tableau *a*[*N*] de longueur *N* où les indices de 0 à $N-1$ désignent les éléments de l'ensemble du départ. Les cases contiennent les éléments de l'ensemble d'arrivée correspondant aux indices du départ. Chaque remplissage du tableau donne une des applications cherchées. Comme chaque case contient un nombre compris entre 0 et $N-1$, le tableau peut être considéré comme un nombre de longueur *N* écrit en base *N*. En écrivant tous ces nombres l'un après l'autre dans le tableau *a*[*N*], on obtient toutes les applications. Le programme consiste à prendre tous les nombres (en base 10) de 0 à N^N-1, et à les convertir en base *N* avec une longueur *N*. On énumère ainsi toutes les applications.

Mais comment passer d'un nombre à son écriture en base *N* ? On a déjà vu comment faire pour $N=2$, avec l'écriture d'un nombre en binaire. Cette méthode se généralise à une base quelconque *N*. Si l'on veut avoir l'écriture d'un nombre en base *N* sur une longueur *N*, il suffit de faire *N* divisions successives par *N*, en notant les restes obtenus. D'où le programme :

```
NN=(long int) pow((double)N, (double)N);   /*  il s'agit de NN  */
for(nombre=0; nombre<NN; nombre++)
  { q=nombre;  /* q contient les quotients successifs, avec nombre au départ */
    for(i=0;i<N;i++)  {  r=q%N; q= q/N ; a[N-1-i]= r ; }   /* les restes r sont mis dans a[N] */
    afficher le tableau a[N] donnant le nombre en base N des poids forts aux poids faibles
  }
```

b) *Chaque fois qu'une application est trouvée, et placée dans le tableau a[N], on construit un nouveau tableau b[N] où l'on met dans la case numéro i le nombre de fois où le nombre i est touché à l'arrivée par les flèches venant du départ. Par exemple l'application qui s'écrit 011 dans a[] pour N=3 devient 120 dans b[]. Puis on réaménage le tableau b[] de façon qu'il soit trié selon les valeurs décroissantes de son contenu. Programmer.*

Il suffit de rajouter ces quelques lignes à l'intérieur de la boucle *for* faite dans la question précédente.

```
for(i=0;i<N;i++) b[i]=0;   /* mise à zéro du tableau b[] */
for(i=0;i<N;i++)  b[a[i]]++;   /* on augmente de 1 le nombre de fois où a[i] est présent */
 for(i=0;i<N-1;i++)  for(j=i+1;j<N;j++)     /* tri par sélection-échange */
if (b[i]<b[j])  { aux=b[i];b[i]=b[j];b[j]=aux;}
afficher b[N]
```

c) *Pour chaque application, le tableau b[N] contient, si on lui ôte ses 0 à la fin, ce que l'on appelle une partition du nombre N, c'est-à-dire une succession de nombres, mis dans l'ordre décroissant, dont la somme vaut N. Les applications peuvent maintenant être regroupées selon la partition du nombre N qu'elles forment. Cela constitue une façon de classer les applications selon la forme de leur graphe. On veut avoir le programme qui donne toutes les partitions du nombre N, avec à chaque fois le nombre d'applications correspondantes.*

Rappelons que pour chaque application le tableau *b*[*N*] contient une partition du nombre *N*, avec des 0 supplémentaires à la fin, éventuellement. Lorsqu'une nouvelle application est trouvée dans la boucle *for*() du programme, on fait un test pour savoir si la partition correspondante a déjà été obtenue pour les applications précédentes. Si oui, on augmente d'une unité le compteur *c*[] qui donnera à la fin le nombre d'applications ayant cette même partition. Sinon, on enregistre la nouvelle partition dans le tableau *partition*[*i*][*j*] où *i* numérote chaque partition, et l'on met son compteur *c*[*i*] à 1.

Voici le programme complet, y compris les déclarations préliminaires :

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 6
long int NN, nombre, q ,c[100];   int a[N], b[N], nbpartitions, partition[100][N];
int pareil(int k);
main()
{ int i,j,aux,r,k,flag; long int cumul;float gf,ggff;
   NN=(long int)pow((double)N,(double)N); nbpartitions=0;
  for(nombre=0; nombre<NN; nombre++)
     { q=nombre;   for(i=0;i<N;i++) {r=q%N;q=q/N; a[N-1-i]=r;}
        for(i=0;i<N;i++) b[i]=0;   f  or(i=0;i<N;i++)  b[a[i]]++;
        for(i=0;i<N-1;i++)   for(j=i+1;j<N;j++)    if (b[i]<b[j])  { aux=b[i];b[i]=b[j];b[j]=aux;}
        flag=0;   for(j=0;j<nbpartitions;j++)  if (pareil(j)==1) {c[j]++; flag=1; break;}
        if (flag==0)
           {for(i=0;i<N;i++) partition[nbpartitions][i]=b[i];   c[nbpartitions]=1; nbpartitions++;}
      }
  printf("\nNombre de partitions %d\n",nbpartitions);
  for(i=0; i<nbpartitions; i++)
      { for(j=0;j<N;j++) printf("%d ",partition[i][j]);     printf("    %ld \n", c[i]); }
}
int pareil(int k)  /* cette fonction teste si la partition dans b[] est la même que la  partition
  { int q;                numéro k déjà trouvée  */
     for (q=0;q<N;q++)   if (b[q]!=partition[k][q]) return 0;
     return 1;
   }
```

5. Problèmes

5.1. Problème 1 : Codes à quatre chiffres

On considère les codes formés de quatre chiffres, chaque chiffre étant pris entre 0 et 9, comme par exemple 4000 ou 3544 ou 7983.

1) *Combien existe-t-il de codes possibles ?*

Il s'agit de remplir un casier de quatre cases avec des chiffres. Dans la première case, on a 10 possibilités. A chaque fois, on a aussi 10 possibilités pour remplir la deuxième case. Et ainsi de suite. Finalement on trouve 10^4 = 10 000 codes possibles. Remarquons qu'il s'agit aussi du nombre d'applications d'un ensemble à 4 éléments (les quatre cases à remplir) dans un ensemble à 10 éléments (les chiffres de 0 à 9).

2) *Combien de codes ayant leurs quatre chiffres identiques ?*

Il s'agit de 0000, 1111, …, 9999, soit 10 codes.

3) *Combien de codes ayant trois de leurs chiffres identiques, le quatrième étant différent ?*

Il y a 10 façons de choisir trois chiffres identiques. A chaque fois, le nombre de façons de placer les trois chiffres identiques est aussi le nombre de façons de choisir trois cases parmi quatre, soit $C_4^3 = 4$ cas. A chaque fois, on place dans la case restante un chiffre différent de ceux déjà placés, soit 9 cas. Soit au total 10. 4 . 9 = 360 codes.

4 a) *Combien de codes ont deux fois exactement le chiffre 0, les deux autres chiffres étant différents de 0 mais tous deux égaux ?*

On choisit les deux cases où placer les 0, soit $C_4^2 = 6$ cas. A chaque fois, on a 9 possibilités pour remplir les deux autres cases, soit 6 . 9 = 54 cas.

b) *Combien de codes ont deux fois le même chiffre, et les deux autres fois le même chiffre aussi, comme par exemple 2772, mais pas quatre fois le même ?*

Ce que l'on a fait avec les deux 0, on peut le faire avec n'importe quel chiffres, d'où 10 . 54 = 540 cas, mais en faisant cela on compte deux fois les mêmes codes, par exemple 0440 compté parmi les 54 cas où l'on a placé d'abord les deux 0, et 0440 compté parmi les 54 cas où l'on a d'abord placé les deux 4. Finalement on a 540 / 2 = 270 cas.

5) a) *Combien de codes ont deux fois exactement le chiffre 0, les deux autres chiffres étant non seulement différents de 0 mais différents entre eux ?*

Il y a $C_4^2 = 6$ façons de placer les deux 0. A chaque fois, on a 9 façons de remplir la première case restante, puis 8 façons de remplir la deuxième case restante, soit au total 6 . 9 . 8 = 432 cas.

b) *Combien de codes ont deux fois exactement le même chiffre, les deux autres étant différents de ceux identiques deux fois, et aussi différents entre eux, comme par exemple 1371 ?*

Ce que l'on a fait avec les deux 0, on peut le faire avec n'importe quel chiffre. D'où au total 432 .10 = 4320 codes.

6) *Combien y a-t-il de codes où tous les chiffres sont différents les uns des autres ?*

Dans la première case, on a 10 possibilités. A chaque fois, il y a 9 cas pour la deuxième case, et ainsi de suite, soit 10 . 9 . 8 .7 = 5040 codes. Remarquons qu'il s'agit du nombre d'arrangements de 4 objets pris parmi 10.

6) *Faire une vérification des résultats précédents.*

Les résultats obtenus du 2) au 6) correspondent à tous les cas possibles. On a bien :
10 + 360 + 270 + 4320 + 5040 = 10 000.

5.2. Problème 2 : Surjections

Soit E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments. On rappelle qu'une application f de E dans F associe à chaque élément x de E un élément unique f(x) dans F. On appelle f(x) l'image de x par f.

A- *Rappels*
1) *Quel est le nombre d'application de E dans F ?*

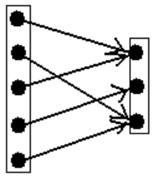
On sait que c'est n^p.

2) *Quel est le nombre de parties de l'ensemble E ?*

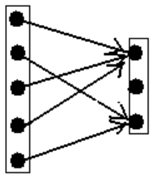
C'est 2^p.

B- *On appelle surjection de E sur F une application de E dans F telle que l'ensemble des images f(x) est égale à l'ensemble F, autrement dit les images décrivent F. Ou encore, chaque élément de F admet au moins un antécédent dans E. On appelle S(p, n) le nombre de surjections de E dans F.*

1) *Prendre p = 5 et n = 3. Dessiner une surjection, puis dessiner une application qui n’est pas une surjection.*



Surjection



Application non surjective

2) *Déterminer S(p, n) lorsque p < n.*

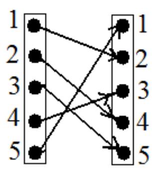
Lorsque *p* flèches partent de *E*, elles atteignent au plus *p* éléments de *F*. Avec $p < n$, il y a au moins $n - p$ éléments qui ne sont pas atteints (ils ne sont pas des images). Aucune surjection n’est possible. $S(n, p) = 0$.

3) *Calculer S(p, 1).*

Toutes les flèches issues de *E* tombent sur l’unique élément de *F*. Cette application une surjection, et elle est unique. $S(p, 1) = 1$.

4) *Montrer que S(p, p) = p !*

Les *p* flèches issues de *E* doivent atteindre les *p* éléments de *F*. Si deux flèches tombent sur un même élément de *F*, on aura moins de *p* images, et l’on ne pourra jamais avoir une surjection. Chaque élément de *F* doit admettre un antécédent unique dans *E*. Les surjections sont aussi des bijections. Et dans ce contexte, une bijection est une permutation.[3] D’où $S(p, p) = p\,!$



$\longleftrightarrow$ permutation 2 4 5 3 1 ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5) *Calculer S(3, 2). Pour cela noter E = {1, 2, 3} et F = {1’, 2’}, et introduire l’ensemble A_1 des antécédents de l’élément 1’ de F, lorsque l’on a une surjection. Enumérer tous les cas possibles pour A_1, et en déduire S(3, 2).En généralisant, montrer que $S(p, 2) = 2^p - 2$ lorsque p est supérieur ou égal à 2.*

A_1 possède soit un élément, soit deux, car s’il en avait trois, on n’aurait plus une surjection. Si l’élément 1’ admet un antécédent unique, ce qui est possible de trois façons, les deux autres flèches issues de *E* vont sur 2’, d’où 3 cas. Si l’élément 1’ admet deux antécédents, le nombre de façons d’avoir ces deux éléments de *E* pris parmi 3 est $C_3^2 = 3$, et à chaque fois le troisième élément de *E* atteint 2’, d’où 3 cas. Soit au total $S(3, 2) = 6$.

Généralisons pour $S(p, 2)$. L’ensemble A_1 des antécédents de l’élément 1’ possède soit un élément, soit 2, soit 3, …, soit $p - 1$. Et à chaque fois, les éléments restants de *E* ont pour image 2’. Il y a autant de surjections qu’il y a de parties de E, sans compter la partie vide ni la partie pleine, soit $2^p - 2$.[4]

[3] Le premier élément de *E* a *p* images possibles. A chaque fois, le deuxième élément de *E* a $p - 1$ images possibles. A chaque fois, etc. jusqu'au dernier élément qui n’a qu’une image possible. D’où $p\,!$ cas.

[4] On peut aussi dire qu’il existe 2^p applications de *E* dans *F*. Parmi elles toutes sont des surjections, sauf les deux applications où toutes les flèches convergent soit sur 1’ soit sur 2’.

6) *Montrer la formule de récurrence S(p + 1, n) = n (S(p, n) + S(p, n – 1)), en suivant cette marche à suivre :*

a) *En posant E = {1, 2, …, p, p +1} lorsqu'il compte p + 1 éléments, combien de façons y-a-il d'envoyer l'élément numéroté p + 1 de E sur F ?*

On peut envoyer l'élément $p + 1$ vers n'importe quel élément de F, soit n cas.

b) Supposer que l'élément p + 1 de E est envoyé en 1' de F. Combien existe-t-il alors de surjections envoyant les autres éléments, de 1 à p, de E vers F ? On devra distinguer deux cas.

Les flèches issues des p éléments de E autres que l'élément $p + 1$ atteignent soit les $n – 1$ éléments de F autres que 1', soit les n éléments de F. Il n'y a pas d'autres possibilités. Dans le premier cas, le nombre de façons est $S(p, n – 1)$, et dans le deuxième cas, le nombre de façons est $S(p, n)$. Soit au total $S(p, n) + S(p, n – 1)$.

c) *Conclure.*

Ce que l'on a fait au *b)* est aussi valable lorsque l'on envoie l'élément $p + 1$ vers s'importe quel élément de F. On obtient bien la formule demandée.

7) *A l'image du triangle de Pascal, faire un tableau avec en ligne les valeurs de p de 1 à 5, et en colonne les valeurs de n, et le remplir de proche en proche.*

Un élément de la ligne $p + 1$ et colonne n s'obtient en ajoutant les deux éléments juste au-dessus de lui, ceux en colonnes n et $n – 1$, exactement comme pour le triangle de Pascal, puis en multipliant le résultat par n. Cela donne le résultat suivant.

p \ n	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0
3	1	6	6	0	0
4	1	14	36	24	0
5	1	30	150	240	120

8) *Montrer que C_n^1 S(p, 1) + C_n^2 S(p, 2) + C_n^3 S(p, 3) + … + C_n^p S(p, n) = n^p. Pour cela classer les applications de E dans F selon le nombre des images f(x).*

Pour une application quelconque, les p flèches issues de E atteignent k éléments de F avec k compris entre 1 et p (k est le nombre des images). Prenons les applications associées à un nombre k donné. Il y a C_n^k façons de choisir ces k images dans F. A chaque fois, le nombre d'applications de E vers les k éléments de F est aussi le nombre de surjections $S(p, k)$. Soit au total $C_n^k\,S(p, k)$ applications. En faisant varier k de 1 à p, on trouve le nombre total d'applications, soit n^p. C'est la formule demandée.

5.3. Problème 3 : Algèbre combinatoire

x désigne ici un réel appartenant à]0, 1[.

1) *Pour tout entier naturel n, on pose $s_{n,\,0}(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$. Réécrire $s_{n,\,0}(x)$ sous forme d'un quotient et donner sa limite (x étant fixé) quand n tend vers $+\infty$.*

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :

$s(n, 0) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ puisque x est différent de 1. Lorsque n tend vers l'infini, avec $0 < x < 1$, x^{n+1} tend vers 0 et $\lim s(n,0) = \dfrac{1}{1-x}$.

2) Pour tout entier naturel n on pose: $s_{n,1}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n$

***a)** Déterminer la limite de la suite ($n\,x^n$) lorsque n tend vers $+\infty$ (on aura intérêt à passer en exponentielle).*

On tombe sur une forme indéterminée $0 \,.\, \infty$.

Mais $n\,x^n = n\,e^{n \ln x} = (1/\ln x)\ \ n \ln x\, e^{n \ln x}$. Pour $n \ln x\, e^{n \ln x}$ on tombe sur la forme indéterminée $u\,e^u$ avec $u = n \ln x$ qui tend vers $-\infty$ et e^u qui tend vers 0+. On sait que dans ce cas c'est l'exponentielle qui l'emporte. Finalement, nx^n tend vers 0.

***b)** Exprimer $(1-x)\,s_{n,1}(x)$ à l'aide de $s_{n,0}(x)$ et en déduire la limite de $s_{n,1}(x)$ quand n tend vers $+\infty$.*

$$\begin{aligned}(1-x)s_{n,1}(x) &= 1+2x+3x^2+...+nx^{n-1} + (n+1)x^n \\ &\quad -x-2x^2-...-(n-1)x^{n-1}-nx^n-(n+1)x^{n+1} \\ &= 1+x+x^2+...+x^{n-1}+x^n-(n+1)x^{n+1} \\ &= s(n,0)-(n+1)x^{n+1}\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, on a vu que $(n+1)x^{n+1}$ tend vers 0, d'où

$(1-x)\lim s(n,1) = \lim s(n,0)$. Ainsi $\lim s(n,1) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

***c)** Retrouver le résultat précédent en dérivant $s_{n+1,0}(x)$ considérée comme fonction de x.*

On constate aisément que la dérivée par rapport à x de $s_{n+1,0}(x)$ n'est autre que $s_{n,1}(x)$, soit $s_{n,1}(x) = (s_{n+1,0}(x))' = \left(\dfrac{1-x^{n+2}}{1-x}\right)' = \dfrac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(1-x)^2}$. Les deux premiers termes du numérateur, de la forme $n\,x^n$, tendent vers 0. On a bien $s_{n,1}(x)$ qui tend vers $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ pour n infini.

***3)** Plus généralement, pour tout couple (n, r) de nombres entiers naturels, on pose :*

$s_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{r+k}^{r}.x^k$ ou si vous préférez $s_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r} x^k$

(où C_{r+k}^{r} est le nombre de façons de prendre r objets parmi k+r, sans tenir compte de l'ordre).

Vous aurez intérêt à épancher cette formule.

***a)** Vérifier que l'on retrouve bien $s_{n,0}(x)$ et $s_{n,1}(x)$ comme cas particuliers.*

Pour $r = 0$, on constate que $\sum_{k=0}^{n} C_k^0 x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k = s_{n,0}(x)$.

Pour $r = 1$, $\sum_{k=0}^{n} C_{k+1}^1 x^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k = s_{n,1}(x)$

b) *On suppose que n et r sont des entiers positifs (non nuls). On rappelle que pour tout entier naturel non nul k, grâce à la formule utilisée dans le triangle de Pascal, on a :*
$C_{r+k}^{r} - C_{r+k-1}^{r} = C_{r+k-1}^{r-1}$ *. Déduire de ce résultat que :*
$(1 - x)\, s_{n,\, r}(x) = s_{n,\, r-1}(x) - C_{r+n}^{r}\, x^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
(1-x)s_{n,r}(x) &= (1-x)(C_r^r + C_{r+1}^r x + C_{r+2}^r x^2 + \ldots + C_{r+n}^r x^n \\
&= C_r^r + C_{r+1}^r x + C_{r+2}^r x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_{r+n}^r x^n \\
&\qquad - C_r^r x - C_{r+1}^r x^2 - C_{r+2}^r x^3 - \ldots - C_{r+n-1}^r x^n - C_{r+n}^r x^{n+1} \\
&= C_r^r + C_r^{r-1} x + C_{r+1}^{r-1} x^2 + C_{r+2}^{r-1} x^3 + \ldots + C_{r+n-1}^{r-1} x^n - C_{r+n}^r x^{n+1} \\
&= C_{r-1}^{r-1} + C_r^{r-1} x + C_{r+1}^{r-1} x^2 + C_{r+2}^{r-1} x^3 + \ldots + C_{r+n-1}^{r-1} x^n - C_{r+n}^r x^{n+1} \\
&= s_{n,r-1}(x) - C_{r+n}^r x^{n+1}
\end{aligned}$$

c) *Déterminer la limite de la suite de terme général $n^r \cdot x^n$ pour n infini. Puis prendre la suite de terme général $C_{n+r}^{r}\, x^n$ et déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$ (pour cela on pourra commencer par écrire la formule donnant C_{n+r}^{r} et montrer que son numérateur est inférieur à $(n + r)^r$). En déduire par récurrence que, lorsque n tend vers $+\infty$, $s_{n,\, r}(x)$ tend vers $\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$*

$n^r\, x^n = n^r x^n = \dfrac{(n \ln x)^r e^{n \ln x}}{(\ln x)^r}$. Là encore on tombe sur une forme indéterminée ∞ . 0, de la forme $u\, e^u$, et l'exponentielle l'emporte, d'où $n^r x^n$ tend vers 0 pour infini.

Prenons maintenant $C_{n+r}^{r} = \dfrac{(n+r)(n+r-1)\ldots(n+1)}{r!}$ avec r facteurs au numérateur, tous inférieurs ou égaux à $n + r$. Donc

$$\begin{aligned}
0 < C_{n+r}^r x^n &< \frac{(n+r)^r x^n}{r!} \\
&< \frac{(n+r) x^{n+r}}{r!\, x^r} \\
&< \frac{N x^N}{r!\, x^r}
\end{aligned}$$

où l'on a posé $n + r = N$. Lorsque n tend vers l'infini, N aussi, et $N\, x^N$ tend vers 0. Pris en tenaille entre 0 et une quantité qui tend vers 0, $C_{n+r}^r x^n$ tend vers 0.

Par passage à la limite pour n infini, la relation de récurrence du 3b), où $C_{n+r}^r x^{n+1}$ tend vers 0, donne alors:

$$\lim s_{n,r}(x) = \frac{1}{1-x} \lim s_{n,r-1}(x)$$

On en déduit que, pour n qui tend vers l'infini, $\lim s_{n,r}(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$, car cette formule, vraie au rang $r = 0$, se propage ensuite à un rang r quelconque grâce à la relation de récurrence précédente.

5.4. Problème 4 : Partitions et suites

*Les deux parties **A et B** sont complètement indépendantes. La partie **C** fait le lien entre elles.*

A- *On considère la suite $U_{n,\,p}$ indexée par n qui décrit **N**, avec p nombre entier naturel fixé, telle que* $U_{n,p}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^p}{k!}=\frac{0^p}{0!}+\frac{1^p}{1!}+\frac{2^p}{2!}+\ldots+\frac{n^p}{n!}$.[5] *Pour chaque valeur de p, on a une suite ($U_{n,\,p}$).On va montrer que cette suite admet une limite, quelle que soit la valeur de p que l'on prend.*

1) *Etude de $U_{n,\,0}$. On pose $U_{n,\,0}=S_n$, soit* $S_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

a) *On considère l'intégrale* $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{n!}e^{-t}dt$. *Montrer que* $0\le I_n\le\frac{1}{(n+1)!}$.

La fonction sous l'intégrale étant ≥ 0 sur [0 1], et les bornes étant dans le sens croissant, l'intégrale est aussi ≥ 0.

D'autre part, sur [0 1], comme $e^{-t}\leq 1$, on a $\frac{t^n}{n!}e^{-t}\le\frac{t^n}{n!}$. Comme l'intégration préserve les inégalités, on en déduit que

$$\int_0^1\frac{t^n}{n!}e^{-t}dt\le\int_0^1\frac{t^n}{n!}dt$$

$$\le\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)!}$$

b) *Calculer I_0.*

$$I_0=\int_0^1 e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^1=-\frac{1}{e}+1$$

c) *Montrer que* $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{e(n+1)!}$.

Prenons $I_{n+1}=\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}dt$, et faisons une intégration par parties en posant : $u=t^{n+1}/(n+1)!$ et $v'=e^{-t}$, d'où $u'=t^n/n!$ et $v=-e^{-t}$.

$$I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1+\int_0^1\frac{t^n}{n!}e^{-t}dt=-\frac{1}{e(n+1)!}+I_n$$

c) *En appliquant la formule précédente de façon répétée à partir de I_n, montrer que $e=S_n+e\,I_n$.*

$$I_n=I_{n-1}-\frac{1}{e\,n!}$$

$$I_{n-1}=I_{n-2}-\frac{1}{e\,(n-1)!}$$

....

$$I_1=I_0-\frac{1}{e1!}$$

Par addition membre à membre, il se produit des simplifications en cascade, et il reste :

$$I_n=I_0-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{1!}\right)=I_0-\frac{S_n-1}{e}=1-\frac{1}{e}-\frac{S_n-1}{e}=1-\frac{S_n}{e}$$

---

[5] Rappelons que l'on prend 0! = 1.

On a bien $e\, I_n = e - S_n$, ou $e = S_n + e\, I_n$.

***d)** En déduire que la suite S_n converge, et préciser sa limite notée L_0.*

Lorsque n tend vers l'infini, on voit, grâce au a), que I_n est prise en sandwich entre 0 et une quantité qui tend vers 0, donc I_n tend vers 0, et S_n tend vers e : $L_0 = e$.

***2)** Etude de* $U_{n,1} = \dfrac{0}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{2}{2!}+\dfrac{3}{3!}+\ldots+\dfrac{n}{n!}$.

Pour $n > 0$, quelle relation simple lie $U_{n,1}$ et $U_{n-1,0}$. En déduire que la suite $(U_{n,1})$ converge et préciser sa limite L_1.

On a $U_{0,1} = 0$ et pour $n > 0$, $U_{n,1} = \dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)!}$ car $k / k! = 1 / (k-1)$!

$$=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}=S_{n-1}=U_{n-1,0}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $U_{n,1}$ a la même limite que S_{n-1}, d'où $L_1 = L_0 = e$.

***3)** Etude de* $U_{n,2}=\dfrac{0}{0!}+\dfrac{1^2}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{3^2}{3!}+\ldots+\dfrac{n^2}{n!}$.

Remarquer que $k^2 = k\,(k-1) + k$. Pour $n > 1$, donner une relation liant $U_{n,2}$, $U_{n-1,0}$ et $U_{n-2,0}$. En déduire que la suite $U_{n,2}$ converge et donner sa limite L_2.

Pour $k > 1$, on a $k^2 / k! = 1 / (k-2)! + 1 / (k-1)!$. On en déduit que, pour $n > 1$:

$$\begin{aligned}
U_{n,2} &= \frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\ldots+\frac{n^2}{n!}\\
&= \frac{1}{1!}+(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!})+(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!})+\ldots+(\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}) = \frac{1}{0!}+\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\\
&= (\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-2)!})+(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!})\\
&= U_{n-2,0}+U_{n-1,0}
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $U_{n,2}$ tend vers $2e$.

***4)** Passons au cas général.*

***a)** Développer $(1+k)^p$ grâce à la formule du binôme.*

$$(1+k)^p = \sum_{q=0}^{p} C_p^q k^q$$

***b)** Montrer que* $\displaystyle\sum_{q=0}^{p} C_p^q\, U_{n,q} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^p}{k!} = U_{n+1,p+1}$.

Pour ce faire, on admettra la formule d'interversion des sommations Σ, soit $\displaystyle\sum_{q=0}^{p}(\sum_{k=0}^{n}u(k,q)) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{p}u(k,q) = \sum_{k=0}^{n}(\sum_{q=0}^{p}u(k,q))$ *en l'appliquant à* $\displaystyle\sum_{q=0}^{p} C_p^q\, U_{n,q}$. On sera aussi amené à appliquer la formule du binôme.

$$\sum_{q=0}^{p} C_p^q \, U_{n,q} = \sum_{q=0}^{p} C_p^q \sum_{k=0}^{n} \frac{k^q}{k!} = \sum_{q=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} C_p^q \, \frac{k^q}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} C_p^q \, \frac{k^q}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{k!} C_p^q \, k^q$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (\sum_{q=0}^{p} C_p^q \, k^q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (k+1)^p$$

où l'on a utilisé la formule du binôme, soit $\sum_{q=0}^{p} C_p^q k^q = (1+k)^p$.

D'autre part,

$$U_{n+1,\, p+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k^{p+1}}{k!} = \frac{1^{p+1}}{1!} + \frac{2^{p+1}}{2!} + \frac{3^{p+1}}{3!} + ... + \frac{(n+1)^{p+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1^p}{0!} + \frac{2^p}{1!} + \frac{3^p}{2!} + ... + \frac{(n+1)^p}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^p}{k!}$$

La formule est démontrée.

c) *Montrer que pour p entier naturel donné, la suite ($U_{n,\, p}$) converge lorsque n tend vers l'infini. Faire pour cela un raisonnement par récurrence sur p. On appelle L_p cette limite. En déduire que*

$$L_{p+1} = \sum_{k=0}^{n} C_p^k \, L_k$$

Il s'agit de montrer que la suite ($U_{\text{n, p}}$) admet toujours une limite L_{p}, pour toutes les valeurs de *p*. Faisons un raisonnement par récurrence sur *p*.

* On sait déjà que ($U_{\text{n, 0}}$) admet une limite $L_0 = e$.

* Supposons que jusqu'à une certain rang *p* les suites ($U_{\text{n, q}}$) admettent une limite L_{q} , *q* étant compris entre 0 et *p*, et montrons que cela reste vrai pour $U_{\text{n, p +1}}$.

On sait, grâce au *b)*, que $\sum_{q=0}^{p} C_p^q \, U_{n,q} = U_{n+1,p+1}$. Lorsque *n* tend vers l'infini, on sait par hypothèse de récurrence que $\sum_{q=0}^{p} C_p^q \, U_{n,q}$ tend vers $\sum_{q=0}^{n} C_p^q \, L_q$, donc $U_{\text{n+1, p+1}}$ admet aussi cette limite, au même titre que $U_{\text{n, p+1}}$. Finalement $U_{\text{n, p+1}}$ admet une limite notée $L_{\text{p+1}}$ et grâce à l'égalité précédente, on a la relation $L_{p+1} = \sum_{k=0}^{n} C_p^k \, L_k$

B- *On se donne un ensemble E non vide. Par définition, une partition de E est constituée par des parties de E non vides, disjointes deux à deux, et dont l'union donne E. L'ordre dans lequel ces parties sont prises n'a pas d'importance. On accepte aussi comme partition particulière la partition de E en une seule partie, à savoir E.*[6] *Un ensemble E ayant n éléments admet un certain nombre de partitions. Par exemple, l'ensemble E = {1, 2, 3, 4} admet notamment une partition en deux parties qui est {1, 2} {3, 4}, ou une autre qui est {1, 3} {2, 4}, ou encore une partition en une partie qui est {1, 2, 3, 4} Le nombre de partitions possibles d'un ensemble E à n éléments est noté B_n.*[7] *Notre objectif est de connaître B_n.*

[6] En termes concrets, une partition d'un ensemble (comme celle d'un pays) consiste à couper l'ensemble en plusieurs morceaux. Mais, contrairement au sens commun, on compte aussi comme partition de l'ensemble celle qui consiste à ne rien couper. Si on fait cela, c'est parce que les formules sur les partitions incluent cette partition très spéciale.

[7] On appelle les B_{n} nombres de Bell.

Par convention, on prend $B_0 = 1$. On constate aussi que pour un ensemble à un élément, soit E = {1}, il existe une seule partition possible, soit {1}, et $B_1 = 1$. Pour un ensemble à deux éléments, soit E = {1, 2}, il existe deux partitions, à savoir la partition {1}, {2} et la partition {1, 2},d'où $B_2 = 2$.

***1)** Montrer que $B_3 = 5$, puis calculer B_4 en énumérant toutes les partitions de l'ensemble E = {1, 2, 3, 4}*

Prenons $n = 3$ et $E = \{1, 2, 3\}$. Les partitions sont, classées suivant le nombre de parties :
{1}, {2], {3}
{1, 2}, {3}
{1, 3}, {2}
{2, 3}, {1}
{1, 2, 3}, d'où $B_3 = 5$.

Prenons $n = 4$ et $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Les partitions sont :
{1}, {2}, {3}, {4}
{1, 2, 3}, {4}
{1, 2, 4}, {3}
{1, 3, 4}, {2}
{2, 3, 4}, {1}
{1, 2}, {3, 4}
{1, 3}, {2, 4}
{1, 4}, {2, 3}
{1}, {2}, {3, 4}
{1}, {3}, {2, 4}
{1}, {4}, {2, 3}
{2}, {3}, {1, 4}
{2}, {4}, {1, 4}
{3}, {4}, {1, 2}
{1, 2, 3, 4}, d'où $B_4 = 15$.

***2)** On veut établir une relation de récurrence liant B_{n+1} aux B_i qui le précèdent, avec i entre 0 et n. Pour cela, on prend un ensemble à n + 1 éléments, soit E = {1, 2, 3, …, n, n + 1}. En privilégiant l'élément n + 1, classons les partitions suivant le nombre d'éléments k + 1 de la partie qui contient l'élément n + 1.*

***a)** Quelles sont les valeurs possibles de k ?*

Le nombre k varie de 0 avec la partie à un élément qui est $\{n + 1\}$, à n avec la partie pleine.

***b)** Quand on se donne une valeur de k acceptable, et que l'on prend toutes les partitions de E avec la partie où se trouve l'élément n + 1 ayant k + 1 éléments, combien existe-t-il de telles partitions ? Pour cela, commencer par compter le nombre de parties à k + 1 éléments avec parmi eux l'élément n + 1, puis une fois cette partie choisie, indiquer le nombre de partitions de E possédant cette partie.*

Avec k donné, le nombre de parties à $k + 1$ éléments avec parmi eux $n + 1$ est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n (tous sauf l'élément $n + 1$), soit C_n^k. Chaque fois qu'une telle partie est choisie, il reste à prendre toutes les partitions des éléments restants, au nombre de $n - k$, soit B_{n-k}. Le nombre de partitions où l'on a une partie possédant $k + 1$ éléments est $C_n^k\, B_{n-k}$.

***c)** En déduire que* $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B_k$.

Pour une valeur de k donnée, on a trouvé $C_n^k\, B_{n-k}$. Lorsque k va de 0 [8] à n, on a bien :

[8] On comprend ici, *a posteriori*, le fait d'avoir fait le bon choix en prenant $B_0 = 1$.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, B_k \; .$$

d) *Calculer B_5.*

$$B_5 = C_4^0 B_0 + C_4^1 B_1 + C_4^2 B_2 + C_4^3 B_3 + C_4^4 B_4$$
$$= 1 + 4\times 1 + 6\times 2 + 6\times 5 + 1\times 15 = 52$$

C- *Lien entre les nombres de Bell B_p et les limites L_p des suites $(U_{n,\,p})$.*

1) *Montrer que $L_p = e\,B_p$, ou si l'on préfère* $B_p = \dfrac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k^p}{k!}$.

On a vu que les limites L_p obéissaient à la relation de récurrence $L_{p+1} = \sum_{k=0}^{n} C_p^k \, L_k$. Les nombres de Bell obéissent à la même relation de récurrence $B_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, B_k$. Mais les conditions initiales sont différentes, avec $B_0 = 1$ et $L_0 = e$. Par récurrence évidente, on en déduit que $L_p = e\,B_p$.

2) *Calculer L_3, L_4, L_5.*

$L_3 = 5\,e$, $L_4 = 15\,e$, $L_5 = 52\,e$.

5.5. Problème 5 : Limite de $$\frac{1}{1\times 2\times \ldots\times p} + \frac{1}{2\times 3\times \ldots\times (p+1)} + \frac{1}{3\times 4\times \ldots\times (p+2)} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ldots(k+p)}$$ somme des inverses des produits de *p* entiers successifs, avec $p \geq 2$

1) *Dessiner les premières lignes et colonnes du triangle de Pascal. Rappelons que celui-ci contient le terme C_n^p sur sa $n^{ème}$ ligne et sa $p^{ème}$ colonne.*

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	. . . .						

Rappelons la règle de construction : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

2) *Somme des inverses des termes de la colonne p*

2.1) *On prend la colonne p = 0. Quelle est la limite de la somme des inverses de ses termes ?*

Il s'agit de 1 + 1 + 1 + 1 +.... La limite est $+\infty$.

2.2) *Faire de même avec la colonne p = 1.*

Il s'agit de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$. On retrouve la série harmonique, dont on sait que la limite est $+\infty$.

2.3) *Faire de même avec la colonne p = 2. Pour cela on devra d'abord constater que les dénominateurs de chaque terme peuvent s'écrire comme somme d'entiers successifs, grâce à la règle de constrction du triangle de Pascal, et l'on rappelle que 1 + 2 + 3 +...+ n = n (n + 1) / 2. Puis on utilisera le fait que* $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Il s'agit de

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\dots=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{3+3}+\frac{1}{6+4}+\frac{1}{10+5}+\dots$$

$$=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+\dots$$

$$=\frac{2}{1\times 2}+\frac{2}{2\times 3}+\frac{2}{3\times 4}+\frac{2}{4\times 5}+\frac{2}{5\times 6}+\dots$$

$$=2(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\dots)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

On a alors

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

Cette somme tend vers 1 pour *n* infini.

Finalement $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\dots=2.$

2.4) *Cas général avec* $p\geq 2$.

2.4.1) *Montrer que* $(p-1)\,C_{n-1}^{p-1}\,C_n^{p-1}=p\,C_n^p\,C_{n-1}^{p-2}$ *puis que* $\frac{1}{C_n^p}=\frac{p}{p-1}(\frac{1}{C_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{C_n^{p-1}})$ *(avec* $n\geq p$*)*

D'une part

$$(p-1)\,C_{n-1}^{p-1}\,C_n^{p-1}=(p-1)\frac{(n-1)\dots(n-p+1)}{(p-1)!}\,\frac{n\dots(n-p+2)}{(p-1)!}$$

$$=\frac{n(n-p+1)\,((n-1)\dots(n-p+2))^2}{(p-2)!\,(p-1)!}$$

D'autre part

$$p\,C_n^p\,C_{n-1}^{p-2}=p\frac{n\dots(n-p+1)}{p!}\,\frac{(n-1)\dots(n-p+2)}{(p-2)!}$$

$$=\frac{n(n-p+1)\,((n-1)\dots-n-p+2))^2}{(p-1)!\,(p-2)!}$$

Il y a bien égalité.

On en déduit que $\frac{1}{C_n^p}=\frac{p}{p-1}\frac{C_{n-1}^{p-2}}{C_{n-1}^{p-1}\,C_n^{p-1}}=\frac{p}{p-1}\frac{C_n^{p-1}-C_{n-1}^{p-1}}{C_{n-1}^{p-1}\,C_n^{p-1}}$ car $C_n^{p-1}=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p-2}$.

Finalement, après simplification : $\dfrac{1}{C_n^p}=\dfrac{p}{p-1}(\dfrac{1}{C_{n-1}^{p-1}}-\dfrac{1}{C_n^{p-1}})$.

2.4.2) *En déduire la forme explicite de* $\dfrac{1}{C_p^p}+\dfrac{1}{C_{p+1}^p}+\dfrac{1}{C_{p+2}^p}+...+\dfrac{1}{C_{p+q}^p}=\sum_{k=0}^{q}\dfrac{1}{C_{p+k}^p}$ *(avec q ≥ 0) et déterminer sa limite lorsque q tend vers l'infini.*

$$\frac{1}{C_p^p}+\frac{1}{C_{p+1}^p}+\frac{1}{C_{p+2}^p}+...+\frac{1}{C_{p+q}^p}=\frac{p}{p-1}(\frac{1}{C_{p-1}^{p-1}}-\frac{1}{C_p^{p-1}}+\frac{1}{C_p^{p-1}}-\frac{1}{C_{p+1}^{p-1}}+\frac{1}{C_{p+1}^{p-1}}-\frac{1}{C_{p+2}^{p-1}}+\ ...\ +\frac{1}{C_{p+q-1}^{p-1}}-\frac{1}{C_{p+q}^{p-1}})$$

$$=\frac{p}{p-1}(\frac{1}{C_{p-1}^{p-1}}-\frac{1}{C_{p+q}^{p-1}})=\frac{p}{p-1}(1-\frac{1}{C_{p+q}^{p-1}})$$

Lorsque *q* tend vers l'infini, C_{p+q}^{p-1} tend vers l'infini, et $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{C_{p+k}^p}=\dfrac{p}{p-1}$.

Remarquons que pour *p* = 2, on retrouve bien le résultat obtenu au 2.3).

2.4.3) *En s'aidant du résultat précédent calculer la limite de :*

$\dfrac{1}{1\times2\times...\times p}+\dfrac{1}{2\times3\times...\times(p+1)}+\dfrac{1}{3\times4\times...\times(p+2)}+...=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(k+1)...(k+p)}$ *, avec p ≥ 2.*

Il suffit d'appliquer la formule $C_{p+k}^p=\dfrac{(p+k)(p+k-1)...(k+1)}{p!}$, soit

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)...(p+k)}=\frac{1}{p!\,C_{p+k}^p}$$

D'où $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(k+1)...(k+p)}=\dfrac{1}{p!}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{C_{p+k}^p}=\dfrac{1}{p!}\ \dfrac{p}{p-1}=\dfrac{1}{(p-1)\ (p-1)!}$

Par exemple pour *p* = 2 on retrouve 1, pour *p* = 3 on obtient 1/4 et pour *p* = 4 on a 1/18.

Pour aller plus loin, surtout en matière de programmation, on pourra consulter les documents suivants :

Dans mon cours d'**algorithmique** (rubrique *enseignements*, sur le site *audibertpierre.fr*), on trouvera :

* Dans le *chapitre VII, énumérations dans l'ordre alphabétique*
énumération des nombres en binaire
énumération des permutations
énumération des combinaisons

* Dans le *chapitre VIII, quelques notions de combinatoire*
des compléments sur les permutations

* Dans le *chapitre IX, quelques exercices d'examen*

distribution de prospectus dans des boîtes aux lettres
divers mélanges de cartes

* Dans le chapitre *IXb, examen d’algorithmique 2008*
énumération des anagrammes