Suites numériques

Cours, exercices corrigés, programmation

Quand on parle d'une suite, il s'agit d'une succession de nombres. Une suite représente en général l'évolution d'une quantité, par exemple une population, ou bien un capital, au fil du temps, année après année, ou seconde par seconde, … On remplace l'évolution continue par une succession de *photos* prises à intervalles réguliers.

1. COURS

1.1. Définition

Une suite, notée (u_n) avec $n \in \mathbf{N}$, est une succession infinie de nombres u_n indexés (numérotés) par un nombre n qui est un entier naturel, soit u_0, u_1, u_2, u_3, …

En général le terme initial est u_0, mais la suite peut parfois commencer par u_1 , ou par u_2 , selon les circonstances.

1.2. Comment se donne-t-on une suite ?

Le plus souvent,

Une suite est définie
- par une relation de récurrence de la forme u_{n+1} = fonction de u_n , c'est-à-dire un terme est connu à partir de celui qui le précède)
- et par le terme initial u_0.

Par exemple prenons la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n$, et par $u_0=1/2$. On peut alors calculer les termes successifs de proche en proche à partir de $u_0=1/2$: $u_1=1$, $u_2=2$, $u_3=4$, $u_4=8$, … Notons qu'une suite ainsi définie par sa relation de récurrence et son terme initial est unique. Par contre, si l'on se donne seulement la relation de récurrence sans préciser le terme initial, il va exister une infinité de suites, selon le point de départ que l'on prend.

Remarque : la relation de récurrence peut être plus complexe, un terme pouvant dépendre non seulement de celui qui le précède mais de plusieurs termes qui le précèdent.

Par exemple, prenons la suite dite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, avec comme conditions initiales $u_0 = 0$, et $u_1 = 1$. A partir de ces deux premiers termes, on peut calculer de proche en proche les termes suivants, soit $u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$, $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$, …, et l'on obtient la succession 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc. Notons qu'il est obligatoire dans le cas présent de se donner deux termes au départ, un seul ne pouvant suffire pour avoir une suite unique.

1.3. Problème d'existence

Une suite indexée par un entier naturel est formée d'un nombre infini de termes. Mais il peut arriver qu'en calculant les termes successifs à partir de u_0, on tombe sur un terme qui n'existe plus. Dans ce cas, on dira que la suite n'est pas définie : elle n'existe pas, puisqu'elle n'a pas l'infinité de termes requise.

Exemple : soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 1/u_n$. Cette suite est-elle définie ? Pour cela, calculons : $u_1 = 1 – 1 = 0$, d'où u_2 n'existe pas à cause de la division 1/0. La suite n'est pas définie.

1.4. Forme explicite d'une suite

Une suite peut aussi être connue avec u_n comme fonction de n. Par exemple $u_n = n^2$, ce qui donne u_0=1, u_1=1, u_2=4, u_3=8, u_4=16, etc. Dans ce cas, chaque terme est obtenu directement, sans avoir besoin de faire des calculs successifs en utilisant la relation de récurrence. Ce genre de formule donnant u_n par rapport à n est appelé la forme explicite de la suite. Dans de nombreux problèmes, il s'agira de passer de la définition d'une suite par sa relation de récurrence et ses conditions initiales, à sa forme explicite.

1.5. Evolution d'une suite

Dans certains cas, la suite présente une évolution particulièrement simple. Cela arrive dans les cas suivants :

- Une suite est constante si $u_n = u_0$ quel que soit n. Cela s'exprime aussi bien de la façon suivante : $u_{n+1}= u_n$ quel que soit n entier naturel.
- Une suite est croissante lorsque u_n augmente lorsque n augmente. Cela s'exprime ainsi : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ quel que soit n. De même une suite est décroissante lorsque $u_{n+1} - u_n \leq 0$ quel que soit n.

1.6. Comportement d'une suite à l'infini, ou nature d'une suite

On dit qu'une suite converge lorsqu'elle tend vers une limite L (finie) lorsque n tend vers l'infini.

On dit qu'une suite diverge lorsqu'elle ne converge pas. Ainsi une suite diverge si u_n devient infini, ou encore si elle ne cesse d'osciller, en finissant par tourner sur un cycle de points, ou encore si elle subit des variations désordonnées … Les cas de divergence sont beaucoup plus diversifiés que la convergence.

1.7. Une condition suffisante de convergence

Une suite croissante et majorée converge, sa limite est alors inférieure ou égale au majorant. De même une suite décroissante et minorée converge, sa limite étant supérieure ou égale au minorant.

Nous ne démontrerons pas cette propriété, mais elle est facile à comprendre : Imaginons un train qui avance sur une voie ferrée (fonction croissante), avec un butoir au bout (le majorant). Il ne peut arriver qu'une seule chose : le train va s'arrêter (limite), avant le butoir, au pire sur le butoir.

Une autre conséquence est la suivante : Si la suite est croissante et qu'elle n'admet aucun majorant, ou aucune limite, elle s'en va à l'infini. Finalement une suite croissante n'a que deux destins possibles : soit elle converge, soit elle s'en va à l'infini.

1.8. Comment avoir la limite d'une suite, quand cette limite existe

Si la suite admet une limite *L*, alors la limite vérifie la relation de récurrence, sous réserve que la fonction sous-jacente à la relation de récurrence soit continue en *L*.

En effet, prenons le cas le plus simple où un terme de la suite est fonction de celui qui le précède, c'est-à-dire que l'on a une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, et que u_n tend vers une limite L lorsque n tend vers l'infini, alors u_{n+1} tend vers L, et $f(u_n)$ tend vers $f(L)$ si f est bien continue en L

(car si la fonction est continue en L, non seulement sa limite existe et en plus elle est égale à la valeur de la fonction en ce point). L'égalité devient $L = f(L)$.

1.9. Quelques suites classiques

1) Suite arithmétique

Une suite arithmétique de raison r vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$. Il s'agit d'une sorte de marche à pied, où à partir de u_0, on avance pas à pas, chaque pas ayant pour longueur r. Au bout de n pas, on a avancé de $n\,r$. D'où la formule explicite $u_n = u_0 + n\,r$.

Calculons la somme S_n des n+1 premiers termes d'une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0 donnés :

$S_n = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$
$= u_0 + u_0+\mathrm{r} + u_0+2\mathrm{r} + \ldots + u_0+nr = (n + 1)\, u_0 + r(1 + 2 + 3 +\ldots+ n)$
$= (n + 1)\, u_0+ n\,(n + 1)\, r / 2$.

2) Suite géométrique

Une suite géométrique de raison q obéit à une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = q\, u_n$. Elle est définie par sa raison q et par son terme initial u_0.

Forme explicite

$u_n = q\ \ u_{n-1}$
$u_{n-1} = q\ \ u_{n-2}$
…
$u_1= q\, u_0$

En multipliant membre à membre ces égalités, il se produit des simplifications en cascade, et il reste :

$\boxed{u_n = u_0\, q^n}$

Exemple

Une population d'insectes augmente de 30% par an. Aujourd'hui, elle compte un million d'individus. On veut savoir au bout de combien d'années elle atteindra 100 millions.

Appelons u_0 la population actuelle, et u_n sa valeur au bout de n années. En un an, elle augmente de 30% = 30/100= 0,3. Cela signifie que $u_{n+1}= u_n + 0{,}3\, u_n = 1{,}3\, u_n$. On obtient une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison 1,3. D'où la forme explicite $u_n=1{,}3^n\, 10^6$. On veut trouver n tel que $u_n=100.\ 10^6$, c'est-à-dire $1{,}3^n=100$, ou encore $n \ln 1{,}3 = \ln 100$, $n = \ln 100 / \ln 1{,}3$, $n = 17{,}6$ années.

Evolution et nature de la suite géométrique de raison *q* et de terme initial 1

Elle s'écrit $u_n= q^n$.

- Si $q > 1$, q^n ne cesse d'augmenter avec n. La suite est croissante, et lorsque n tend vers l'infini, u_n tend vers $+\infty$.
- Si $0 < q < 1$, q^n diminue lorsque n augmente. La suite est décroissante, et lorsque n tend vers l'infini, u_n tend vers 0.
- Si $q < 0$, q^n oscille en changeant de signe selon que n est pair ou impair. Plus précisément, si $-1 < q < 1$, q^n oscille en tendant vers 0 pour n infini, et si $q<-1$, les oscillations deviennent de plus en plus grandes, la suite diverge.
- Les cas restants : $q = 1$, $q = 0$, $q = -1$ ne présentent pas un grand intérêt.

Si u_0 n'est pas égal à 1, on peut généraliser ce qui précède, en faisant attention au signe de u_0. Par exemple si u_0 est négatif, et que $q > 1$, la suite est décroissante (puisque ses termes sont négatifs) et elle tend vers $-\infty$.

Somme des *n*+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison *q* et de terme initial 1

On a la formule fondamentale :

$$\boxed{1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \text{ est différent de 1}}$$

En effet, il suffit d'appliquer l'identité remarquable :
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+b^{n-1})$ en faisant $a = 1$, $b = q$ et en prenant $n + 1$ au lieu de n, d'où $1-q^{n+1} = (1-q)(1+q+q^2+...+q^n)$. On peut ensuite diviser par $(1 - q)$ lorsque q est différent de 1.

Mais qu'arrive-t-il si $q = 1$? C'est encore plus simple. La somme s'écrit :
$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$.

3) Suite arithmético-géométrique

Elle est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a\, u_n + b$ et par son terme initial u_0
Si $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique, et si $b = 0$, on a une suite géométrique, d'où le nom de suite arithmético-géométrique. Nous allons donner la méthode de résolution permettant d'arriver à la forme explicite de la suite, en traitant un exemple.

Exemple

Trouver la forme explicite de la suite obéissant à $u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 2$, avec $u_0=1$.

Voici la méthode de résolution :

1) *Chercher les points fixes éventuels de la fonction $f(x) = 0{,}5\, x + 2$.*

La fonction f est la fonction sous-jacente à la relation de récurrence. Un point fixe est par définition un nombre x_0 tel que $x_0 = f(x_0)$ ici $x_0 = 0{,}5\, x_0 +2$. Cela donne $x_0 = 4$.

2) *Si la suite admet une limite L, combien vaut L ?*

La limite L obéit à la formule de récurrence, soit $L = 0{,}5L + 2$, puisque la fonction est continue sur $\boldsymbol{R}$ et notamment en L. D'où $L = 4$.
Remarquons qu'il revient au même de chercher la limite si elle existe, ou le point fixe de la fonction liée à la récurrence.

3) *En déduire la forme explicite de u_n*

Voici comment on procède : on écrit la relation de récurrence et au-dessous la relation vérifiée par x_0 (ou par L)

$u_{n+1} = 0{,}5\, u_n +2$
$\;\;4 = 0{,}5 .\, 4 +2$

Par soustraction, il reste $u_{n+1} - 4 = 0,5\,(u_n - 4)$. Prenons alors la suite v_n telle que $v_n = u_n - 4$. Elle obéit à la relation de récurrence $v_{n+1} = 0,5\, v_n$ et a pour terme initial $v_0 = u_0 - 4 = -1$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison 0,5, d'où $v_n = -0,5^n$. Finalement $u_n = -0,5^n + 4$.

Remarque : pour connaître une suite arithmético-géométrique, on passe par l'intermédiaire d'une suite géométrique, comme on vient de le faire.

1.10. Etude d'une suite ayant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction donnée

La connaissance de la fonction f , avec son tableau de variations, peut nous aider à étudier la suite.

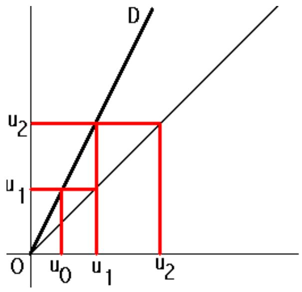
La notion de point fixe

On dit que x est un point fixe pour la fonction f lorsque $f(x) = x$. Ce point est l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f, d'équation $y = f(x)$, et de la première bissectrice du repère, d'équation $y = x$.

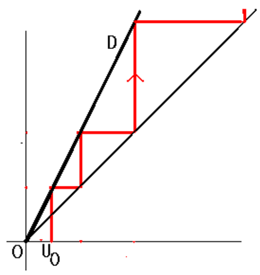
On a vu précédemment qui si la suite admet une limite, cette limite L est telle que $f(L) = L$. La limite éventuelle L est un des points fixes.

Visualisation d'une suite par un diagramme en toile d'araignée

Prenons l'exemple simple d'une suite (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2x$, à partir de u_0 donné, par exemple $u_0 = 0,1$. Cela signifie que u_n double à chaque étape. On veut voir comment s'effectue la succession $u_0, u_1, u_2, \ldots.$, ce que l'on appelle la trajectoire de u_0. Pour cela on commence par tracer la courbe $y = f(x)$, ici une droite D de pente 2 passant par l'origine. Le seul point fixe de f, vérifiant $f(x) = x$, est l'origine O du repère, c'est le seul point d'intersection entre la droite D et la première bissectrice du repère.

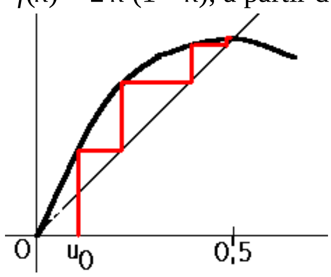


Plaçons le point u_0 sur l'axe des x, puis montons verticalement jusqu'à la droite D. Le point obtenu a pour ordonnée $u_1 = 2\,u_0$, et l'on obtient un point u_1 sur l'axe des y. Mais comment avoir u_2 ? Il faut d'abord rabattre le point u_1 sur l'axe des x : pour cela on mène une horizontale jusqu'à la première bissectrice, puis on descend verticalement jusqu'à l'axe des x. Maintenant u_1 est sur l'axe des x, et en montant jusqu'à la droite D, on obtient le point d'ordonnée u_2. Et l'on recommence comme avant…



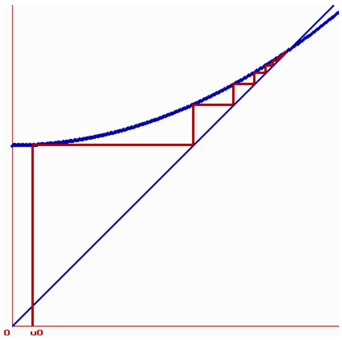
Cela étant bien compris, il suffit de dessiner une succession de marches d'escalier pour visualiser l'évolution de la suite. Dans le cas présent, on voit que la suite s'en va à l'infini, en s'éloignant de plus en plus vite du point fixe O. Ce dessin illustre la trajectoire de u_0.

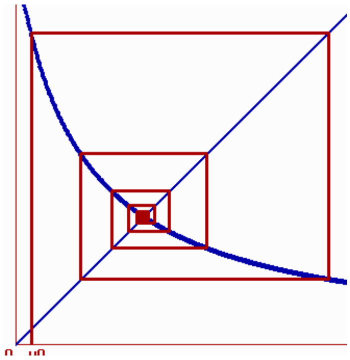
Prenons un autre exemple, avec la suite telle que $u_{n+1} = 2\,u_n\,(1 - u_n)$, soit $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2\,x\,(1 - x)$, à partir de $u_0 = 0,1$.



On commence par tracer la parabole d'équation $y = 2\,x\,(1 - x)$, ainsi que la première bissectrice du repère. On constate l'existence de deux points fixes ($f(x) = x$), soit $x = 0$, soit $x = 0,5$, correspondant à l'intersection de la courbe et de la bissectrice. On trace ensuite le diagramme en marches d'escalier comme précédemment. On constate cette fois que la suite converge vers le point fixe 0,5.

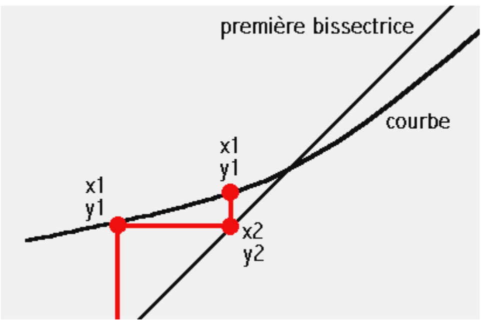
Les dessins ainsi obtenus sont appelés des diagrammes en toile d'araignée. Il existe deux types de diagrammes en toile d'araignée, soit en forme de marches d'escalier, soit en colimaçon, selon la forme de la courbe de *f*, comme on le voit sur les dessins suivants où la suite converge :





Programme pour avoir ce diagramme en toile d'araignée

Il s'agit de passer de façon répétée d'un point (x_1, y_1) de la courbe à un point (x_2, y_2) de la première bissectrice, puis de revenir sur la courbe. Le point (x_1, y_1) de la courbe est tel que $y_1 = f(x_1)$, et l'on va vers la première bissectrice par un trait horizontal, d'où $x_2 = y_1$ et $y_2 = y_1$. Puis on revient sur la courbe par un trait vertical, d'où les nouvelles valeurs de x_1 et y_1 : $x_1 = x_2$, et $y_1 = f(x_2)$. Et l'on recommence à partir de ce point … Dans cette succession de traits horizontaux puis verticaux, il manque juste le trait vertical au démarrage, joignant le point d'abscisse u_0 sur l'axe horizontal au point correspondant $(u_0, f(u_0))$ sur la courbe. D'où le programme :




```
u0=0.1; u1=f(u0);  line(xo+zoom*u0,yo,xo+zoom*u0,yo-zoom*u1);
x1=u0;y1=u1;
for(i=0;i<100;i++)
  {  x2=y1;y2=y1; line(xo+zoom*x1,yo-zoom*y1,xo+zoom*x2,yo-zoom*y2);
     x1=x2;y1=f(x2); line(xo+zoom*x2,yo-zoom*y2,xo+zoom*x1,yo-zoom*y1);
  }

float f(float x)  /* la fonction  f*/
{  float y;        y=1./(x+0.4);   return y; }
```

1.11. Exemples

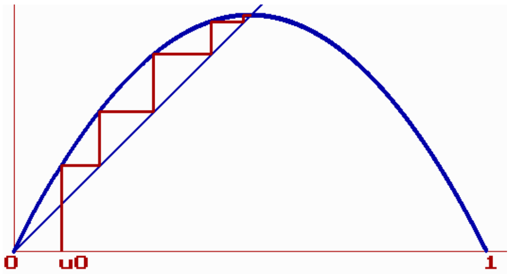
1) Evolution d'une population

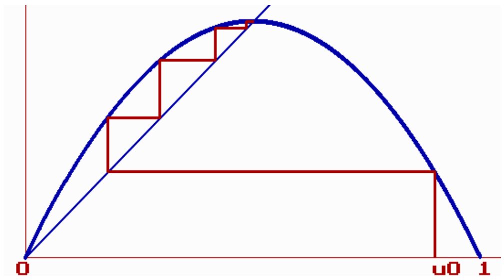
Une population compte u_0 individus initialement, au temps 0, u_0 étant supposé compris entre 0 et 1, l'unité correspondant à un million d'individus. On considère qu'elle double chaque année, ce qui donne $u_{n+1} = 2\,u_n$, u_n étant le nombre des individus au temps n, c'est-à-dire n années plus tard. Mais cette évolution rapide ne peut se produire indéfiniment. Elle est contrecarrée par des phénomènes limitatifs. Aussi lui ajoute-on un frein, en prenant comme règle d'évolution plus réaliste :

$u_{n+1} = 2u_n - 2u_n^2 = 2u_n (1 - u_n)$[1]

Prenons un exemple, avec $u_0 = 0{,}1$ (soit 100 000 individus en prenant comme unité pour le calcul 10^5). Nous avons déjà vu cet exemple. Comme u_0 est faible, u_0^2 est relativement négligeable, et la population tend à doubler. Mais lorsqu'elle augmente, le terme u_n^2 prend de plus en plus d'importance, et tend à restreindre l'évolution. Par contre, si l'on part de $u_0 = 0{,}9$, la concurrence pour la survie est très forte, le terme $-u_0^2$ provoque une forte baisse, et comme la population diminue, le facteur de croissance $2u_n$ va à son tour reprendre le dessus.

a) *En posant $f(x) = 2\,x\,(1 - x)$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. Utiliser le tracé de la courbe de f pour visualiser l'évolution à partir de $u_0 = 0{,}1$ puis de $u_0 = 1{,}9$.*





On constate dans les deux cas que la population finit par se stabiliser à 0,5 (500 000 individus). Il en serait de même pour toutes les conditions initiales avec u_0 sur]0,1[.

b) *Confirmation théorique :*

b1) *On suppose d'abord que u_0 appartient à l'intervalle $I =]0, 1/2]$.*
Montrer que $f(I) = I$, puis que u_n appartient à I pour tout n.

L'équation $y = 2\,x\,(1 - x)$ de la courbe de f est un trinôme du second degré. La courbe est une parabole d'axe vertical. Elle passe par les deux points (0,0) et (1,0). Son axe vertical a donc pour équation $x = 1/2$, et son sommet est $(1/2\ ,\ f(1/2)=1/2)$.

Strictement croissante et continue sur $]0,\ 0{,}5] = I$, la fonction f est une bijection de I sur $]f(0), f(0{,}5)]=]0,\ 0{,}5]=I$, d'où $f(I) = I$.

Faisons un raisonnement par récurrence pour montrer que u_n appartient à I.

- u_0 appartient à I .
- Supposons que pour un certain rang n u_n appartienne à I, et montrons qu'il en est de même pour u_{n+1} : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_n dans I, d'où $f(u_n)$ appartient à I aussi puisque $f(I)=I$.

b2) *Montrer que (u_n) est croissante.*

Formons $u_{n+1} - u_n = 2\,u_n\,(1 - u_n) - u_n = u_n - 2\,u_n^2 = u_n\,(1 - 2\,u_n) \geq 0$ car $u_n > 0$ et que $1 - 2\,u_n \geq 0$ sachant que $u_n \leq 0{,}5$. La suite est croissante.

b3) *En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.*

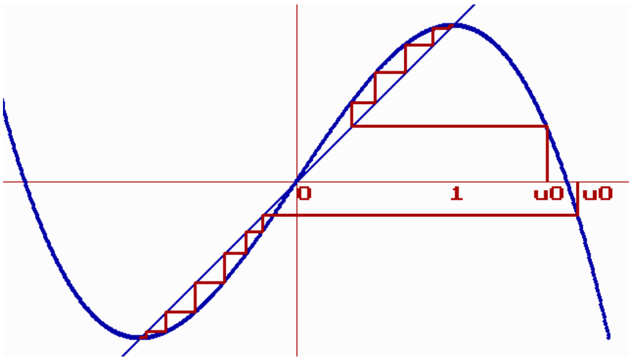
[1] Le terme limitatif $-u_n^2$ correspond en gros au nombre de couplages possibles d'individus. En effet, chaque individu peut être couplé à tous les autres, soit $u_n - 1$ couples. Quand on prend tous les individus, cela fait $u_n\,(u_n - 1)$ couples possibles, de l'ordre de u_n^2. Or les facteurs qui freinent l'évolution d'une population sont liés à une concurrence entre les individus face à des ressources limitées, ils proviennent aussi des épidémies, des guerres. Tout cela fait intervenir des couplages entre individus.

Croissante et majorée par 1/2, la suite converge vers une limite ≤ 1/2. Cette limite L est un point fixe, elle est telle que $f(L) = L$, f n'ayant aucun problème de continuité, d'où $L = 0$ ou $L = 1$. Mais $L = 0$ est impossible puisque $u_0 > 0$ et (u_n) croissante. La suite converge donc vers 1.

b4) *Que se passe-t-il si l'on prend maintenant u_0 dans [0,5, 1[?*

Sur cet intervalle, la fonction f est strictement décroissante et continue. Elle réalise une bijection de [0,5 , 1[sur [0,5, 0[= I. Alors $u_1 = f(u_0)$ appartient à I. Il suffit alors de reprendre à partir de u_1 ce que l'on a fait précédemment à partir de u_0 sur I. La suite converge encore vers 1.

2) Soit f l'application donnée par $f(x) = (3x - x^3)/2$, et la suite obéissant à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Visualiser l'évolution de cette suite pour $u_0 = 1{,}6$ et $u_0 = 1{,}8$.



On constate que dans le premier cas la suite converge vers 1, et dans le deuxième cas vers –1.

Récapitulons : Le dessin en toile d'araignée permet de connaître graphiquement le comportement de n'importe quelle suite. Mais pour démontrer qu'une suite converge, nous n'avons à notre disposition que deux moyens :

Soit on utilise la forme explicite de la suite (u_n en fonction de n, comme nous l'avons fait par exemple pour les suites géométriques), sous réserve qu'on arrive à l'obtenir.

Soit la suite a le bon goût d'être croissante et majorée, et l'on calcule sa limite grâce à $f(L) = L$. Mais comment faire si la suite oscille autour de sa limite ? Pour cela :

Il existe un troisième moyen, que nous allons maintenant voir, et qui utilise ce que l'on appelle l'inégalité des accroissements finis.

1.12. Inégalité des accroissements finis

On a une fonction f, et on se place sur un intervalle I où la dérivée de f est majorée en valeur absolue : $|f'(x)| \le M$. Alors, quels que soient a et b dans I, on a :
$|f(b) - f(a)| \le M\,|b-a|$. [2]

L'exemple qui suit montre le contexte dans lequel cette inégalité des accroissements finis s'applique.

[2] Démonstration : $|f'(x)| \le M$ s'écrit aussi $-M \le f'(x) \le M$. Considérons la fonction $g(x) = f(x) - Mx$. Sa dérivée est $f'(x) - M \le 0$. La fonction g est décroissante En prenant $a < b$, on a $g(a) \ge g(b)$, soit $f(a) - Ma \ge f(b) - Mb$, ou encore $f(b) - f(a) \le M(b-a)$. En prenant ensuite la fonction $h(x) = f(x) + Mx$, on montre de même que $-M(b-a) \le f(b) - f(a)$. D'où l'encadrement $-M(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$, ou encore :
$|f(b) - f(a)| \le M\,|b-a|$. Et à cause des valeurs absolues, il en est de même si $a > b$.

Exemple **: Suite de Fibonacci et nombre d'or**

Soit $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *, quotient de deux termes successifs de la suite de Fibonacci (u_n) Rappelons que cette dernière est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. On suppose que n est un entier naturel positif (n appartient à* ***N****).*

1) *Montrer que* $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ *pour n>0.*

Par définition $v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{v_n}$.

2) *Au cas où la suite (v_n) admettrait une limite L, quelle devrait être la valeur de L ?*

Ce nombre L devrait vérifier la relation de récurrence, soit $L = 1 + \frac{1}{L}$, d'où $L^2 - L - 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions : $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme la suite de Fibonacci est manifestement strictement croissante à partir de 0, ses termes sont ≥ 0. Si la suite (v_n) admet une limite, celle-ci ne peut pas être négative. La seule possibilité pour L est $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3) *Montrer que* $\frac{3}{2} \le v_n \le 2$ *pour n>1.*

Faisons un raisonnement par récurrence

- Avec $v_2 = \frac{u_3}{u_2} = 2$, on a bien $\frac{3}{2} \le v_2 \le 2$.
- Supposons que l'on ait $\frac{3}{2} \le v_n \le 2$ à un certain rang n, et montrons que cela reste vrai au rang suivant.

En inversant l'hypothèse de récurrence $\frac{2}{3} \ge \frac{1}{v_n} \ge \frac{1}{2}$. Ajoutons 1 : $\frac{5}{3} \ge 1 + \frac{1}{v_n} \ge \frac{3}{2}$, d'où $2 \ge v_{n+1} \ge \frac{3}{2}$.

4) *On pose* $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. *Trouver un majorant M de | f '(x) | sur [3/2 , 2].*

Comme $f'(x) = -1/x^2$, $|f'(x)| = 1/x^2$. Comme $|f'(x)|$ diminue quand x augmente, $|f'(x)|$ atteint sa valeur maximale sur [3/2 , 2] en x=3/2, soit M = 4/9.

5) *Appliquer l'inégalité des accroissements finis pour montrer que la suite (v_n) converge bien vers le nombre L.*

Plaçons-nous sur l'intervalle I = [3/2, 2]. On sait qu'à partir du rang 2, v_n appartient à I, tout comme L. Sur cet intervalle on sait aussi que $|f'(x)|$ est majorée par M = 4/9. On est en droit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$|f(v_n) - f(L)| \le \frac{4}{9} |v_n - L|$, ou encore $|v_{n+1} - L| \le \frac{4}{9} |v_n - L|$

Appliquons successivement cette inégalité :

$|v_n - L| \le \frac{4}{9} |v_{n-1} - L|$

$|v_{n-1} - L| \le \frac{4}{9} |v_{n-2} - L|$

……

$$|v_3 - L| \leq \frac{4}{9}|v_2 - L|$$

Multiplions membre à membre ces inégalités, où tout est positif. Après simplifications, il reste $|v_n - L| \leq (\frac{4}{9})^{n-2}|v_2 - L|$. Cela peut aussi s'écrire : $0 \leq |v_n - L| \leq (\frac{4}{9})^{n-2}|v_2 - L|$. Lorsque tend vers l'infini, $|v_n - L|$ est écrasé entre 0 et une quantité qui tend vers 0, et tend aussi vers 0. La suite (v_n) converge bien vers L. Le nombre $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618… est appelé nombre d'or. [3]

2. EXERCICES

Exercice 1

Dans un pays, au début de l'année 2008, une ville A compte 200 000 habitants, et sa population décroît de 3% par an, tandis qu'une autre ville B compte 150 000 habitants, avec une croissance annuelle de 5%. On appelle a_n le nombre d'habitants de A n années après 2008 (d'où u_0=200 000), et de même b_n pour la ville B.

***1)** Calculer a_1 et b_1*

a_1=200 000 – (3/100) 200 000= 194 000
b_1=150 000 + (5/100) 150 000= 157 500.

***2)** Montrer que a_n et b_n sont des suites géométriques dont on précisera les caractéristiques. Puis donner leur forme explicite.*

a_{n+1}= a_n – (3/100) a_n = (97/100) a_n = 0,97 a_n, et de même b_{n+1} = 1,05 b_n . On en déduit que $a_n = a_0\,(0,97)^n$ et $b_n = b_0\,(1,05)^n$.

***3)** Au bout de combien d'années la population de la ville B dépassera-t-elle celle de la ville A ?*

La population de B augmente, celle de A diminue. Quand aura-t-on a_n=b_n ?

Cela aura lieu lorsque $0,97^n$ 200 000 = $1,05^n$ 150 000, soit $(1,05/0,97)^n$ = 20 / 15, ou $(105 / 97)^n$ = 4/3. Passons en logarithmes : n (ln 105 – ln 97) = ln 4 – ln 3, d'où $n = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 105 - \ln 97}$ = 3,63. La population de B dépassera celle de A au cours de la troisième année, c'est-à-dire pendant l'année 2008+3 = 2011.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par u_0=1 et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}.$$

1) Justifier l'existence de cette suite.

[3] Ce nombre est souvent noté φ en l'honneur de Phidias, l'architecte du Parthénon, qui l'utilisa pour mettre en valeur l'harmonie du monument. Ce nombre mythique était aussi appelé la « divine proportion » par les artistes de la Renaissance italienne, qui en firent maints usages. On le retrouve aussi dans les pays arabes par le biais du pentagone étoilé, où ce motif est fortement répandu dans les mosaïques, et même sur le drapeau marocain. Le nombre d'or est en effet omniprésent dans le calcul des côtés des pentagones.

La racine carrée existe si et seulement si $u_n \geq 0$ et la division est possible sous réserve que $u_n \neq 0$. La suite existera seulement si u_n reste > 0 pour tout *n*. Faisons un raisonnement par récurrence pour montrer que u_n existe et est positif pour tout *n*.

- u_0 existe et est >0.
- Supposons que u_n existe et soit > 0 à un certain rang *n*, et montrons qu'il en est de même au rang suivant : grâce à notre hypothèse de récurrence, $\frac{1}{\sqrt{u_n}}$ existe et est > 0, comme u_n, d'où $u_{n+1} > 0$ aussi.

***2)** Si la suite était convergente, quelle serait sa limite ? Quelle conclusion peut-on en tirer sur le comportement de la suite à l'infini.*

Si la suite admettait une limite *L*, celle-ci devrait vérifier la relation de récurrence $L = L + \frac{1}{\sqrt{L}}$, d'où $\frac{1}{\sqrt{L}} = 0$, ce qui est impossible. La suite n'est donc pas convergente.

Mais la suite est croissante, puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}} > 0$. Comme elle ne converge pas, elle ne peut que tendre vers l'infini.

Exercice 3

On considère la suite de nombres ainsi constituée, avec un 1, puis deux 2, puis trois 3, etc. : 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6… Quel est le millionième nombre de cette suite ?

On constate que le premier 1 est en position $p(1)=1$, que le premier 2 est en position $p(2)=2$, que le premier 3 est en position $p(3)=4$, que le premier 4 est en position $p(4)=7$, etc. En généralisant, on obtient la relation de récurrence sur la position $p(n)$ du premier *n*, soit $p(n+1) = p(n) + n$, avec $p(1)=1$ au départ. Cherchons la formule explicite :

$p(n) = p(n-1) + n - 1$
$p(n-1) = p(n-2) + n - 2$
…
$p(2) = p(1) + 1$

En additionnant membre à membre, après simplifications il reste:
$p(n) = p(1) + 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = 1 + n(n-1)/2 = (n^2 - n + 2) / 2$

Il s'agit de trouver *n* tel que $p(n)$ atteigne approximativement le million., c'est-à-dire $n^2 - n + 2$ de l'ordre de $2 \cdot 10^6$. En négligeant $- n + 2$ par rapport à n^2, on a *n* de l'ordre de $1{,}414 \cdot 10^3 = 1414$. On vérifie que $p(1414) = 998\,992$, et que $p(1415) = 1\,000\,406$. Le millionième nombre est donc 1414.

Exercice 4 : Formule explicite pour la suite de Fibonacci, et programmation

Rappelons que la suite de Fibonacci (années 1200) est la suite (F_n) définie par la relation de récurrence :

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, *avec comme conditions initiales* $F_0=0$, *et* $F_1=1$.

***1)** Programmer l'évolution d'une telle suite pour obtenir le terme F_N, N étant un nombre donné.*

```
u=0, v=1 ;
for(i=2 ;i<=N ;i++)  { w=v+u ; u=v ; v=w ;}
```

afficher w

2) *Vérifier que* $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi')^n)$ *où* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *= 1,618… est le nombre d'or, et* $\varphi' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *= 0,618… est le deuxième nombre d'or. Rappelons que* φ *et -* φ' *sont les deux solutions de l'équation* $x^2 - x - 1 = 0$.

Il suffit de montrer que $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi')^n)$ vérifie les conditions initiales et la relation de récurrence qui définissent la suite de Fibonacci.

On a bien $F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \varphi'^0) = 0$ et $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi + \varphi') = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

D'autre part calculons $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n$ soit

$$\frac{\varphi^{n+2} - (-\varphi')^{n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi^{n+1} - (-\varphi')^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi^n - (-\varphi')^n}{\sqrt{5}}$$

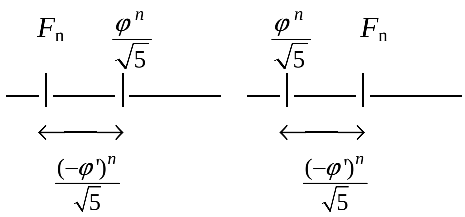
$$= \frac{\varphi^{n+2} - \varphi^{n+1} - \varphi^n - ((-\varphi'^{n+2}) - (-\varphi'^{n+1}) - (-\varphi'^n))}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\varphi^2(\varphi^2 - \varphi - 1) - \varphi'^2((-\varphi'^2 - (-\varphi') - 1)}{\sqrt{5}} = 0$$

Puisque φ et $-\varphi'$ sont les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
On retrouve bien la relation de récurrence $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$.

3) *En déduire une autre façon de programmer le calcul de* F_n.

Remarquons d'abord que malgré la présence des nombres irrationnels $\sqrt{5}$, φ et φ', F_n est un nombre entier. On constate aussi que le terme $\frac{(-\varphi')^n}{\sqrt{5}}$ se rapproche de 0 en oscillant autour, de moins en moins, lorsque n augmente, puisque $\varphi'<1$, et même pour $n=0$ il est déjà inférieur à 1/2 à cause de $\sqrt{5}$.



Les deux cas selon que n est pair ou impair

Dans tous les cas, F_n est le nombre entier le plus proche de $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. Comment avoir l'entier le plus proche d'un nombre A ? Il suffit de prendre la partie entière de A+1/2. D'où le programme pour avoir F_n :

```
float phi ; int F,n ;
phi=0.5*(1.+sqrt(5.)) ;
for(n=0 ; n<=N ; n++)
  {F= (int) (pow(phi, n)/sqrt(5.) +0.5);    /*  en ramenant un nombre flottant positif en */
   afficher F                               /*  entier, on obtient sa partie entière  */
  }
```

Exercice 5 : Séquence des lapins de Fibonacci

Une population de lapins évolue dans le temps, saison après saison, de la façon simplifiée suivante. Au cours d'une étape de temps (une saison), un couple jeune devient adulte, et un couple adulte reste adulte tout en donnant naissance à un couple jeune. Notons 0 un couple jeune et 1 un couple adulte. On a le passage 0→1 et 1→10 (le jeune est placé à droite de l'adulte) au cours d'une étape de temps. A l'étape 1 initiale, on a seulement un couple jeune. Cela donne l'évolution suivante étape après étape :

0→1→10→101→10110→10110101→…

Montrer qu'à l'étape n le nombre de couples de lapins est F_n *(n>0).*

On a bien $F_1 = 1$ couple à l'étape 1, $F_2 = 2$ couples à l'étape 2. Pour montrer que c'est vrai pour n quelconque, montrons que le nombre de 1 (couple adulte) est F_{n-1} (pour $n>0$) et que le nombre de 0 (couples d'enfants) est F_{n-2} (pour $n>1$). Alors on aura bien un nombre total $F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$ couples au total.

On a bien, à l'étape 2, $F_1 = 1$ couple adulte et $F_0 = 0$ couple d'enfants.

Supposons qu'il y a ait F_{n-1} chiffres 1 et F_{n-2} chiffres 0 à une certaine étape n, et montrons qu'il y a F_n chiffres 1 et F_{n-1} chiffres 0 à l'étape $n+1$. En effet, lorsqu'on passe de l'étape n à l'étape $n+1$, il y a F_{n-2} nouveaux adultes (les enfants d'avant) ainsi que les F_{n-1} d'avant, soit $F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$, ainsi que F_{n-1} couples d'enfants provenant des F_{n-1} adultes de l'étape d'avant.

Exercice 6 : Deux suites avec moyenne arithmétique et moyenne harmonique

On considère deux suites (u_n) *et* (v_n) *définies par* $u_0=1$, $v_0=2$ *et par les relations de récurrence croisées* $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ *, n étant un entier naturel.*

1) Y a-t-il un problème d'existence pour ces suites ?

Oui, si pour une certaine valeur de n on tombait sur $u_n+v_n = 0$, dans ce cas, u_{n+1} n'existerait plus, et les suites non plus.

2) *Montrer que pour tout n* (u_n) *et* (v_n) *existent et que* $0 < u_n \le v_n$.

Faisons pour cela un raisonnement par récurrence.

- Au départ , $u_0=1$ et $v_0=2$ existent, et $0 < u_0 \le v_0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang n, et montrons qu'elle reste vraie au rang suivant :

Comme $0 < u_n \le v_n$, $u_n + v_n > 0$, donc u_{n+1} existe (et v_{n+1} aussi).

D'autre part, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0$ car tout est positif, grâce à l'hypothèse de récurrence.

Enfin formons $v_{n+1} - u_{n+1}$:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \ge 0 ,$$

d'où $v_{n+1} \ge u_{n+1}$.

La propriété reste bien vraie au rang $n+1$.

3) *On rappelle que si l'on a deux nombres réels a et b tels que* $0 < a \le b$, *alors :*

$a \le h \le g \le m \le b$, *comme on l'a démontré dans le chapitre 2, h étant la moyenne harmonique, g la moyenne géométrique, et m la moyenne arithmétique On admettra ici ce résultat.*

Montrer que pour tout n, $u_n \le u_{n+1} \le \sqrt{u_n v_n} \le v_{n+1} \le v_n$.

Puisque $0 < u_n \le v_n$, on peut faire jouer à u_n et v_n le rôle de *a* et *b* dans la formule indiquée. Dans le cas présent, la moyenne harmonique *h* de u_n et v_n n'est autre que u_{n+1}, la moyenne géométrique *m* est v_{n+1}. On en déduit que l'on a bien pour tout *n* :
$u_n \le u_{n+1} \le \sqrt{u_n v_n} \le v_{n+1} \le v_n$.

***4)** Montrer que :* $u_n\ v_n = u_0\ v_0$ *pour tout n.*

On constate que pour tout *n* : $u_{n+1}\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}\dfrac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n$. Le produit $u_n\ v_n$ reste constant. Par récurrence évidente, on en déduit que $u_n\ v_n = u_0\ v_0$

***5)** Montrer que les deux suites convergent. On appelle leurs limites respectives L et L'.*

On a vu au 3° que $u_n \le u_{n+1}$ et $v_{n+1} \le v_n$. La suite (u_n) est croissante, et la suite (v_n) décroissante. Comme on a aussi $u_n \le v_n$ et que $v_n \le v_0$ à cause de sa décroissance, on en déduit que la suite (u_n) est majorée par v_0.

Croissante et majorée, la suite (u_n) converge. De même la suite (v_n), qui est décroissante et minorée par u_0 , converge.

***6)** Montrer que L=L' et déterminer cette limite commune.*

Lorsque *n* tend vers l'infini, les limites vérifient les relations de récurrence. La relation $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ devient $L = \dfrac{2LL'}{L + L'}$, ce qui donne :

$L^2 + LL' = 2LL'$, $L(L - L') = 0$. Comme *L* ne peut pas être nulle, puisque $u_0 > 0$ et que u_n croît. Il reste *L* = *L*'. On dit que les deux suites sont adjacentes (voir plus bas).

D'autre part, puisque $u_n\ v_n = u_0\ v_0$, cela devient à la limite $L^2 = u_0\ v_0$ d'où, *L* étant positif, $L = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{2}$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence
$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout n entier naturel.

***1)** Montrer que cette suite est croissante.*

Formons $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 3 - u_n = 2n + 3 > 0$. La suite est strictement croissante.

***2)** Montrer que pour tout n :* $u_n > n^2$.

Faisons un raisonnement par récurrence.
- La formule est vraie au rang 0 : 1 > 0.
- Supposons la formule vraie à un certain rang *n*, et montrons qu'elle reste vraie au rang suivant :

$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$ grâce à l'hypothèse de récurrence.
$> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

***3)** Quel est le comportement à l'infini de la suite ?*

Lorsque n tend vers l'infini, n^2 tend aussi vers l'infini, et u_n , toujours supérieur à n^2, ne peut que tendre aussi vers l'infini.

***4)** Trouver la forme explicite de u_n (u_n en fonction de n).*

On constate que u_0 =1, u_1 =4, u_2 =9 , u_3 =16. On a l'impression que la formule explicite est $u_n = (n + 1)^2$. Il reste à prouver que c'est vrai pour tout n. Pour cela prenons la suite $v_n = (n + 1)^2$ et, sachant déjà que $v_0 = u_0$, montrons qu'elle vérifie la même relation de récurrence que u_n :

$v_{n+1} = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = n^2 + 2n + 1 + 2n +3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = v_n + 2n +3$.

On a donc bien $v_n = u_n$, d'où $u_n = (n+1)^2$ pour tout n.

Exercice 8 : La notion de suites adjacentes

A- Définition et propriétés des suites adjacentes

Par définition on dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque :

- (u_n) est croissante
- (v_n) est décroissante
- $v_n - u_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

***1)** Déduire de cette définition que $u_n \leq v_n$ pour tout n.*

Faisons un raisonnement par l'absurde. S'il existait une valeur n_0 de n pour laquelle on avait $u_{n0} > v_{n0}$, alors, pour toutes les valeurs de n supérieures à n_0, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante, la différence $u_n - v_n$ ne pourrait jamais diminuer, et elle ne pourrait pas tendre vers 0 pour n infini. Contradiction. Notre supposition était fausse. On en peut avoir que $u_n \leq v_n$ pour tout n.

***2)** Montrer que les deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.*

On a : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$, grâce à ce qui précède et au sens de variation des deux suites. La suite (u_n) , croissante et majorée par v_0 , converge vers une limite L. De même, la suite (v_n) , décroissante et minorée par u_0 , converge vers une limite L'. Puisque $v_n - u_n$ tend vers 0 pour n infini, on en déduit que $L – L' = 0$, $L = L'$.

B- Un exemple de suites adjacentes

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par les relations de récurrence croisées $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$ et par les conditions initiales $u_0 = 0$, $v_0 = 12$.

***1)** Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente dont tous les termes sont positifs.*

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n}{3} + \frac{2v_n}{3} - \frac{u_n}{2} - \frac{v_n}{2} = -\frac{u_n}{6} + \frac{v_n}{6}$$
$$= \frac{1}{6}(v_n - u_n) = \frac{1}{6} w_n$$

La suite (w_n) obéit à une relation de récurrence de la forme $w_{n+1} = q\ w_n$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 1/6$, et de terme initial $w_0 = 12$. On en déduit sa forme explicite

$w_n = 12\ (1/6)^n$. Tous ses termes sont manifestement positifs, et puisque $|q|<1$, elle converge vers 0.

***2)** Montrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.*

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{w_n}{2} > 0$. Cette suite est croissante.
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{3} = -\dfrac{w_n}{3} < 0$. Cette suite est décroissante.

***3)** En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.*

La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) décroissante, et leur différence $v_n - u_n$ tend vers 0 pour n infini. Cela signifie que les deux suites sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent toutes deux vers la même limite.

***4)** On considère la suite (z_n) telle que $z_n = 2\ u_n + 3\ v_n$. Montrer qu'elle est constante.*

Il s'agit de prouver que $z_{n+1} = z_n$ pour tout n. En effet :
$z_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = z_n$.
La suite est constante, et reste égale à $z_0 = 36$.

***5)** Déterminer la limite commune L de (u_n) et (v_n).*

Par passage à la limite de la relation $2\ u_n + 3\ v_n = 36$, on en déduit que $2L + 3L = 36$, d'où $L = 7{,}2$.

Exercice 9 : Séries de Riemann

On se donne un nombre a entier positif. Considérons la suite (u_n) telle que $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^a} + \dfrac{1}{3^a} + \dfrac{1}{4^a} + \ldots + \dfrac{1}{n^a}$ *avec n entier >0. Cela s'écrit aussi sous forme condensée :* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^a}$. *Une telle suite est appelée série de Riemann[4]. On veut connaître son comportement à l'infini.*

1) Montrer que cette suite est croissante.

Le terme u_n est lui-même formé d'une somme de termes, et quand n augmente, le nombre de ces termes, tous positifs, augmente aussi. La suite (u_n) est donc croissante. Plus précisément :
Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^a} > 0$.

***2)** Etude de cette suite pour a=1. On a* $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. *Cela s'appelle la série harmonique.*

***2a)** Montrer que* $u_{2n} \geq u_n + 1/2$ *pour tout n>0.*

$u_{2n} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$. Il s'agit d'une somme de n termes dont le plus petit est $\dfrac{1}{2n}$. Cette somme est donc supérieure (ou égale pour n=1) à $n\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. On a bien

[4] Quand une suite, comme dans le cas présent, a chacun de ses termes formé lui-même d'une somme de termes, on dit qu'il s'agit d'une série, ici de terme général $1/k^a$.

$u_{2n} \geq u_n + 1/2$.

2b) *En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.*

Grâce à la question précédente, on peut effectuer des regroupements dans un terme quelconque u_n :

$$1+\underbrace{1/2}_{=1/2}+\underbrace{1/3+1/4}_{>1/2}+\underbrace{1/5+1/6+1/7+1/8}_{>1/2}+\underbrace{1/9+1/10+\ldots.+1/16}_{>1/2}+\ldots..$$

Lorsque n tend vers l'infini, le nombre de groupes de termes supérieurs à 1/2 ne cesse d'augmenter. La suite ne peut que tendre vers l'infini. Plus précisément, on peut écrire que $u_{2^q} \geq 1+q\frac{1}{2}$. Lorsque q tend vers l'infini, les termes u_{2^q}, supérieurs à une quantité $1+q\frac{1}{2}$ qui tend vers l'infini, tendent aussi vers l'infini. Comme la suite (u_n) est croissante, et que les termes de la forme u_{2^q} (il s'agit d'une suite extraite de la suite globale) tendent vers l'infini, la suite (u_n) tend aussi vers l'infini.

3) *Etude de la suite pour a=2. On a alors* $u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

3a) *Montrer que* $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ *pour k > 1.*

$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k.k}$ car, avec $0 < k-1 < k$, on a aussi $\frac{1}{k-1} \geq \frac{1}{k}$.

Finalement : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k > 1$.

3b) *En déduire que la suite (u_n) converge.*

Appliquons l'inégalité précédente pour les valeurs successives de k :

$\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{4^2} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

.....

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

En additionnant membre à membre ces inégalités, il se produit des simplifications en cascade et il reste :

$u_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$.

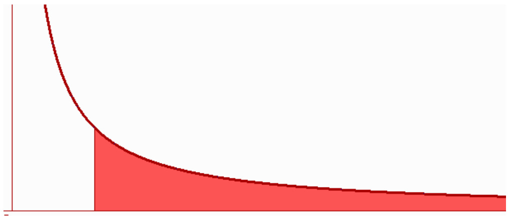
Finalement $u_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$. Majorée par 2 et croissante, la suite (u_n) converge et sa limite est inférieure ou égale à 2.

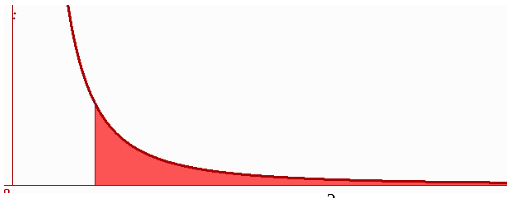
4) *Etude de la suite pour a > 2. Montrer que (u_n) converge.*

Avec $a > 2$, on a $k^a > k^2$ pour tout $k>0$, d'où $\frac{1}{k^a} < \frac{1}{k^2}$.

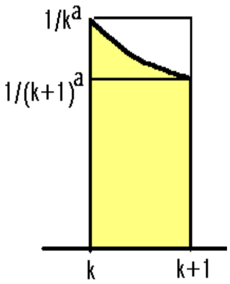
La somme des termes présents dans u_n est inférieure à celle de ceux que l'on avait pour $a=2$. Donc (u_n) est aussi majorée par 2, et comme elle est croissante, elle converge.

5) *On considère la courbe d'équation $y=1/x^a$. On s'intéresse à l'aire A comprise entre cette courbe, l'axe des x, et les segments verticaux d'abscisse 1 et x, avec x qui tend vers l'infini. On veut montrer que cette aire tend vers l'infini pour a = 1, et qu'elle tend vers une limite finie pour a > 1. Pour cela :*


Aire infinie sous la courbe $y=1/x$


Aire finie sous la courbe $y=1/x^2$

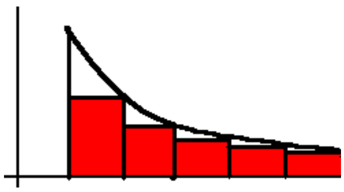
5a) *Montrer que* $\frac{1}{(k+1)^a} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^a}dx \leq \frac{1}{k^a}$ *pour* $k \geq 1$.



Cet encadrement est évident grâce au dessin ci-contre : l'aire correspondant à l'intégrale est comprise entre l'aire du petit rectangle d'aire $1/(k+1)^a$ et celle du grand rectangle d'aire $1/k^a$, la fonction étant décroissante.

5b) *On prend a=1. Montrer que dans ce cas l'aire A tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini.*

On découpe l'aire A (prise entre $x=1$ et $x=n$) en bandes verticales de largeur 1, en utilisant le résultat précédent, plus précisément $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx$, à partir de $k=1$.



$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x}dx$$

...

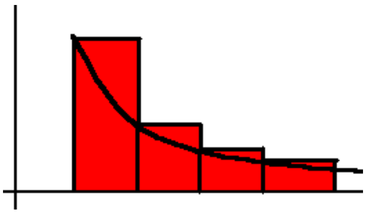
$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x}dx$$

Par addition, on obtient $u_n - 1 \leq A$. Comme on l'a vu, lorsque n tend vers l'infini, u_n devient infini, et A , qui est plus grand, ne peut aussi que tendre vers l'infini.

5c) *On prend a>1. Montrer que A tend vers une limite (finie).*

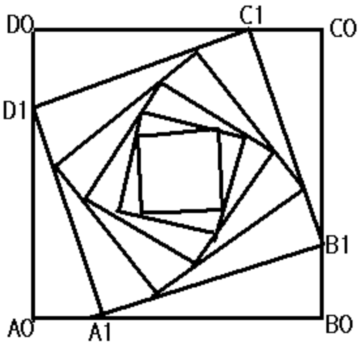
On utilise maintenant l'inégalité $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx \leq \frac{1}{k^2}$ à partir de $k=1$.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \leq \frac{1}{1^2}$$
$$\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx \leq \frac{1}{2^2}$$
....
$$\int_{n-1}^n \frac{1}{x^2}dx \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$



Par addition $A \leq u_n - 1/n^2 \leq u_n$. Lorsque n tend vers l'infini, l'aire A est majorée par la limite de u_n (par 2 aussi) et elle est croissante, elle tend donc aussi vers une limite finie.

Exercice 10 : Carrés emboîtés



On part d'un carré $A_0B_0C_0D_0$. Puis on prend le point A_1 sur $[A_0 B_0]$ tel que : $A_0A_1 = k\ A_0B_0$, k étant un nombre donné entre 0 et 1. On fait de même avec B_1 sur $[B_0\ C_0]$ tel que $B_0B_1 = k\ B_0C_0$, ainsi que pout C_1 et D_1. Cela donne un nouveau carré $A_1B_1C_1D_1$. Puis on recommence en prenant un nouveau carré $A_2B_2C_2D_2$. à partir de $A_1B_1C_1D_1$, en gardant toujours le même nombre k. Et ainsi de suite. On appelle (a_n) la suite des aires de ces carrés.

1) *Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.*

Appelons L_n la longueur de carré $A_nB_nC_nD_n$. Dans le triangle rectangle $A_{n+1}B_nB_{n+1}$
on a $A_{n+1}B_{n+1} = L_{n+1}$, $A_{n+1}B_n = L_n - k\ L_n = (1-k)\ L_n$, et $B_nB_{n+1} = k\ L_n$. Appliquons le théorème de Pythagore : $L_{n+1}{}^2 = k^2L_n{}^2 + (1-k)^2L_n{}^2$, soit : $L_{n+1}{}^2 = (2k^2 - 2k + 1)L_n{}^2$. Ainsi $a_{n+1} = (2k^2 - 2k + 1)\ a_n$.
Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = (2k^2 - 2k + 1)$ et de terme initial $a_0 = 1$.
On en déduit la forme explicité $a_n = q^n$.

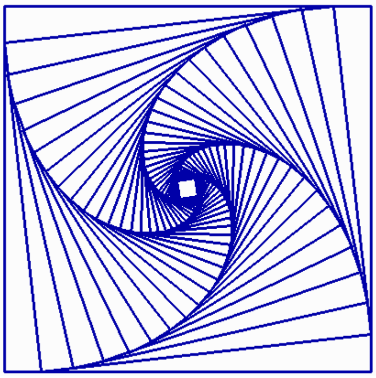
2) *Pour k = 1/10, à partir de quelle valeur de n le carré d'aire a_n est-il inférieur à 1/1000 du carré initial ?*

Pour $k = 1/10$, on trouve $q = 0{,}82$. On cherche n tel que $(0{,}82)^n < 0{,}001$, soit
$n \ln 0{,}82 < \ln 0{,}001$, soit $n > \dfrac{\ln 0{,}82}{\ln 0{,}001}$ =34,8 (puisque ln 0,82 est négatif). Dès que l'on atteint la 35è itération, le carré a diminué de plus de 1000 fois.

3) *Programmer pour visualiser les carrés emboîtés.*

On pourra appeler les coordonnées de A_0 (x[0], y[0]) et de même pour les trois autres points, en utilisant deux tableaux x[4] et y[4]. Commençons par dessiner le carré initial sur l'écran (en faisant un zoom). Puis on cherche le nouveau carré, en utilisant les relations vectorielles de la forme $\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = k\overrightarrow{A_nB_n}$, ce qui donne en coordonnées :

newx[0] – *x*[0] = *k* (*x*[1] - *x*[0]) , ou
newx[0] = *k* (*x*[1] - *x*[0]) + *x*[0],
et de même pour les ordonnées. Une fois cela fait on actualise
par :
x[0] = *newx*[0],et on recommence.



```
float x[4], y[4], newx[4], newy[4];
on se donne k, ici 0,1
main()
{       /* les quatre points du carré initial */
x[0]=0.; y[0]=0.;  x[1]=1.; y[1]=0.;  x[2]=1.; y[2]=1.;  x[3]=0.; y[3]=1.;    dessincarre();
for(etape=1;etape<=30 ;etape++)
  {for(i=0;i<4;i++) { newx[i]=k*(x[(i+1)%4]-x[i])+x[i]; newy[i]=k*(y[(i+1)%4]-y[i])+y[i];}
   for(i=0;i<4;i++)   {x[i]=newx[i];  y[i]=newy[i];}
   dessincarre();
  }
}

void dessincarre(void)
{int i;
for(i=0;i<4;i++)
ligne entre (xo+zoom*x[i],yo-zoom*y[i]) et (xo+zoom*x[(i+1)%4], yo-zoom*y[(i+1)%4])
}
```

Exercice 11 : Suite définie de façon implicite [5]

On considère la fonction f_k telle que $f_k(x)= x^k \ln x$, définie sur R^{*+}, avec k entier ≥ 2.

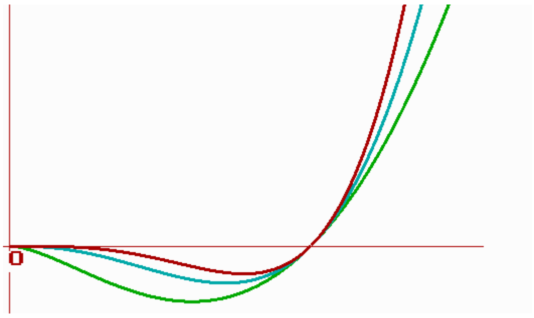
1) Grâce à l'étude des variations de cette fonction, montrer que l'équation $f_k(x)=1$ admet une solution unique a_k, avec $1< a_k$.

(déjà fait)

***2)** Déterminer la position relative des courbes représentatives de f_k suivant les valeurs de k.*

Formons $f_{k+1}(x) - f_k(x) = x^{k+1}\ln x - x^k \ln x = x^k(x-1)\ln x$. Lorsque x<1, les facteurs x-1 et *ln x* sont négatifs, $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ est positif. Lorsque x=1, c'est égal à 0, et f_k' (1)= 1, les courbes passent toutes par le point (1,0) et admettent la même tangente. Lorsque x est supérieur à 1, x-1 et *ln x* sont positifs, $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ est positif. Finalement la courbe associée à f_{k+1} est au-dessus de celle de f_k , sauf au point (1,0) où elles sont tangentes.

[5] Cela signifie que l'on ne connaît pas la formule explicite de la suite, ni d'ailleurs la relation de récurrence sous sa forme numérique. Le problème traité ici en est l'illustration.



3) *Montrer que la suite* (a_n) *est décroissante* $(n \geq 2)$*. On pourra commencer par montrer que* $f_{k+1}(a_{k+1}) < f_{k+1}(a_k)$.

On sait que $f_k(a_k) = 1$, et $f_{k+1}(a_k) > 1$ grâce à la question précédente. D'autre part, $f_{k+1}(a_{k+1}) = 1$. Pour $x > 1$, la fonction f_{k+1} est croissante. Puisque $f_{k+1}(a_{k+1}) < f_{k+1}(a_k)$, il en résulte que $a_{k+1} < a_k$. La suite (a_n) est décroissante.

Remarque : la suite étant décroissante et minorée par 1, elle converge et sa limite est ≥ 1.

4) *On pose* $b_n = (a_n)^n$*. Montrer que* $b_n \,.\, \ln b_n = n$.

$b_n \,.\, \ln b_n = (a_n)^n \ln (a_n)^n = n \; (a_n)^n \ln (a_n) = n$ puisque $f_n(a_n) = (a_n)^n \ln (a_n) = 1$.

5) *Montrer que pour tout* $x > 0$ *,* $x - 1 \leq x \ln x$ *. En déduire que* $1 \leq b_n \leq n + 1$.

Pour montrer l'inégalité, prenons la fonction auxiliaire :

$g(x) = x \ln x - x + 1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Sa dérivée est $g'(x) = \ln x$, négative sur]0 1[, nulle en 1, et positive ensuite. La fonction g décroît puis croît. Elle admet un minimum en 1, et g(1) = 0. On en déduit que $g(x) \geq 0$, et $x - 1 \leq x \ln x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Appliquons cette inégalité en faisant $x = b_n$: $b_n - 1 \leq b_n \ln b_n = n$, d'où $b_n \leq n + 1$.
On a vu aussi que $a_n > 1$, d'où $b_n = (a_n)^n > 1$.
Finalement : $1 \leq b_n \leq n + 1$.

6) *Montrer grâce à un encadrement que la suite converge et préciser sa limite.*

Grâce à l'encadrement précédent, $1 \leq (a_n)^n \leq n + 1$. Comme tout est positif, on peut prendre la racine $n^{\text{ème}}$, et l'encadrement est préservé : $1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{n+1}$. On peut écrire :

$\sqrt[n]{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)}$. Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}\ln(n+1)$ équivaut à $\frac{1}{n}\ln n$. On tombe sur la forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$ mais dans ce cas c'est n qui l'emporte sur le logarithme, $\frac{1}{n}\ln(n+1)$ tend vers 0, et l'exponentielle tend vers 1. Avec $1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{n+1}$, le nombre a_n est pris en tenaille entre 1 et une quantité qui tend vers 1, donc a_n tend vers 1.

Exercice 12 : Suites définies par des sommes de termes [6]

A- Série harmonique alternée

On considère la suite (u_n) telle que $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *avec* $n \geq 1$.
On définit les suites extraites $a_n = u_{2n}$ *et* $b_n = u_{2n+1}$.

A1) *Montrer que (a_n) est croissante et que* $a_n \leq 1 - \frac{1}{2n}$*. En déduire que ($a_n$) converge.*

Notons que $a_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = a_1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, etc.

Faisons $a_{n+1} - a_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$. Comme $2n+1 < 2n+2$, on en déduit que $a_{n+1} - a_n > 0$. La suite est croissante.

Montrons par récurrence que $a_n \leq 1 - \frac{1}{2n}$.

- C'est vrai au rang 1 initial : $a_1 = 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}$.
- Supposons l'inégalité vraie à un certain rang n, et montrons qu'elle reste vraie au rang d'après :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \leq 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{2n+2} \quad \text{car} \quad -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < 0$$

La formule est bien vraie au rang n+1.

Croissante et majorée par 1, puisque $a_n \leq 1 - \frac{1}{2n} \leq 1$, la suite converge vers une limite L telle que $L \leq 1$.

A2) *En faisant le lien entre les termes b_n et a_n, montrer que (b_n) converge aussi vers L. Conclure sur le comportement de (u_n) à l'infini.*

On constate que $b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}$. En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{2n+1}$ tend vers 0, et $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L$. Pour ($u_n$), qu'il s'agisse de ses termes de rang pair ou de ceux de rang impair, ils tendent tous vers L. La suite converge vers L.

A3) *Pour connaître L, on est amené à étudier la suite (v_n) telle que :* $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$.
Pour gagner du temps on admettre que pour tout x>0, on a $\frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x}$*. En déduire l'encadrement :* $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq v_n \leq \ln 2$*, et conclure quant au comportement de (v_n) à l'infini.*

---

[6] Cela s'appelle une série, indiquant que l'on prend une succession de termes d'une suite en addition. Ainsi une série est une suite dont le terme de rang n est lui-même la somme des termes (jusqu'au rang n) d'une autre suite. Par exemple, la suite (u_n) définie par :

$u_n = 1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/n$ est la série (dite harmonique) de terme général $1/k$.

Appliquons $\dfrac{1}{1+x} \le \ln(1+x) - \ln x \le \dfrac{1}{x}$ pour $x = n$, n+1 , … , 2n-1 :

$$\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln n \le \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+2} \le \ln(n+2) - \ln(n+1) \le \frac{1}{n+1}$$

....

$$\frac{1}{2n} \le \ln(2n) - \ln(2n-1) \le \frac{1}{2n-1}$$

Par addition membre à membre de ces inégalités, il se produit des simplifications en cascade pour les logarithmes, et il reste :

$$v_n \le \ln 2n - \ln n \le v_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

$$v_n \le \ln 2 \le v_n + \frac{1}{2n}$$

On en déduit que $\ln 2 - \dfrac{1}{2n} \le v_n \le \ln 2$. Lorsque n tend vers l'infini, grâce au théorème du sandwich, v_n tend vers ln2.

A4) *Montrer que $v_1 = a_1$, puis que $v_{n+1} - v_n = a_{n+1} - a_n$. En déduire la valeur de L.*

D'abord on constate que $v_1 = a_1 = 1/2$.

On a vu que $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$.

Calculons

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Comme les deux suites démarrent avec le même nombre, et que le passage d'un terme au suivant est le même pour les deux suites, celles-ci sont les mêmes. On en déduit que $L = \ln 2$.

B- Suite $u_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - ... + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

On prend la série alternée (u_n) telle que $u_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - ... + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ *avec $n \ge 1$. On veut démontrer qu'elle converge vers $\pi/4$.*

B1) *Montrer que pour tout nombre réel t on a :*

$$1 - t^2 + t^4 - ... + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

$1 - t^2 + t^4 - ... + (-1)^n t^{2n} = \dfrac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} = \dfrac{1-(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$, comme somme de termes d'une suite géométrique de raison $-t^2$. On en déduit :

$$1-t^2+t^4-...+(-1)^n t^{2n}-\frac{1}{1+t^2}=\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}=\frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}-1}{1+t^2}=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$ car $(-1)^{n+2} = (-1)^n$.

B2) *Intégrer l'égalité précédente, en déduire que* $|u_n-\frac{\pi}{4}|\le\frac{1}{2n+3}$*, et conclure.*

Intégrons l'égalité précédente entre 0 et 1. Il vient :

$$\left[t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-...+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

$$u_n-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

On sait que 1 / (1+t^2) est la dérivée de la fonction *Arctan*, d'où :

$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=[\mathrm{Arc}\tan 1-\mathrm{Arc}\tan 0]_0^1=\frac{\pi}{4}$, et $\left|u_n-\frac{\pi}{4}\right|=\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$.

D'autre part, $1+t^2 \ge 1$, et $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\le t^{2n+2}$. Par intégration de cette inégalité de 0 à 1, cela donne $\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\le\int_0^1 t^{2n+2}dt=\left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1=\frac{1}{2n+3}$.

Finalement $|u_n-\frac{\pi}{4}|\le\frac{1}{2n+3}$.

Puisque $0\le|u_n-\frac{\pi}{4}|\le\frac{1}{2n+3}$, grâce au théorème du sandwich, $|u_n-\frac{\pi}{4}|$ tend vers 0 lorsque *n* tend vers l'infini, et la suite (u_n) tend vers $\pi/4$.

Exercice 13 : Le nombre d'or, encore

On rappelle que le nombre d'or $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618...$ *est la solution positive de l'équation* $X^2 - X - 1 = 0$ *, l'autre solution étant -* φ*' avec* $\varphi'=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0,618...$ *qui est le deuxième nombre d'or* $(\varphi+\varphi'=1)$.

On veut montrer que le nombre $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+....}}}}$ *tend vers* φ *lorsque l'on répète indéfiniment les racines carrées. Pour cela :*

1) Prendre la suite (u_n) *telle que* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$. *Montrer que* $u_n < \varphi$.

Faisons un raisonnement par récurrence pour montrer que $u_n < \varphi$.

- La formule est vraie au départ : $u_0 = 1 < \varphi$.
- Supposons la formule vraie à un certain rang *n* et montrons que cela reste vrai au rang suivant : $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}<\sqrt{1+\varphi}$ puisque $u_n<\varphi$. D'autre part on a $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, d'où $\varphi+1=\varphi^2$ *et* $\sqrt{\varphi+1}=\varphi$. On a bien $u_{n+1}<\varphi$.

2) *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n = \dfrac{1+u_n - u_n^2}{\sqrt{1+u_n} + u_n} = -\dfrac{(u_n - \varphi)(u_n + \varphi')}{\sqrt{1+u_n} + u_n}$. On a utilisé d'abord la quantité conjuguée de $\sqrt{1+u_n} - u_n$, puis le fait que le trinôme $X^2 - X - 1$ admet comme solutions φ et $-\varphi'$, d'où la factorisation. On sait que $u_n < \varphi$ d'où $u_n - \varphi < 0$. Les autres facteurs étant positifs, on en déduit que : $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est croissante.

***3)** Montrer que la suite (u_n) converge, et conclure.*

Croissante et majorée par φ, la suite converge vers une limite $L \leq \varphi$. Cette limite L vérifie la relation de récurrence (la fonction sous-jacente $f(x) = \sqrt{1+x}$ étant continue), d'où $L = \sqrt{1+L}$, $L^2 = L + 1$, L est solution de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$, et comme elle est positive, elle ne peut être que φ.

Ainsi la suite :

$u_0 = 1 = \sqrt{1}$, $u_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$, $u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, $u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$, etc.

et $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+....}}}}$ tend vers φ.

Exercice 14 : Fonction et suite

Soit f la fonction telle que $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$ sur $D =]1, +\infty[$.

1)a) Vérifier que la fonction f est bien définie sur Df.

Le logarithme existe si et seulement si $x > 0$, a fortiori pour $x > 1$. Avec $x > 1$, $\ln x > 0$, et donc $\neq 0$, la division est toujours possible, et l'exponentielle n'a aucun problème existentiel.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de D.

Lorsque x tend vers 1^+, $\ln x$ tend vers 0, son inverse $1/\ln x$ tend vers $+\infty$, et $f(x)$ tend vers $+\infty$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, son inverse tend vers 0 et $f(x)$ tend vers 1.
La courbe admet deux asymptotes d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

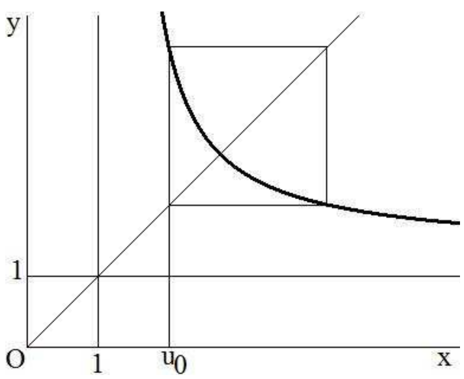
c) Montrer que f est dérivable sur D et calculer f '(x).

Comme mélange de fonctions classiques dérivables, f est dérivable sur D.

$$f'(x) = e^{1/\ln x}\left(-\frac{1}{(\ln x)^2}\right)\frac{1}{x} < 0$$

d) En déduire les variations de f et tracer la courbe représentative.

La fonction est décroissante sur D, d'où la courbe sur le dessin suivant.



2) Montrer que f réalise une bijection de D sur D et déterminer $f \circ f$ puis f^{-1}.

Continue et strictement décroissante sur D, la fonction f réalise une bijection de D sur $]f(1),f(+\infty)[=]+\infty, 1[= D$. Elle admet donc une bijection réciproque elle aussi de D sur D. On constate que

$f(f(x)) = f(e^{1/\ln x}) = e^{\frac{1}{\ln(e^{1/\ln x})}} = e^{\frac{1}{1/\ln x}} = e^{\ln x} = x$ puisque l'exponentielle est l'inverse du logarithme. On en déduit que $f \circ f = Id$, d'où $f^{-1} = f$.

3) Soit a un nombre réel donné, avec a dans D. On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
3a) Déterminer la nature de (u_n).

$u_1 = f(u_0)$, puis $u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) = u_0$. Par récurrence évidente, la suite ne cesse d'osciller sur les deux valeurs u_0 et u_1.

3b) Faire une vérification sur ordinateur grâce au diagramme en toile d'araignée, en prenant par exemple a = 2.

Le diagramme en toile d'araignée est donné sur la figure ci-dessus, et l'on vérifie que la suite oscille indéfiniment sur deux valeurs.

Exercice 15 : Suite avec $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$

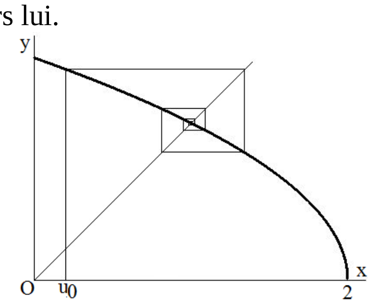
Considérons la suite obéissant à la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$ *avec au départ u_0 compris entre 0 et 2.*

1) Montrer que si $\sqrt{2} < u_0 \le 2$, *alors* $0 \le u_1 \le \sqrt{2}$.

Partons de $\sqrt{2} < u_0 \le 2$. Passons aux opposés : $-\sqrt{2} > -u_0 \le -2$, puis ajoutons 2 :
$2-\sqrt{2} > 2-u_0 \ge 0$. Prenons les racines carrées, la fonction $\sqrt{\ }$ étant croissante, ce qui préserve les inégalités :
$\sqrt{2-\sqrt{2}} > \sqrt{2-u_0} \ge 0$ et comme $\sqrt{2} > \sqrt{2-\sqrt{2}}$, on a finalement :
$\sqrt{2} > u_1 \ge 0$

2) Quitte à décaler la suite d'un cran dans le cas précédent, on suppose désormais que $0 \le u_0 \le \sqrt{2}$. *Visualiser l'évolution de la suite par un diagramme en toile d'araignée. Les questions suivantes vont permettre de prouver ce que le dessin indique.*

Considérons la fonction telle que $f(x) = \sqrt{2-x}$, sous-jacente à la relation de récurrence. Cette fonction est représentée par une demi-parabole de sommet (2, 0) et d'axe Ox avec $x \le 2$. La fonction est décroissante sur [0 2]. Le point d'intersection de la courbe et de la première bissectrice du repère est le point (1, 1). On constate graphiquement que la suite oscille autour de ce point en convegeant vers lui.



3) Montrer que la suite (u_n) existe et que $0 \le u_n \le \sqrt{2}$ *pour tout entier naturel n.*

La suite à un problème d'existence, car s'il arrivait que pout un certain n on tombait sur un < 2, la racine carrée n'existerait plus et la suite non plus.

Démontrons la propriété avec un raisonnement par récurrence.
* u_0 existe et il est bien compris entre 0 et $\sqrt{2}$.
* Supposons que u_n existe et que $0 \le u_n \le \sqrt{2}$ à un certain rang *n*, et montrons qu'il en est de même au rang suivant :

Avec $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$, u_{n+1} existe puisque $2 - u_n \ge 0$. D'aitre part l'encadrement $0 \le u_n \le \sqrt{2}$ se réécrit : $2 \ge 2-u_n \ge 2-\sqrt{2}$, puis $\sqrt{2} \ge u_{n+1} \ge \sqrt{2-\sqrt{2}} \ge 0$, ce qui donne la propriété au rang *n* + 1.

3) *Montrer que si la suite admet une limite, celle-ci est égale à 1.*

La fonction sous-jacente est $f(x) = \sqrt{2-x}$. Si limite il y a pour la suite, il s'agit d'un point fixe de *f*, soit $f(x) = x$., ce qui équivaut à $2 - x = x^2$ et $x \ge 0$. La seule solution positive est $x = 1$ (l'autre étant – 2), correspondant au point d'intersection de la courbe de *f* et de la première bissectrice du repère.

4) Sur l'intervalle I = [0 $\sqrt{2}$ *], montrer que la valeur absolue de la dérivée de f reste inférieure ou égale à un nombre A < 1 à préciser. En déduire que* $|u_{n+1} - 1| \le A\,|u_n - 1|$.

Calculons la dérivée : $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} < 0$, d'où $|f'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$, qui croît (puisque $\sqrt{2-x}$ décroît) lorsque *x* augmente. Sur *I*, la valeur maximale de $|f'(x)|$ est obtenue pour $x = \sqrt{2}$, soit $A = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ de l'ordre de 0,65 < 1. On a bien $|f'(x)| \le A$ sur *I*.

Plaçons-nous dans l'intervalle *I* où $|f'(x)| \le A$. Grâce à l'inégalité des accroissements finis, avec *a* et *b* dans *I*, on a $|f(b) - f(a)| \le A\,|b - a|$. Ici prenons u_n et 1 pour *a* et *b* qui sont bien dans *I*, leurs transformés par f étant u_{n+1} et 1, soit $|u_{n+1} - 1| \le A\,|u_n - 1|$.

Remarque : Il existe une autre méthode. Formons

$$u_{n+1} - 1 = \sqrt{2-u_n} - 1 = \frac{1-u_n}{\sqrt{2-u_n}+1},\ |u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{\sqrt{2-u_n}+1}.$$

Comme $u_n \le \sqrt{2}$, $\sqrt{2-u_n} \ge \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2-u_n}+1} \le \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, et

$|u_{n+1} - 1| \le \dfrac{|u_n - 1|}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}$, avec $A = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1} < 1$ (ce n'est pas le même *A* qu'auparavant).

5) En déduire que la suite (u_n) converge vers 1.

Répétons l'inégalité précédente.
$|u_n - 1| \le A\,|u_{n-1} - 1|$
$|u_{n-1} - 1| \le A\,|u_{n-2} - 1|$
...
$|u_1 - 1| \le A\,|u_0 - 1|$

Comme tout est positif, l'inégalité est préservée en multipliant membre à membre, et il se produit des simplifications en cascade (cela serrait faux si l'un des termes était nul, mais on aurait alors aussitôt $u_n = 1$). Il reste :

$|u_n - 1| \leq A^n |u_0 - 1|$ ou encore $0 \leq |u_n - 1| \leq A^n |u_0 - 1|$. Pris en sandwich entre 0 et une quantité qui tend vers 0 (puisque $A < 1$, $A^n \to 0$) pour n infini, $|u_n - 1|$ tend vers 0, $u_n - 1$ aussi, et u_n tend vers 1.

Exercice 16 : Suite avec $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$

Considérons la suite obéissant à la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$ (n entier naturel) avec au départ u_0 compris entre 0 et 1, plus précisément $0 < u_0 < 1$.

1) Montrer que la suite est bien définie, autrement dit elle existe pour tout n.

Nous allons montrer que u_n existe et que $0 < u_n < 1$ pour tout n. Faisons un raisonnement par récurrence.

- u_0 existe et $0 < u_0 < 1$.
- Supposons la propriété vraie à un certain rang n, et montrons qu'elle reste vraie au rang suivant :

$u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$. Puisque $u_n < 1$, $1 - u_n > 0$, d'où $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n} > 0$.

D'autre part, $1 - u_{n+1} = 1 - \sqrt{1-u_n} = \dfrac{1-1+u_n}{1+\sqrt{1-u_n}} = \dfrac{u_n}{1+\sqrt{1-u_n}} > 0$ grâce à la quantité conjuguée, et $u_{n+1} < 1$.

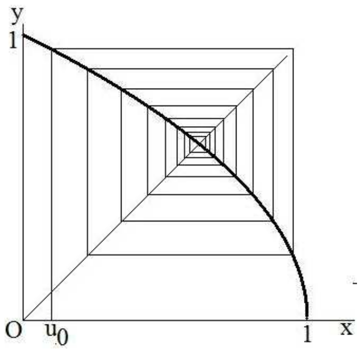
2) Montrer que si la suite admet une limite, celle-ci est égale au nombre d'or $\varphi = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,618$, et que ce nombre est la seule solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, l'autre solution étant $-\varphi' = -(\sqrt{5}+1)/2$. En déduire que $\varphi^2 = 1-\varphi$.

La fonction f sous-jacente à la relation de récurrence vérifie $f(x) = \sqrt{1-x}$. Elle est continue sur l'intervalle [01] ou encore]0 1[. Si limite il y a pour la suite, cette limite est un point fixe de f, vérifiant $f(x) = x$, soit $\sqrt{1-x} = x$, ce qui équivaut à $1 - x = x^2$ avec $x \geq 0$. L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Seule la solution positive convient, et c'est φ. Celle-ci vérifie $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$, soit $\varphi^2 = 1-\varphi$. L'autre solution, négative, est bien $-\varphi'$.

3) Visualiser graphiquement le comportement de la suite, en utilisant la courbe représentative de f telle que $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Le diagramme en colimaçon donnant l'évolution de la suite indique que celle-ci converge, en oscillant, vers φ, où le point (φ, φ) est le point d'intersection de la courbe de f et de la première bissectrice du repère.[7]

[7] On peut vérifier que la pente de la tangente à la courbe vaut $f'(\varphi) = -\varphi'/2$ en φ', de l'ordre de 0,8 en valeur absolue. Mais la zone où $|f'(x)|$ reste inférieure à 1 est petite à droite de φ. Avant de pouvoir appliquer l'inégalité des accroissements finis, comme dans l'exercice précédent, il faudrait prouver que les termes de la suite situés à droite finissent toujours par entrer dans cette petite zone, ce qui complique la démonstration. On doit donc s'y prendre autrement.



4) Montrer que si $\varphi < u_0 < 1$*, alors* $0 < u_1 < \varphi$.

$\varphi < u_0 < 1$ s'écrit aussi $1-\varphi > 1-u_0 > 0$ puis $\sqrt{1-\varphi} > \sqrt{1-u_0} > 0$, soit $\varphi > \sqrt{1-u_0} > 0$ grâce au 2°. Finalement $0 < u_1 < \varphi$.

5) On suppose désormais que $0 < u_0 < \varphi$*, quitte à décaler la suite d'un cran lorsque l'on est dans le cas du 4°. On remarquera aussi que pour* $u_0 = \varphi$*, la suite est constante (*$u_n = \varphi$*). Introduisons la nouvelle suite (*v_n*) obéissant à la relation de récurrence :*

$v_{n+1} = \sqrt{1-\sqrt{1-v_n}}$ *avec* $v_0 = u_0$ *pris dans l'intervalle* $I =]0, \varphi[$*. Autrement dit, on applique deux fois la relation de récurrence de la suite (*u_n*). La suite (*v_n*) est la suite extraite de (*u_n*), celle dont les termes sont pris deux à deux, avec des indices pairs à partir de* $v_0 = u_0$.

Montrer que v_n *appartient à I pour tout n entier naturel.*

Faisons un raisonnement par récurrence.
* On a bien v_0 dans I.
* Supposons que v_n est dans I à un rang n et montrons qu'il en est de même au rang suivant :

Partons de $0 < v_n < \varphi$. En faisant un calcul analogue à celui du 3°, cela équivaut à
$1 > \sqrt{1-v_n} > \varphi$. Continuons :

$$-1 < -\sqrt{1-v_n} < -\varphi$$
$$0 < 1-\sqrt{1-v_n} < 1-\varphi$$
$$0 < \sqrt{1-\sqrt{1-v_n}} < \varphi$$
$$0 < v_{n+1} < \varphi$$

6) Montrer que la suite (v_n*) est croissante.*

Il s'agit de trouver le signe de $v_{n+1} - v_n$.

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{1-\sqrt{1-v_n}} - v_n = \frac{1-\sqrt{1-v_n}-v_n^2}{\sqrt{1-\sqrt{1-v_n}}+v_n}$$ en utilisant la quantité conjuguée.

$v_{n+1} - v_n$ est du signe du numérateur

$$1-\sqrt{1-v_n}-v_n^2 = 1-v_n^2-\sqrt{1-v_n} = \frac{(1-v_n^2)^2-1+v_n}{1-v_n^2+\sqrt{1-v_n}} = \frac{v_n^4-2v_n^2+v_n}{1-v_n^2+\sqrt{1-v_n}}$$ qui est du signe de

$$v_n^4-2v_n^2+v_n = v_n(v_n^3-2v_n+1) = v_n(v_n-1)(v_n-\varphi)(v_n+\varphi')$$

Cette quantité est positive puisque $v_n > 0$, $v_n - 1 < 0$, $v_n - \varphi < 0$ et $v_n + \varphi' > 0$. La suite est bien croissante.

7) Montrer que la suite (v_n) converge et que sa limite est φ. Par un raisonnement calqué sur ce que l'on a fait avec (v_n), on montre de même que la suite extraite (w_n) de la suite (u_n) en prenant ses termes d'indice impair converge aussi vers φ. Cela prouve que la suite (u_n) converge aussi vers φ, et que l'expression $\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-...}}}}$ a pour limite $(\sqrt{5}-1)/2$.

Croissante et majorée par φ, la suite converge et sa limite est au plus égale à φ. La fonction sous-jacente étant continue, cette limite L vérifie la relation de récurrence, soit :

$L=\sqrt{1-\sqrt{1-L}}$, ce qui implique $L^2=1-\sqrt{1-L}$ puis $\sqrt{1-L}=1-L^2$, ce qui entraîne $L^4-2L^2+L=0$ dont les solutions sont 0, 1, φ, – φ'. Seule φ convient, et elle vérifie bien l'équation initiale.

Exercice 17 : Application logistique

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = c\, u_n\, (1 - u_n)$ ou encore $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = c\, x\, (1 – x)$ où le nombre c est donné entre 2 et 4. Une telle fonction est appelée application logistique. On prendra comme condition initiale u_0 dans]0 1[, par exemple u_0 = 0,3, mais la suite a le même comportement quel que soit ce point de départ, sauf cas exceptionnels. On a déjà rencontré cette suite dans certains cas particuliers. On veut maintenant connaître son comportement lorsque c est un nombre pris de 2 à 4.

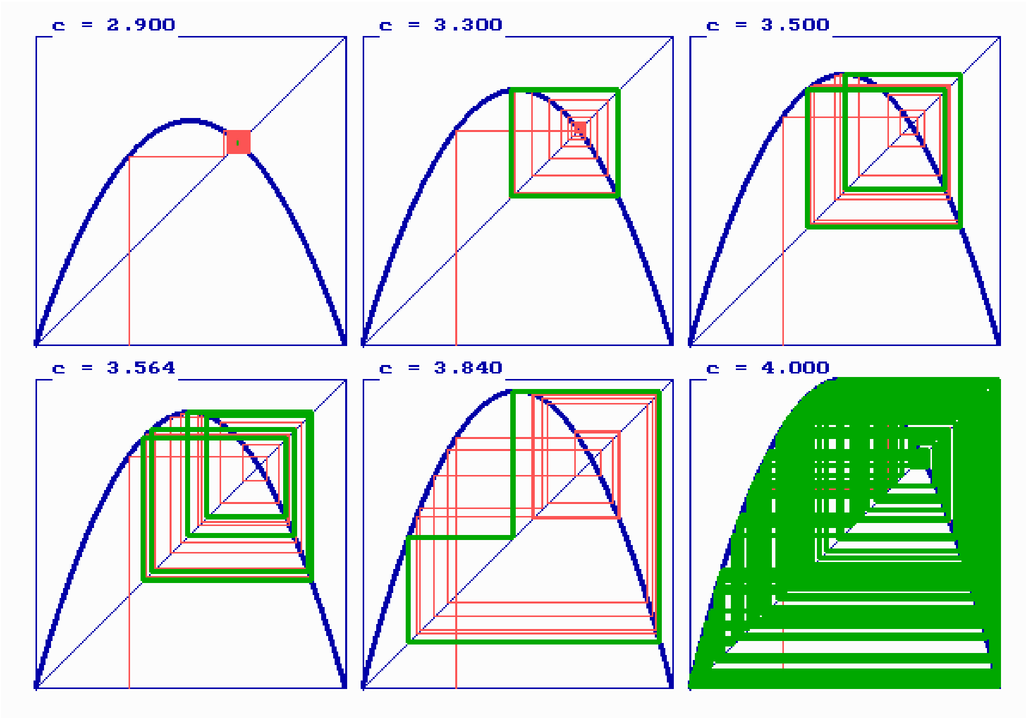
1) *Faire le programme qui permet de visualiser l'évolution de la suite grâce à un diagramme en toile d'araignée. Comme point de départ, on pourra prendre u_0 = 0,3. Traiter les cas où c = 2,9 , c = 3,3 , c = 3, 5 , c = 3,564 , c = 3,840, c = 4. Constater la variété des situations.*

Voici le programme principal :

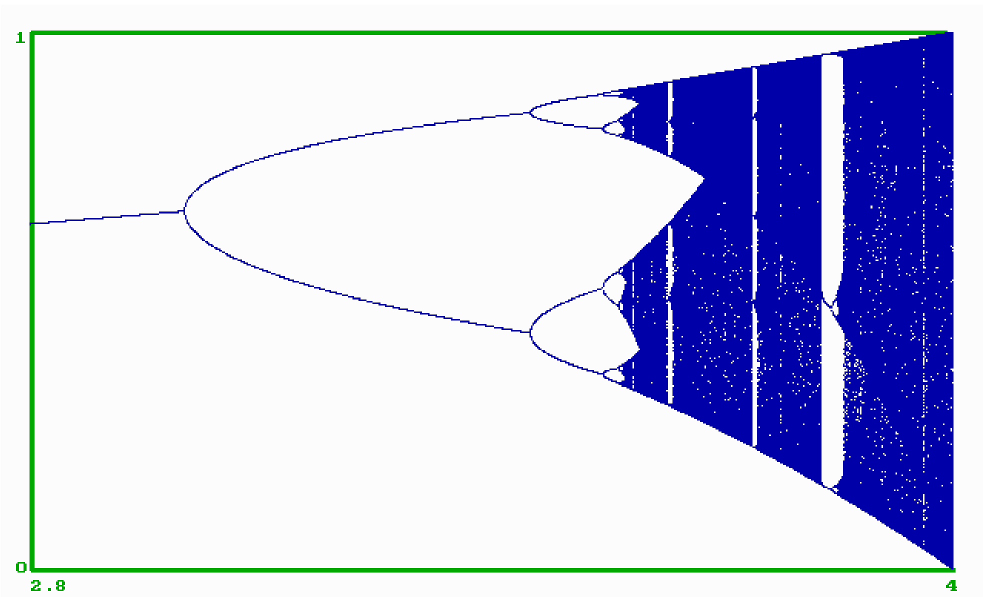
```
Placer les 5 valeurs choisies de c dans un tableau c[6]
for(k=0; k<6; k++)     /* pour chaque valeur de c */
  {
   for(x=0.;x<1.;x+=0.0001)   { y=f(k,x);   dessiner les points x,y  donnant la parabole}
   uo=0.3; u1=f(k,uo); dessiner la ligne verticale de u0 à la parabole
   for(i=0; i<20; i++)           /* diagramme en toile d'araignée */
       {  ligne horizontale de u0,u1 sur la courbe au point u1 u1 sur la bissectrice
         u2=f(k,u1); ligne verticale de u1, u1 à u1, u2 sur la parabole
         uo=u1;u1=u2;
        }
  }
```

Avec l'appoint de la fonction *f* :

```
float f(int k, float x) {return c[k]*x*(1.-x);}
```



2) *Maintenant, pour chaque valeur de c entre 2,8 et 4 (on pourra prendre des valeurs de c distantes de l'une à la suivante de 0,0005), on s'intéresse à chaque fois à la fin de la trajectoire partant de u_0 = 0,3, c'est-à-dire que si l'on fait 2000 itérations, on ne garde que les 500 dernières valeurs de u_n. Et on dessine les points d'abscisse c et d'ordonnée ces 500 valeurs de u_n. Notamment quand la suite converge, par exemple pour c = 2, 9, on n'obtiendra qu'un point d'abscisse 2,9 et d'ordonnée la limite de la suite dans ce cas. (les 500 points sont confondus). Tracer les points obtenus dans ce repère (c, u_n). On trouvera ce genre de résultat :*



On assiste d'abord à ce que l'on appelle un phénomène de bifurcations. La suite converge vers un point pour c entre 2 et 3, elle oscille ensuite sur un cycle de deux points pour c allant de 3 à 3,45 environ, puis elle oscille sur 4 points, puis sur 8 points, etc. A partir d'une certaine valeur de c, elle se met à errer sur une zone continue de points, d'une façon apparemment aléatoire, jusqu'à la forme ultime c = 4 où elle remplit tout l'intervalle]0 1[. Mais entre temps surgissent des fenêtres où l'ordre réapparaît : la suite se remet à osciller sur un nombre limité de valeurs (par exemple pour c = 3,84 elle oscille sur trois points).

La découverte de ces phénomènes, dans les années 1975, a fait sensation. Depuis des millénaires, on s'intéressait surtout à la convergence des suites (comme pour c entre 2 et 3), et voilà que tout d'un coup, pour une suite aussi simple, avec une relation de récurrence du second degré, on assiste à toutes sortes de phénomènes complexes et luxuriants dont certains demeurent toujours énigmatiques. C'est l'expérimentation informatique qui a permis de découvrir ces phénomènes, et la vision mathématique des choses s'en est trouvée nettement infléchie.

```
for(c=2.8;c<4.;c+=0.0005)
  { x=0.3;
    for(i=0; i<2000; i++) { y=c*x*(1.-x); x= y;
                            if (i>1500) dessiner le point  c – 2,8 ,  x
                          }
  }
```

Exercice 18 : Suite convergeant sur un cycle de deux points

*On considère la suite (u_n) avec n ϵ **N**, définie par son terme initial u_0 supposé ≥ 0, et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec* $f(x)=\dfrac{6}{2+x^2}$, *soit* $u_{n+1} = \dfrac{6}{2+u_n^2}$.

1) Etudier la fonction f sur R.

Le dénominateur de $f(x)$ est toujours > 0. N'étant jamais nul, la division est possible, f est définie sur R, continue et dérivable. Elle est manifestement paire. La courbe étant symétrique par rapport à (Oy), la tangente à la courbe en 0 est horizontale, et l'on peut réduire l'intervalle d'étude à R+. La dérivée est :

$f'(x) = -12\,x/(2+x^2)^2 > 0$. La fonction est décroissante sur **R**+. Quand x tend vers +∞, $2 + x^2$ aussi, et $f(x)$ tend vers 0+, (Ox) est une asymptote.

2) Montrer que pour tout n, $u_n \geq 0$.

Faisons un raisonnement par récurrence.

- u_0 est ≥ 0.
- Supposons que u_n est ≥ 0 à un certain rang n, et montrons qu'il en est de même au rang suivant :

$u_{n+1} = 6 / (2 + u_n^2) \geq 0$, tout étant positif.

3) Montrer que la fonction f admet un point fixe unique L et que 1 < L < 2. On devra pour cela étudier la fonction $g(x) = x^3 + 2x - 6$. On rappelle que par définition un point fixe de f est solution de l'équation f(x) = x.

Il s'agit de trouver x tel que $6 / (2 + x^2) = x$, soit $x^3 + 2x - 6 = 0$.

Dérivons $g(x)$: $g'(x) = 3\,x^2 + 2 > 0$. Continue et strictement croissante, la fonction g réalise une bijection de R sur R. Le nombre 0 dans l'ensemble d'arrivée admet un antécédent unique qui est justement L. D'autre part $g(1) = -3$ et $g(2) = 6$. Comme $g(x)$ passe du négatif au positif en traversant L, g(1) = 1 < L et $g(2) = 6 > L$. On a bien $1 < L < 2$.

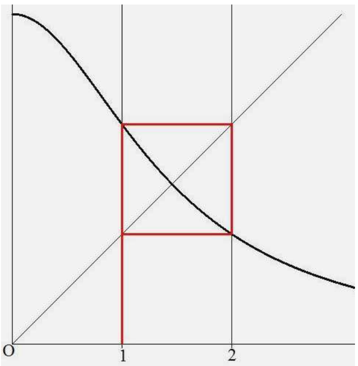
4) Au cas où (u_n) aurait une limite, quelle devrait être cette limite ? Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?

Au cas où la suite (u_n) aurait une limite, ce ne pourrait être que le point fixe unique L.

La suite est constante ssi $u_{n+1} = u_n$ pour tout n, et le calcul du 3° donne $u_n = L$. Il suffit de prendre $u_0 = L$ pour que la suite soit constante.

*5) Quel est le comportement de la suite pour $u_0 = 1$, ou pour $u_0 = 2$? Visualiser graphiquement son comportement en utilisant la courbe représentative de f sur **R+** .*

Pour $u_0 = 1$, on a $u1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, etc. Par récurrence évidente, la suite ne cesse d'osciller sur les valeurs 1 et 2. De même si l'on part de $u_0 = 2$. Ce que confirme le diagramme en toile d'araignée qui visualise l'évolution de la suite.



6) Montrer que si l'on a : $L < u_0 < 2$, alors $1 < u_1 < L$, et que si $u_0 > 2$, alors $u_1 < 1$. Quitte à décaler d'un cran la suite en prenant u_1 à la place de u_0, on peut donc se contente d'étudier la suite pour $0 \le u_0 < L$.

- Supposons que $L < u_0 < 2$, *ou* $2 + L^2 < 2 + u_0^2 < 6$.

$6 / 6 < 6 / (2 + u_0^2) < 6 / (2 + L^2)$. On sait que $L^3 + 2L - 6 = 0$, soit $L (L^2 + 2) = 6$, $L^2 + 2 = 6 / L$. D'où :

$1 < u_1 < L$.

- Supposons que $u_0 > 2$, soit $2 + u_0^2 > 6$, et $u_1 < 1$.

Finalement le comportement de la suite lorsque $u_0 > L$ est le même, à partir de u_1, que celui de la suite pour $0 \le u_0 < L$.

*7) **Dans tout ce qui suit, on supposera que $0 \le u_0 < L$.***
Donner l'expression de $f^2 = f \circ f$ en calculant $f^2(x) = f(f(x))$. En déduire u_{n+2} en fonction de u_n. On trouvera un quotient de polynômes du 4ème degré.

$$f^2(x) = \frac{6}{2 + f(x)^2} = \frac{6}{2 + 36/(2+x^2)^2} = \frac{3}{1 + 18/(x^4 + 4x^2 + 4)} = \frac{3(x^4 + 4x^2 + 4)}{x^4 + 4x^2 + 22}$$
$$= \frac{3x^4 + 12x^2 + 12}{x^4 + 4x^2 + 22}$$

8) On veut déterminer les points fixes de f^2. Vérifier qu'ils sont solutions d'une équation de degré 5, de la forme $P(x) = 0$, où le polynôme P a comme terme de plus haut degré x^5. Pourquoi L, point fixe de f, est-il aussi point fixe de f^2 ? En déduire une factorisation du polynôme P de degré 5 en un polynôme du 3ème degré et un polynôme du 2ème degré, et montrer que f^2 admet deux autres points fixes que l'on précisera.

Il s'agit de résoudre l'équation $f^2(x) = x$, ce qui donne : $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 0$.
Pour $x = L$, on a $f(L) = L$, et $f(f(L) = f(L) = L$. L est solution de l'équation précédente. On peut factoriser le polynôme du 5^{è} degré avec $x^3 + 2x - 6$, l'autre facteur étant du second degré, soit :

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = (x^3 + 2x - 6)(x^2 - 3x + 2)$$

Les deux nouveaux points fixes sont les solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$, soit $x = 1$ et $x = 2$.

9) On considère les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Qu'arrive-t-il à ces deux suites lorsque $u_0 = 1$?

On retrouve le résultat du 5° : $u_0 = u_2 = u_4 = ... = 1$ et $u_1 = u_3 = u_5 = ... = 2$.

10) Montrer que $u_{n+1} - 1$ a le signe contraire de celui de $u_n - 2$, et que $u_{n+1} - 2$ a le signe contraire de celui de $u_n - 1$.

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{6}{2+u_n^2} - 1 = \dfrac{4-u_n^2}{2+u_n^2} = \dfrac{2+u_n}{2+u_n^2}\,(2-u_n)$, et $u_{n+1} - 1$ a le signe contraire de celui de $u_n - 2$.

$u_{n+1} - 2 = \dfrac{6}{2+u_n^2} - 2 = \dfrac{2-2u_n^2}{2+u_n^2} = \dfrac{2(1+u_n)}{2+u_n^2}(1-u_n)$, et $u_{n+1} - 2$ a le signe contraire de celui de $u_n - 1$.

11) Supposer que $0 \le u_0 < 1$, et montrer par récurrence qu'on a $u_{2n} < 1$ et $u_{2n+1} > 2$.

Commençons par (u_{2n}) en faisant un raisonnement par récurrence :

- C'est vrai au départ : $u_0 < 1$
- Supposons que $u_{2n} < 1$ à un certain rang n, et montrons qu'il en est de même pour u_{2n+2} :

Puisque $u_{2n} - 1 < 0$, $u_{2n+1} - 2 > 0$, et $u_{2n+2} - 1 < 0$, grâce au 9°, et $u_{2n+2} < 1$

De même pour (u_{2n+1})

- C'est vrai au départ : Comme $u_0 < 1$, $u_1 > 2$.
- Supposons que $u_{2n+1} > 2$ à un certain rang n, et montrons qu'il en est de même pour u_{2n+3} :

Puisque $u_{2n+1} - 2 < 0$, $u_{2n+2} - 1 > 0$, et $u_{2n+3} - 2 > 0$, et $u_{2n+3} > 2$.

12) Montrer que $u_{n+1} - L$ a le signe contraire de celui de $u_n - L$ en utilisant le fait que L est solution de $g(x) = 0$. En déduire par récurrence qu'avec $1 < u_0 < L$, on a $1 < u_{2n} < L$ et $L < u_{2n+1} < 2$.

$u_{n+1} - L = 6 / (2 + u_n^2) - L = (6 - 2L - L\,u_n^2) / (2 + u_n^2) = (L^3 - L\,u_n^2) / (2 + u_n^2)$

$= \dfrac{L}{2+u_n^2}(L^2 - u_n^2) = \dfrac{L(L+u_n)}{2+u_n^2}(L-u_n)$ qui est du signe contraire de celui de $u_n - L$.

En répétant, $u_{n+2} - L$ est du même signe que $u_n - L$. Appliquons ce résultat aux suites extraites :

Pour (u_{2n}) :

- $1 < u_0 < L$
- Supposons $1 < u_{2n} < L$ à un rang n, et montrons qu'il en est de même pour u_{2n+2} :

on a vu que $u_{2n+2} - 1$ a le même signe que $u_{2n} - 1$, grâce au 10°, et que $u_{2n+2} - L$ a le même signe que $u_{2n} - L$, d'où $1 < u_{2n+2} < L$

Pour (u_{2n+1}) :

- Comme $1 < u_0 < L$, on a grâce aux résultats précédents : $L < u_1 < 2$.
- Supposons $L < u_{2n+1} < 2$ à un rang n, et montrons qu'il en est de même pour u_{2n+3} :

on a vu que $u_{2n+3} - 2$ a le même signe que $u_{2n+1} - 2$, et que $u_{2n+3} - L$ a le même signe que $u_{2n+1} - L$, d'où $L < u_{2n+3} < 2$.

13) Calculer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de u_n . On trouvera un quotient de deux polynômes, plus précisément $-P(u_n)$ au numérateur et un polynôme du 4 ème degré en u_n au dénominateur. En déduire le sens de variations des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) lorsque $0 \le u_0 < 1$, puis lorsque $1 < u_0 < L$. On constatera que dans ces deux cas, ces deux suites sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante.

Utilisons le 7° :

$$u_{n+2} - u_n = \frac{3u_n^4 + 12u_n^2 + 12}{u_n^4 + 4u_n^2 + 22} - u_n = \frac{-u_n^5 + 3u_n^4 - 4u_n^3 + 12u_n^2 - 22u_{n.} + 12}{u_n^4 + 4u_n^2 + 22} = \frac{-P(u_n)}{u_n^4 + 4u_n^2 + 22}\,.$$

Ainsi $u_{n+2} - u_n$ est du signe de $-P(u_n)$.

Etudions le signe de $P(x)$ que l'on a factorisé au 8° :

x	0		1		L		2		$+\infty$
x^3+2x-6		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3x+2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Premier cas : $0 \le u_0 < 1$. On a vu au 10° que $u_{2n} < 1$ *et* $u_{2n+1} > 2$. D'autre part, $u_{2n+2} - u_{2n}$ est du signe de $-P(u_{2n})$, donc positif, et la suite (u_{2n}) est croissante, tandis que $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ est du signe de $-P(u_{2n+1})$, donc négatif, et la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

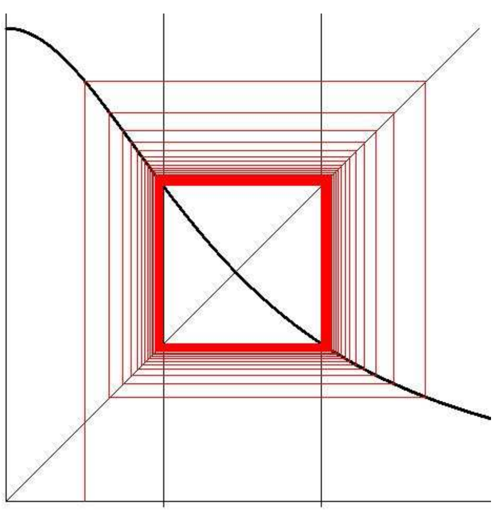
Deuxième cas : $1 < u_0 < L$. Grâce au 11°, on sait que $1 < u_{2n} < L$ *et* $L < u_{2n+1} < 2$.
$u_{2n+2} - u_{2n}$ est du signe de $-P(u_{2n})$, donc négatif, et la suite (u_{2n}) est décroissante, tandis que $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ est du signe de $-P(u_{2n+1})$, donc positif, et la suite (u_{2n+1}) est croissante.

13) Montrer que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et préciser leur limite. Visualiser l'évolution de la suite dans les deux cas de conditions initiales. La suite (u_n) est-elle convergente ?

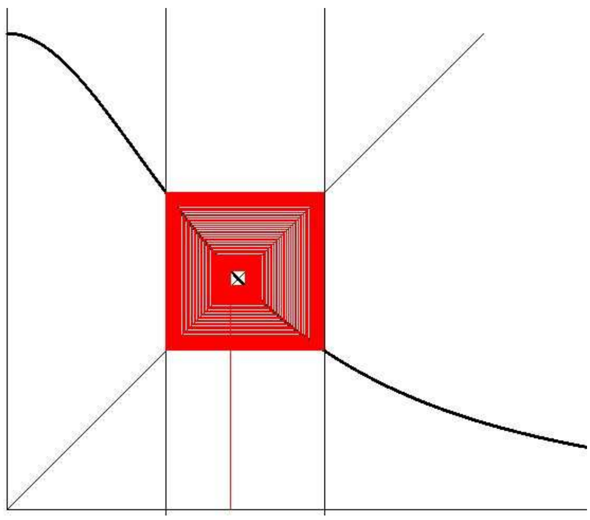
Premier cas : $0 \le u_0 < 1$. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par 1. Elle converge et sa limite L_1 vérifie la relation de récurrence $L_1 = f^2(L_1)$ soit $L_1 = 1$ ou 2, d'où $L_1 = 1$. D'autre part la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 2. Sa limite L_2 vérifie la relation de récurrence, d'où $L_2 = 2$.

Deuxième cas : $1 < u_0 < L$. La suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par 1. Sa limite ne peut être que 1. La suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par 2. Sa limite ne peut être que $L_2 = 2$.

Tout cela est vérifié sur les deux diagrammes en toile d'araignée correspondant aux deux conditions initiales précédentes. Rappelons que pour les autres valeurs de u_0 positives, on a le même comportement asymptotique.



Cas où $0 \le u_0 < 1$



Cas où $1 < u_0 < L$

Exercice 19 : Suite implicite

A) Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^{*+}$ *par* $f(x) = \dfrac{4\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{2}$ *, et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

1) Etudier le comportement de f aux bornes de l'ensemble de définition.

La division est possible puisque $x^2 \neq 0$, ln x existe puisque $x > 0$, $f(x)$ existe bien sur R*+.

Lorsque x tend vers 0+, ln x / x^2 est de la forme $-\infty$ / 0+ = $-\infty$, $f(x)$ tend vers $-\infty$, la courbe C admet comme asymptote l'axe des y. Lorsque x tend vers $+\infty$, ln x / x^2 est de la forme indéterminée $+\infty$ / $+\infty$, mais dans ce cas, on sait que toute puissance de x l'emporte sur le logarithme, ln x / x^2 tend vers 0+, $f(x)$ tend vers – 1/2, la courbe admet la droited'équation $y = -1/2$ comme asymptote, et elle est située au-dessus.

2) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f.

$f'(x) = (4x - 8x \ln x) / x^4 = 4x(1 - 2\ln x) / x^4$. Elle est du signe de $1 - 2 \ln x$, qui s'annule pour $\ln x = 1/2$, ou $x = e^{1/2}$. Quand x va de 0 à $+\infty$, ln x augmente, – ln x diminue, $1 - 2 \ln x$ passe du signe + au signe –.

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
f'(x)		+		–	
f(x)	$-\infty$	↗		↘	- 0,5

La fonction admet un maximum pour $x = e^{1/2}$ et $f(e^{1/2}) = (4 - e)/(2e)$.

3) Tracer la courbe C en précisant la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

La courbe passe par le point (1, – 0,5), et la pente de la tangente vaut $f'(1) = 4$. Voir dessin plus bas.

B) Famille de fonctions et suites implicites

1) Question préliminaire : Montrer que pour tout t dans R+ : $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$ *, et en déduire que pour tout a de R+ :* $a - \dfrac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$.

Sur R+ :

- $1 + t \geq 1$, d'où $1 / (1 + t) \leq 1$.
- $1 - t^2 \leq 1$, $(1 + t)(1 - t) \leq 1$, $1 - t \leq 1 /(1 + t)$.

On a bien l'encadrement demandé.

Intégrons chaque membre de l'encadrement entre 0 et a. Comme les bornes sont dans le sens croissant, les inégalités sont préservées, et l'on a :

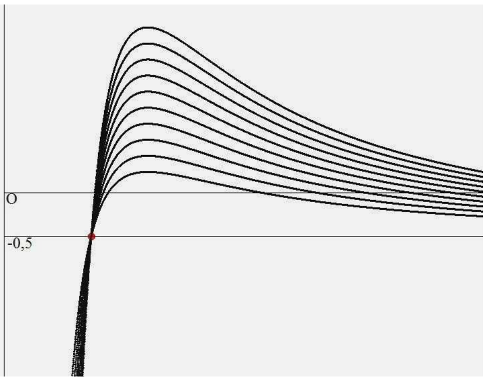
$$\int_0^a (1-t)\, dt \leq \int_0^a 1/(1-t)\, dt \leq \int_0^a dt$$

$$a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$$

2) Pour tout entier $n \geq 4$, ce que l'on supposera désormais, on considère la fonction f_n définie sur ***R*****+ par :* $f_n(x) = \dfrac{n \ln x}{x^2} - \dfrac{1}{2}$ *, et C_n sa courbe représentative.*

a) Etudier les variations de f_n.

$f_n'(x) = n x (1 - 2 \ln x) / x^4$. On retrouve un tableau de variations analogue à celui obtenu pour $n = 4$, la fonction admettant un maximum ($\sqrt{e}, \dfrac{n-e}{2e}$). Le dessin suivant donne les courbes pour n allant de 4 à 13.



b) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ suivant les valeurs de x, et en déduire les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.

On constate que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln x / x^2$, du signe de ln x, soit nul en $x = 1$, négatif entre 0 et 1, et positif pour x supérieur à 1. La courbe C_{n+1} est sous la courbe C_n pour x entre 0 et 1, et au-dessus pour x supérieur à 1. Remarquons que toutes les courbes passent par le point (1, – 1/2).

3) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant :
$1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$.

Utilisons les variations de f_n. Deux situations se présentent :

- x est dans $]0, e^{1/2}]$, où la fonction est strictement croissante et continue. Elle réalise une bijection de $]0, e^{1/2}]$ sur $]f_n(0), f_n(e^{1/2}] =]-\infty, (n-e)/(2e)]$. Le nombre 0, qui est dans l'ensemble d'arrivée, admet un antécédent unique u_n dans l'ensemble de départ, avec $u_n < e^{1/2}$. De plus, avec $f_n(1) = -1/2$ et $f_n(u_n) = 0$, on a aussi $1 < u_n$.

- x est dans $[e^{1/2}, +\infty[$, où la fonction est strictement décroissante et continue. Elle réalise une bijection de $[e^{1/2}, +\infty[$ sur $[f_n(e^{1/2}), f_n(+\infty)] =](n-e)/(2e), -1/2]$. Ici aussi, le nombre 0 admet un antécédent unique v_n dans l'ensemble de départ, d'où $e^{1/2} < v_n$.

L'équation $f_n(x) = 0$ admet bien exactement deux solutions.

4) En utilisant le résultat de la question B-1, montrer que pour tout $n \geq 4$:
$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln u_n \leq u_n - 1.$$

Poson $u_n - 1 = a$ dans la formule du *B*-1, ce qui est valable puisque $u_n - 1 > 0$. On en déduit l'encadrement :

$u_n - 1 - (u_n-1)^2/2 \leq \ln u_n \leq u_n - 1$, ce qui s'écrit aussi :
$$-\frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{2} \leq \ln u_n \leq u_n - 1$$
$$-\frac{(u_n-1)(u_n-3)}{2} \leq \ln u_n \leq u_n - 1$$

5) En déduire que pout tout $n \geq 4$: $\dfrac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)}$. Utiliser pour cela la définition de u_n.

Le nombre u_n vérifie l'équation $f_n(x) = 0$, soit $\frac{n\ln u_n}{u_n^2}-\frac{1}{2}=0$, ou $\ln u_n=\frac{u_n^2}{2n}$. Reprenons l'encadrement du 4° :

- L'inégalité $\ln u_n \le u_n - 1$ devient $\frac{u_n^2}{2n} \le u_n - 1$.
- L'inégalité $\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \le \ln u_n$ devient $u_n - 1 \le \frac{2\ln u_n}{3-u_n}$ car le fait d'avoir $u_n < \sqrt{e}$ implique $3 - u_n > 0$, et : $u_n - 1 \le \frac{u_n{}^2}{n(3-u_n)}$.

On a bien l'encadrement demandé.

6) Montrer que pout tout $n \ge 4$: $\frac{1}{2n} \le u_n - 1 \le \frac{e}{n}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\ge4}$ converge et donner sa limite.

On sait que $1 < u_n$, d'où $1 < u_n{}^2$, et $\frac{1}{2n} < \frac{u_n^2}{2n} \le u_n - 1$.

On sait aussi que $u_n < \sqrt{e}$, soit $u_n{}^2 < e$, et $u_n - 1 \le \frac{u_n{}^2}{n(3-u_n)} < \frac{e}{n(3-u_n)}$. D'autre part, $3 - u_n > 3 - \sqrt{e}$,

$\frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{3-\sqrt{e}} < 1$ et finalement $u_n - 1 < \frac{e}{n(3-u_n)} < \frac{e}{n}$.

On a trouvé l'encadrement demandé.

Lorsque n tend vers l'infini, $u_n - 1$ est encadré par deux nombres qui tendent vers 0, $u_n - 1$ ne peut que tendre vers 0. La suite (u_n) converge vers 1.

7) a) Montrer que $v_4 > e^{5/6}$ puis que pour tout $n \ge 4$: $v_n > e^{5/6}$ (on donne $e^{5/3} < 5{,}3$). En déduire que v_n tend vers $+\infty$ pour n infini.

Le nombre v_4 vérifie $f_4(v_4) = 0$. D'autre part $f_4(e^{5/6}) = 10/(3\,e^{5/3}) - 0{,}5 > 10/(3\times5{,}3) - 0{,}5 > 0$. Comme $e^{5/6} > e^{1/2}$, le nombre $e^{5/6}$, au même titre que v_4, est dans la zone où la fonction f_4 est décroissante. Comme $f_4(v_4) < f_4(e^{5/6})$, et $v_4 > e^{5/6}$.

On a aussi $f_n(v_n) = 0$. Et $f_n(e^{5/6}) = \frac{n\ \ln e^{5/6}}{e^{5/3}} - \frac{1}{2} = \frac{5\,n}{6\,e^{5/3}} - \frac{1}{2} > \frac{5\,n}{31{,}8} - 0{,}5 > 0$ pour $n \ge 4$. Comme $f_n(v_n) < f_n(e^{5/6})$, $v_n > e^{5/6}$.

$f_n(v_n) = 0$ s'écrit $\frac{n\ln v_n}{v_n^2} = \frac{1}{2}$ ou $v_n^2 = 2n\ln v_n$. Avec $v_n > e^{5/6}$, $\ln v_n > 5/6$. On en déduit que : $v_n^2 > \frac{5n}{3}$, $v_n > \sqrt{\frac{5n}{3}}$. Lorsque n tend vers l'infini, v_n est toujours supérieur à une quantité qui tend vers $+\infty$, et v_n ne peut que tendre vers $+\infty$.

b) Autre méthode : montrer que $f_{n+1}(v_n) > 0$ et en déduire que la suite (v_n) est croissante. Puis montrer que v_n tend vers $+\infty$ pour n infini.

Avec $f_n(v_n) = 0$, on a aussi $f_{n+1}(v_n) > 0$ car on a vu que la courbe C_{n+1} est au-dessus de la courbe C_n dans la zone concernée. La fonction f_n étant décroissante, on en déduit que $v_n < v_{n+1}$. La suite (v_n) est croissante.

On sait que $f_n(v_n) = 0$ s'écrit $v_n^2 = 2n \ln v_n$. Si v_n avait une limite L, on devrait avoir L^2 quasiment égal à $2n \ln L$ pour n très grand, ce qui imposerait $L = 1$. Mais v_n est toujours supérieur à $e^{1/2}$, il ne peut pas tendre vers 1. La suite (v_n) n'a pas de limite (finie), et comme elle est croissante, elle tend vers $+\infty$.

Exercice 20 : Une suite où un petite perturbation en provoque des grandes

Considérons la suite (u_n) dont les termes de rang pair obéissent à la relation de récurrence :

$u_{2n} = -(u_{2n-1} + u_{2n-2} + ... + u_{n+1}) + n u_n$, *avec au départ $u_0 = 0$.*

Pour les termes de rang impair, on va seulement envisager deux cas très simples :
(a) Ils sont tous constants.
(b) Ils sont tous égaux à 1 sauf le terme $u_9 = 2$.

Remarquons que le relation de récurrence peut aussi s'écrire $u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n+2} + u_{2n-1} + u_{2n}}{n}$ *, ce qui signifie que chaque terme u_n de la suite est la moyenne des n termes qui le suivent.*

1) Calculer $u_{2n+2} - u_{2n}$. En déduire que la relation de récurrence initialement choisie peut aussi bien s'écrire :

$u_{2n+2} = -u_{2n+1} + (n+2)u_{n+1} - n u_n$

et l'on utilisera cette relation de récurrence dans ce qui suit.

$$u_{2n} = -(u_{2n-1} + u_{2n-2} + ... + u_{n+2} + u_{n+1}) + n u_n$$
$$u_{2n+2} = -(u_{2n+1} + u_{2n} + u_{2n-1} + ... + u_{n+2}) + (n+1)u_{n+1}$$

Par soustraction, après élimination des termes communs (entre les indices $2n - 1$ et $n + 2$), il reste :

$$u_{2n+2} - u_{2n} = -(u_{2n+1} + u_{2n} - u_{n+1}) + (n+1)u_{n+1} - n u_n$$
$$u_{2n+2} - u_{2n} = -u_{2n+1} - u_{2n} + (n+2)u_{n+1} - n u_n$$

On trouve bien que $u_{2n+2} = -u_{2n+1} + (n+2)u_{n+1} - n u_n$.

2) Comment évolue la suite dans le cas (a) où tous les termes de rang impair sont constants, soit $u_{2n+1} = C$. On s'intéressera seulement aux termes de rang ≥ 1.

Après $u_1 = C$, faisons $n = 0$ dans la relation de récurrence : $u_2 = -u_1 + 2u_1 = u_1 = C$. Le calcul donne aussi $u_4 = C$, ce qui nous invite à montrer que la suite est constante à partir du rang 1. Pour cela faisons un raisonnement par récurrence :

- La propriété est vraie au départ : $u_1 = u_2 = C$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $2n$, soit $u_k = C$ pour k de 1 à $2n$, et montrons qu'elle est vraie jusqu'au rang $2n + 2$:

On sait déjà que $u_{2n+1} = C$. Puis avec $u_{2n+2} = -u_{2n+1} + (n+2)u_{n+1} - n u_n$,

$u_{2n+2} = -C + (n+2)C - nC = C$

Ainsi, chaque terme u_{2n+2} dont la relation de récurrence a ses trois termes u_{2n+1}, u_{n+1} et u_n égaux à C, est lui aussi égal à C.

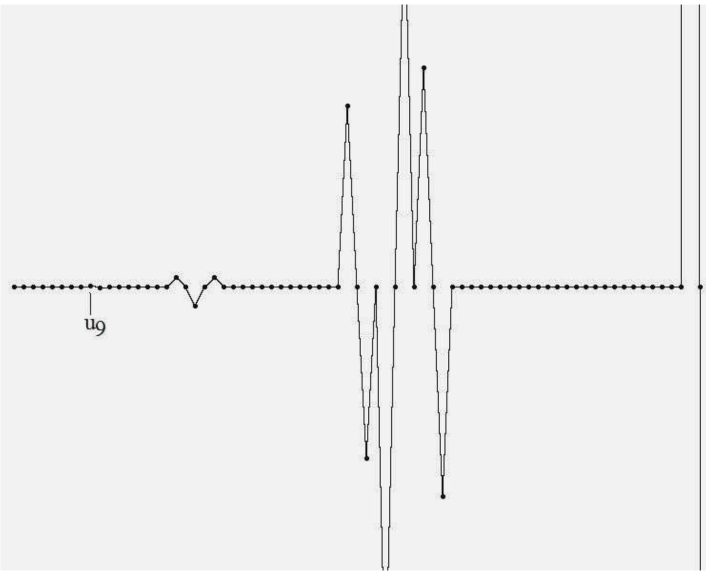
La suite reste bien constante à partir du rang 1.

3) Nous traitons maintenant le cas (b) où tous les termes d'ordre impair restent égaux à 1, sauf un terme, en l'occurence u_9 qui vaut 2. Nous allons voir que cette petite perturbation provoque une évolution surprenante, où des termes montent vers $+\infty$ tandis que d'autres descendent vers $-\infty$, avec des plages intermédiaires de plus en plus longues où les termes restent égaux à 1.

a) Faire une vérification expérimentale de ce phénomène.

Le dessin suivant montre l'évolution de la suite, de u_1 à u_{74} , sous forme de points de coordonnées (n, u_n) avec un zoom 10 fois plus grand en abscisses qu'en ordonnées. C'est le résultat de ce petit programme :

```
u[0]=0;
for(n=0;n<=36;n++)
  {  if (n==4) u[2*n+1]=2; else u[2*n+1]=1;
     u[2*n+2]=-u[2*n+1]+(n+2)*u[n+1]-n*u[n];
     dessiner les points de coordonnées (2n+1, u2n+1) et (2n+2, u2n+2), puis les joindre pour n > 0
  }
```



b) Préciser les valeurs prises par la suite de u_1 à u_{22}.

D'abord, de u_1 jusqu'à u_8, chaque terme reste égal à $u_1 = 1$, comme on l'a vu au 1°. Mais cela s'arrête à u_9, avec la perturbation qui le rend égal à 2. Cela va se répercuter sur tous les termes dont la relation de récurrence contient u_9, et d'abord sur $u_{10} = - u_9 + 6\ u_5 - 4\ u_4 = - 2 + 6 - 4 = 0$. Puis, de u_{11} à u_{17}, tous les termes de rang impair rstent égaux à 1, et ceux de rang pair ne contiennent ni u_9 ni u_{10}, ils ne contiennent que des termes égaux à 1, donc ils restent eux aussi égaux à 1, comme on l'a vu dans le calcul du 1°. Le terme u_{18} est le premier terme à contenir u_9, il vaut $u_{18} = - u_{17} + 10\ u_9 - 8\ u_8 = - 1 + 20 - 8 = 11$. A leur tour, u_{20} et u_{22} sont perturbés par la présence de u_0 ou u_{10}, les termes impairs u_{19} et u_{21} restant à –1 :

$u_{20} = - u_{19} + 11\ u_{10} - 9\ u_9 = - 1 - 18 = - 19$
$u_{22} = - u_{21} + 12\ u_{11} - 10\ u_{10} = - 1 + 12 = 11$

c) Préciser les zones où les termes de la suite restent égaux à 1, et ceux où ils subissent des perturbations.

Comme on l'a vu, le premier terme de rang pair qui est modifié est u_{10}. Le groupe de termes de rang pair qui sont ensuite modifiés est formé de u_{18} (correspondant à n = 8 dans 2n + 2) car il contient u_9, puis u_{20} (n = 9) qui contient u_{10} et u_9, et enfin u_{22} (n = 10) qui contient u_{10}. Soit trois termes de rang pair.

A leur tour, ces trois termes vont perturber les termes suivants qui les contiennent, soit u_{36} (n = 17) et u_{38} (n = 18), qui contiennent tous deux u_{18}, puis u_{40} et u_{42} qui contiennent tous deux u_{20}, et enfin u_{44} et u_{46}, contenant tous deux u_{22}.

La première plage de termes perturbés était formée des termes de rangs 9 et 10, avec un seul terme de rang pair. La deuxième plage perturbée va de u_{18} à u_{22}, soit trois termes de rang pair, la troisième plage perturbée va de u_{36} à u_{46}, soit six termes de rang pair. Pa récurrence évidente, les plages perturbées commencent par u_9, puis par les termes de rang pair : u_{18}, u_{36}, ..., soit $u_{2^k \times 9}$, et le nombre de termes pairs qu'elles contiennent est 1 (u_{10}), 3 (u_{18}, u_{20}, u_{22}), 6 (de u_{36} à u_{46}), puis 12 (de u_{72} à u_{94}), puis 24, 48, etc. Ce nombre est multiplié par deux à chaque étape sauf au départ à cause de la seule perturbation u_9 de rang impair. Dans toutes les autres zones intermédiaires, les termes de la suite restent égaux à 1.

d) On considère une nouvelle suite (v_k) en posant v_1 = u_{18}, v_2 = u_{36}, etc., soit v_k = $u_{2^k \times 9}$ ($k \geq 1$). Calculer v_1, v_2, v_3. Puis établir la relation de récurrence à laquelle obéit la suite (v_k). Enfin montrer que cette suite est croissante et qu'elle tend vers +∞.

Constatons que les termes de la suite (v_k) sont les premiers termes pairs des plages (après la plage initiale 9, 10) où les termes pairs de la suite (u_n) subissentt des perturbations.

$$v_1 = u_{18} = -u_{17} + 10u_9 - 8u_8 = -1 + 2\times 10 - 8 = -9 + 10\times 2 = 11$$
$$v_2 = u_{36} = -u_{35} + 19u_{18} - 17u_{17} = -1 + 19u_{18} - 17 = -18 + 19\times 11 = 191$$
$$v_3 = u_{72} = -u_{71} + 37u_{36} - 35u_{35} = -1 + 37u_{36} - 35 = -36 + 37\times 191 = 7031$$

La suite (v_k) obéit manifestement à la relation de récurrence :

$v_{k+1} = u_{2^{k+1}9} = -2^k \times 9 + (2^k \times 9 + 1)v_k$ avec au départ v_1 = 11.

Formons $v_{k+1} - v_k = -2^k \times 9 + (2^k \times 9 + 1)v_k - v_k = -2^k \times 9 + 2^k \times 9\ v_k = 2^k \times 9\ (v_k - 1)$

Montrons maintenant que $v_k \geq 11$, grâce à un raisonnement par récurrence :

- c'est vrai pour v_1 = 11.
- Supposons que $v_k \geq 11$ à un certain rang k, et montrons que l'on a alors $v_{k+1} \geq 11$:

$$v_{k+1} = -2^k \times 9 + (2^k \times 9 + 1)v_k = 2^k \times 9\ (v_k - 1) + v_k \geq 2^k \times 9 \times 10 + 11 \geq 11$$

Puisque l'on a toujours $v_k \geq 11$, $v_{k+1} - v_k > 0$ et plus précisément $v_{k+1} - v_k \geq 2^k \times 9 \times 10$, la suite est strictement croissante, et même très fortement. Comme la différence entre deux termes successifs fait plus que doubler à chaque étape (à cause de 2^k), la suite (v_k) tend vers +∞.

e) On considère la suite (w_k) avec $k \geq 1$, en posant w_1 = u_{20}, w_2 = u_{40}, et en général $w_k = u_{2^k 10}$. Calculer w_1, w_2, w_3. Puis montrer que cette suite est décroissante et tend vers – ∞.

Remaarquons que ces termes sont tous situés dans les zones perturbées de (u_n).

$$w_1 = u_{20} = -u_{19} + 11u_{10} - 9u_9 = -1 + 0 - 18 = -19$$
$$w_2 = u_{40} = -u_{39} + 21u_{20} - 19u_{19} = -20 + 21w_1 = -419$$
$$w_3 = u_{80} = -u_{79} + 41u_{40} - 39u_{39} = -40 + 41w_2 = -17219$$

La suite obéit à la relation de récurrence : $w_{k+1} = -2^k \times 10 + (2^k \times 10 + 1)\ w_k$

Par récurrence immédiate, tous les termes de la suite sont négatifs. D'autre part :
$w_{k+1} - w_k = -2^k \times 10 + 2^k \times 10\ w_k = -2^k \times 10\ (1 - w_k) < 0$.
La suite est décroissante, et l'on constate que la distance entre deux termes successifs fait plus que doubler à chaque étape. La suite (w_k) tend vers $-\infty$.

Encore des exercices :

On trouvera dans un chapitre suivant de ce cours, *chapitre 15 : Suites avec des moyennes*, d'autres exemples de suites, celles dont la relation de récurrence fait intervenir des moyennes.

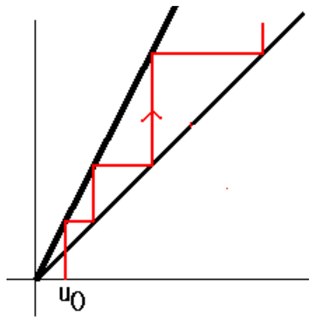
***** Pour aller plus loin sur les suites *****

Stabilité des points fixes

Rappelons que pour une fonction f un point fixe est un nombre x vérifiant $f(x) = x$. Géométriquement, il s'agit de l'abscisse d'un point d'intersection entre la courbe de f et la première bissectrice du repère. Un tel point joue un rôle décisif pour une suite (u_n) obéissant à une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet si à un certain moment u_n tombe sur le point fixe, tous les termes suivants u_{n+1}, u_{n+2}, etc., resteront égaux à u_n, et la suite sera définitivement stationnaire. Mais que se passe-t-il si la suite tombe à proximité du point fixe ? Va-t-elle s'en rapprocher, ou au contraire s'en éloigner, ou encore tourner autour ? Là se pose le problème de la stabilité du point fixe.

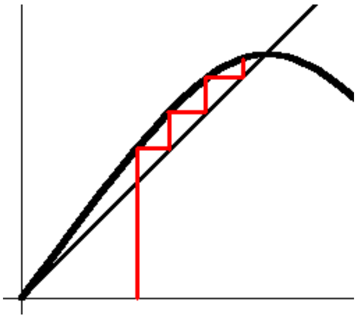
Reprenons deux modèles classiques d'évolution de populations :

1) La croissance exponentielle, par exemple $u_{n+1} = 2\ u_n$, dans ce cas la population double à chaque étape de temps.



La fonction sous-jacente est $f(x) = 2x$, ce qui donne $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction admet un point fixe unique vérifiant $f(x) = x$, et c'est $x = 0$. Le point (0, 0) est le seul point d'intersection entre la première bissectrice et la courbe de f (une droite passant par l'origine). Si la population est nulle au départ, elle restera toujours nulle. Mais le diagramme en toile d'araignée indique que si l'on part de $u_0 > 0$, avec u_0 aussi près soit-il de 0, les termes suivants u_1, u_2,… s'éloignent irrémédiablement du point fixe. On dit que le point fixe 0 est « repousseur » (et instable).

2) La croissance limitée, par exemple $u_{n+1} = 2\ u_n\ (1 - u_n)$ avec u_0 entre 0 et 1.



La fonction sous-jacente est $f(x) = 2\,x\,(1 - x)$, représentée par une parabole. Rappelons qu'à partir de u_0, on a $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) = f^2(u_0)$,... et plus généralement $u_n = f^n(u_0)$. La fonction f admet deux points fixes 0 et 1/2. Si l'on démarre à proximité de 0, on constate que l'on s'éloigne du point fixe 0 : celui-ci est un point repousseur. Mais si l'on part à proximité du point 1/2, on se rapproche irrémédiablement de ce point. On dit alors qu'il s'agit d'un point fixe attracteur. On l'appelle aussi un puits.

D'où les définitions suivantes :

- Si tous les points suffisamment proches d'un point fixe de f sont attirés vers lui, on dit que ce point fixe est attracteur. Autrement dit, si l'on est capable de trouver un voisinage du point fixe tel que tout point x situé dans ce voisinage a ses successeurs $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, etc., qui tendent vers le point fixe, celui-ci est attracteur.

- Si tous les points suffisamment proches d'un point fixe sont repoussés plus loin, on dit que le point fixe est repousseur (on l'appelle aussi source). Ou encore, si l'on est capable de trouver un voisinage du point fixe tel que tout point de ce voisinage (sauf le point fixe lui-même) a ses successeurs qui finissent par sortir du voisinage, ce point fixe est repousseur.

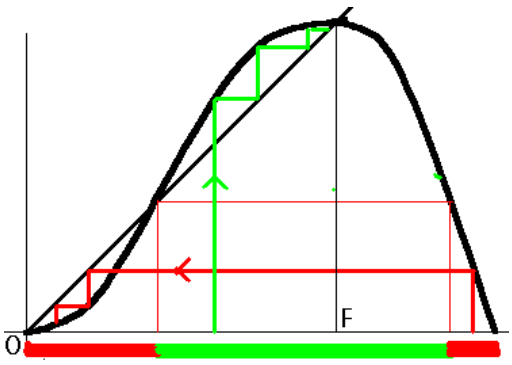
On dispose alors de la propriété suivante :

> Soit une fonction f n'ayant aucun problème de dérivabilité, et admettant un point fixe x_0. Alors :
>
> - si $|f'(x_0)| < 1$, le point fixe est attracteur.
> - si $|f'(x_0)| > 1$, le point fixe est repousseur.

Notamment dans l'exemple précédent de la croissance limitée d'une population, au point fixe 1/2, la courbe admet une tangente de pente nulle, $f'(1/2) = 0$, et l'on a bien un point fixe attracteur.

Il reste un dernier problème, s'il existe un ou plusieurs points attracteurs, à savoir quelles sont les conditions initiales u_0 qui mènent vers l'un des points attracteurs. On sait seulement qu'un point fixe attracteur attire les points qui sont dans un voisinage suffisamment proche de lui, on veut maintenant connaître à partir de quels points u_0 la trajectoire correspondante $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ va finir par se trouver piégée dans ce voisinage du point fixe pour converger vers lui. L'ensemble de ces points de départ u_0 dont la trajectoire est attirée vers un point fixe est appelée le bassin d'attraction du point fixe.

Dans l'exemple précédent de la croissance limitée, on voit que tous les points de départ u_0 qui sont dans l'intervalle ouvert]0 1[ont une trajectoire qui est attirée vers le point fixe 1/2. Le bassin d'attraction de ce point est l'intervalle]0 1[.[8]



Voici un autre exemple où la courbe de f présente la forme indiquée sur le dessin. Il existe trois points fixes, dont deux, à savoir les points O et F, sont attracteurs. On constate expérimentalement, en traçant des diagrammes en toile d'araignée, que le bassin d'attraction du point O est formé de deux intervalles (en rouge) et que celui du point F est l'intervalle colorié en vert.

[8] Cela se démontre aussi, comme on l'a fait dans un exercice précédent.

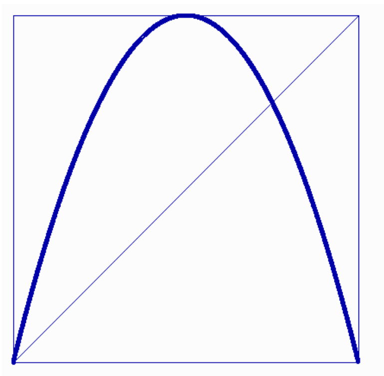
Points périodiques

Un point fixe est tel que $f(x) = x$, ce qui signifie que la suite (avec $u_{n+1} = f(u_n)$) démarrant sur ce point reste définitivement en ce point. Mais il peut aussi arriver que la suite revienne à son point de départ non pas après une mais après plusieurs itérations. On a alors une trajectoire formée de k points sur lesquels elle ne cesse de tourner. Les k points qui forment ce cycle sont appelés points périodiques. Par exemple, on a deux points périodiques x_1 et x_2 formant un cycle lorsque $f(x_1) = x_2$ et $f(x_2) = x_1$, ce qui entraîne $f^2(x_1) = x_1$ et $f^2(x_2) = x_2$.[9] Les points périodiques de période 2 sont aussi des points fixes pour la fonction f^2. De même, f admet k points périodiques $x_1, x_2, \ldots, x_k$ formant un cycle lorsque $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$, …, $f(x_{k-1}) = x_k$ et $f(x_k) = x_1$. Cela signifie aussi que f^k admet un point fixe x_1, sous réserve que k soit le plus petit entier positif tel que $f^k(x_1)= x_1$. Ayant ce point fixe, f^k aura aussi comme point fixe $x_2= f(x_1)$, ainsi que $x_3, \ldots, x_k$.

Remarquons que si l'on résout l'équation $f^k(x) = x$, on trouve éventuellement k points périodiques de f, mais aussi des points périodiques dont la période est un diviseur de k, notamment les points fixes de f (car si l'on a $f(x) = x$, on a aussi $f^k(x) = x$).

Reprenons le cas d'un cycle de deux points périodiques x_1 et x_2. Pour étudier sa stabilité, on est amené à calculer la dérivée de f^2 : $(f^2)'(x) = f'(f(x))\, f'(x)$, ce qui donne : $(f^2)'(x_1) = f'(x_2)\, f'(x_1)$ et de même pour $(f^2)'(x_2)$. On en déduit que la trajectoire cyclique sera un attracteur si $|f'(x_1)\, f'(x_2)| < 1$. Cela se généralise aux cycles de longueur k quelconque, les dérivations s'effectuant aussi en chaîne.

Codage binaire des trajectoires



Prenons l'exemple classique de la suite (u_n) avec $u_{n+1} = f(u_n)$, associée à la fonction $f(x) = 4\,x\,(1 - x)$, avec u_0 dans l'intervalle $I = [0\ 1]$. On a aussi $f(I) = I$, d'où par récurrence évidente, u_n reste dans I quel que soit n. La parabole représentative de f a son sommet en $x = 1/2$ et $y = 1$.

Notons maintenant 0 l'intervalle [0 ,1/2] et par 1 l'intervalle [1/2 , 1]. Prenons la trajectoire d'un point u_0, soit $u_0, u_1, u_2, \ldots$ et codons chaque terme par 0 ou 1 selon qu'il appartient à l'un ou à l'autre des intervalles correspondants. Par exemple, avec $u_0 = 1/3$, on a la trajectoire 1/3, 8/9 , 32/81, etc., dont le codage commence par 0 1 0. Pour chaque point de départ u_0 on obtient ainsi un codage de longueur infinie en binaire. Et ce codage est unique, sauf si la trajectoire tombe sur 1/2, car ce nombre est commun aux deux intervalles. Par exemple, avec u_0 =1/2, on a la trajectoire 1/2,1, 0, 0, 0, …qui s'écrit aussi bien 01000… que 11000…

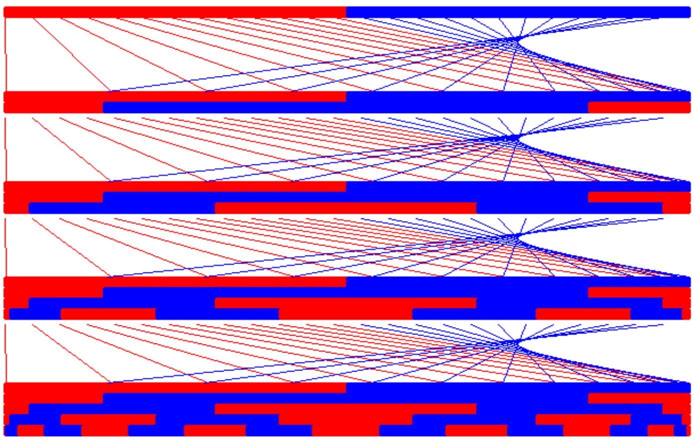
Divisons maintenant l'intervalle I en sous-intervalles que nous allons coder chacun par un nombre fini en binaire. Par définition, chacun de ces sous-intervalles codé par un nombre binaire va contenir tous les points u_0 dont le début de codage est ce nombre binaire lui-même. Au départ, le sous-intervalle noté 0 contient tous les u_0 dont la trajectoire codée commence par 0, c'est [0, 1/2], et le sous-intervalle noté 1 est [1/2, 1]. On vient d'obtenir les deux sous-intervalles codés par un nombre binaire de longueur 1. Puis on passe aux sous-intervalles codés par des nombres de longueur 2, soit 00, 01, 10, 11. Le sous-intervalle 00 contient toutes les trajectoires avec u_0 dans [0, 1/2] et u_1 aussi. Le sous-

[9] Rappelons que $f^2(x) = f(f(x))$, ce qui revient à appliquer successivement f deux fois.

intervalle noté 01 contient toutes les trajectoires avec u_0 dans [0, 1/2] et u_1 dans [1/2, 0]. Ces deux sous-intervalles 00 et 01 sont dans l'intervalle 0 précédemment trouvé. Et l'on fait de même pour les sous-intervalles 11 et 10 qui remplissent à leur tour l'ancien intervalle 1. Puis on prend tous les sous-intervalles codés par des nombres de longueur 3, où chacun des intervalles codés par un nombre de longueur 2 est à son tour subdivisé en deux. Parmi les huit sous-intervalles obtenus, celui qui est noté 010 indique que les trajectoires de tous ses points commencent par 010, c'est-à-dire que leur u_0 est dans [0 ,1/2], u_1 dans [1/2, 1] et u_2 dans [0 1/2].

Il est aisé de comprendre que chaque sous-intervalle codé par le nombre binaire *B* de longueur *n*, est subdivisé en deux sous-intervalles de longueur *n*+1, codés *B*0 et *B*1. A cause de cette multiplication par 2 du nombre des sous-intervalles d'une étape à la suivante, le nombre des sous-intervalles de longueur *n* est aussi le nombre des nombres en binaire de longueur *n*, soit 2^n. D'autre part, les sous-intervalles sont dans l'ordre *B*0 puis *B*1 si *B* contient un nombre pair de 1, et dans l'ordre *B*1 puis *B*0 si *B* contient un nombre impair de 1.

Le dessin ci-dessous, obtenu par un programme simple, permet de visualiser les sous-intervalles codés par des nombres binaires de longueur 1, puis 2, 3, 4 et 5. Par exemple les sous-intervalles de longueur 5 (par leur codage) sont dessinés avec cinq lignes horizontales coloriées. : la couleur rouge signifie 0, la couleur bleue signifie 1, et les codages doivent être lus du haut vers le bas :



longueur 1 : 0 1

longueur 2 : 00 01 11 10

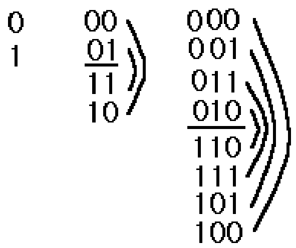
longueur 3 : 000 001 011 010 110 111 101 100

longueur 4 : 0000 0001 0011 0010 0110 0111 0101 0100 etc.

longueur 5

Codage de Gray

Les nombres en binaire de longueur fixée correspondant aux sous-intervalles de l'exemple précédent ne sont pas dans l'ordre naturel. Ils sont dans l'ordre correspondant à ce que l'on appelle un codage de Gray : lorsque l'on passe d'un nombre au suivant, seul un de ses chiffres change. Et la construction se fait par un jeu de miroir inversé, les nombres sont symétriques par rapport à celui du milieu, à condition d'inverser les 0 et les 1, comme on le voit d'ailleurs sur le dessin. Voici comment se construit le codage de Gray :



Pour continuer on prend les huit nombres trouvés, on leur ajoute un 0 devant, puis on fait la symétrie comme auparavant (sur trois chiffres), en ajoutant un 1 devant les huit nouveaux nombres.

Sensibilité aux conditions initiales

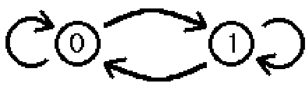
Poursuivons notre étude de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 4\,x\,(1-x)$. Si l'on sait dans quel ordre se succèdent les sous-intervalles codés par k chiffres binaires, on ne connaît pas pour autant leur longueur qui n'est pas la même pour tous. Mais on peut au moins constater que des intervalles symétriques par rapport au milieu de l'intervalle global [0 1] ont la même longueur. On voit aussi par exemple que les sous-intervalles 01 et 11 ont une longueur supérieure aux deux autres 00 et 10, donc ils ont une longueur plus grande que 1/4. Cela a une conséquence importante. Prenons un sous-intervalle codé par le bloc binaire B ayant k chiffres. Plus ce bloc possède de chiffres, plus il est petit. Ce sous-intervalle se divise en 2 sous-intervalles B0 et B1, ou encore en quatre sous-intervalles B00 B01 B11 B10. Prenons un point u_0 dans B01 et un autre u'_0 dans B10. Ces deux points sont tous deux dans le sous-intervalle codé B, et ils peuvent être très proches (d'autant plus que B possède de chiffres en binaire). Le début de la trajectoire de u_0 est codée B01 et celle de u'_0 est B10. Cela veut dire qu'après la $k^{\text{ème}}$ itérations le terme u_k provenant de u_0 se trouve dans l'intervalle codé 01 et l'autre u'_k est dans 10. Ces deux points sont séparés par une distance égale au moins à 1/4. Autrement dit, à partir de points de départ si proches soient-ils, on peut arriver après un certain nombre d'itérations à des points éloignés. Les trajectoires se sont nettement séparées. Cela s'appelle la sensibilité aux conditions initiales. La suite que nous sommes en train d'étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 4\,x\,(1-x)$ en est un exemple particulièrement révélateur. Continuons à l'analyser.

Trajectoires non périodiques et périodiques

La trajectoire à partir d'un point u_0 n'a rien de hasardeux. Il suffit de déterminer dans quels sous-intervalles il se trouve pour connaître son « destin ». On a vu aussi que toute l'évolution de la suite à partir de u_0 correspond à un nombre binaire infini, et que tous les nombres binaires sont ainsi obtenus. On en déduit que toutes les trajectoires sont possibles. Ainsi un nombre binaire quelconque (sans répétition infinie d'un même bloc de chiffres), correspondant à un nombre irrationnel, donne une suite quelconque, qui ne finit jamais par s'enrouler sur un cycle. Il y a donc une infinité (non dénombrable) de trajectoires non périodiques Et il y a aussi une infinité (dénombrable) de trajectoires périodiques.

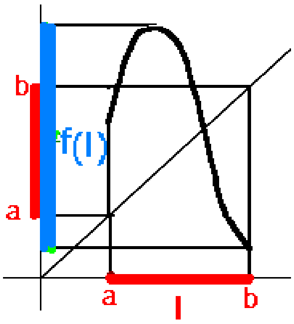
Graphe de transition et point fixe

Enfin il existe un lien avec la théorie des graphes. Dessinons le graphe à deux états 0 et 1 et les flèches de liaison indiquées :



Lorsque l'on circule sur ce graphe en suivant les flèches, et en lisant la succession des états 0 ou 1 obtenus, on fabrique tous les nombres en binaire possibles, c'est-à-dire toutes les trajectoires obéissant à la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On l'appelle le graphe de transition de f. Remarquons que la flèche allant de 0 à 0 indique que l'image f(*intervalle 0*) de l'intervalle 0 contient l'intervalle 0, et que la flèche allant de 0 à 1 indique que f(*intervalle 0*) contient l'intervalle 1 aussi. Il en est de même pour les autres flèches. Cela va avoir des conséquences importantes, si l'on utilise le théorème suivant :

Théorème du point fixe : Considérons une fonction f continue sur un intervalle $I = [a\,,\,b]$, et telle que $f(I)$ contienne I ($I \subseteq f(I)$) alors f possède un point fixe dans I.



Géométriquement, dès que $I \subseteq f(I)$, la courbe de f va obligatoirement traverser la première bissectrice du repère (au moins une fois) entre a et b.

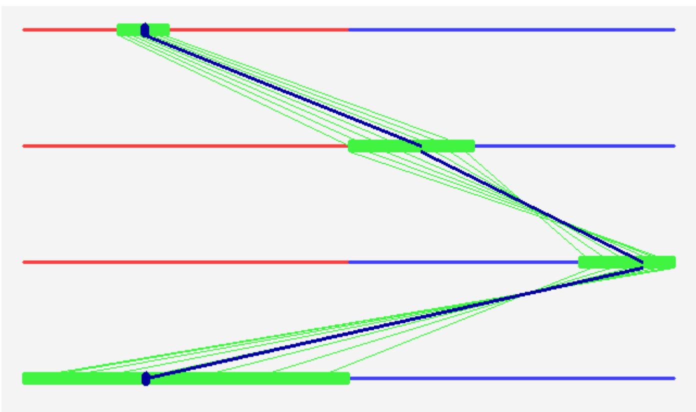
Par contre, si l'on n'a pas $I \subseteq f(I)$ ou si f n'est pas continue, on n'est pas du tout assuré d'avoir un point fixe.

Ce résultat se généralise aux points périodiques. On sait en effet qu'un cycle de k points périodiques pour f correspond à des points fixes pour $f^{\,k}$. Alors si l'on a k intervalles fermés I_1, I_2, …, I_k tels que l'image de chacun par f contient le suivant, et cela de façon cyclique (l'image de I_k contient aussi I_1), soit $I_2 \subseteq f(I_1)$, $I_3 \subseteq f(I_2)$, …, $I_k \subseteq f(I_{k-1})$, $I_1 \subseteq f(I_k)$, il en découle que $I_1 \subseteq f^{\,k}(I_1)$, et aussi $I_2 \subseteq f^{\,k}(I_2)$, etc. Le théorème du point fixe s'applique à $f^{\,k}$, qui admet un point fixe dans I_1, et aussi un point fixe dans I_2, et de même jusqu'à I_k.

Reprenons le graphe de transition de notre fonction f telle que $f(x) = 4\,x\,(1 - x)$. Considérons un sous-intervalle codé par un nombre en binaire ayant le même chiffre au début et à la fin, comme par exemple 0110. Cela signifie qu'un point u_0 de cet intervalle a sa trajectoire qui commence par 0110, ce qui correspond à la circulation $0 \to 1 \to 1 \to 0$ sur le graphe de transition, d'où l'image f(*intervalle 0*) contient l'intervalle 1, f(*intervalle* 1) contient l'intervalle 1, et f(*intervalle* 1) contient l'intervalle 0, ce qui entraîne que $f^{\,3}$(*intervalle* 0) contient l'intervalle 0. Ainsi $f^{\,3}$ admet un point fixe dans l'intervalle 0. Et comme on est parti du sous-intervalle codé 0110, ce point fixe par $f^{\,3}$ est aussi dans ce sous-intervalle.

Ainsi, chaque sous-intervalle codé par un nombre en binaire de longueur k+1, ayant le même chiffre en premier et en dernier, contient un point fixe pour $f^{\,k}$. Il lui correspond un cycle de points périodiques pour f. Cela veut dire que k est une longueur de période mais ce n'est pas forcément la plus petite, celle-ci pouvant être un diviseur de k. Par exemple, le codage 0101 donne une période de longueur 4, mais la plus courte est manifestement 2, et il existe un cycle de deux points périodiques.

Prenons comme exemple le sous-intervalle codé 0110. Il admet un point fixe par $f^{\,3}$, soit trois points périodiques pour f. On peut le vérifier sur le diagramme suivant, où l'on part de l'intervalle codé 0110 inclus dans l'intervalle [0 1] :

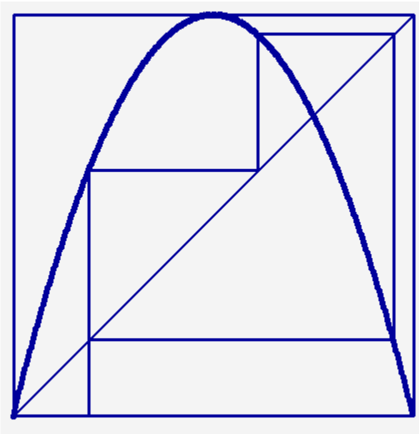


intervalle 0110 en vert, et
point fixe par f^3 en bleu

intervalle 110 = f(0110) en vert

intervalle 10=$f^{\,2}$(0110) en vert

intervalle 0=$f^{\,3}$(0110) en vert



Le cycle de période 3 visualisé par son diagramme en toile d'araignée

Cela a été réalisé par un programme simple, [10] dont la partie essentielle est la suivante :

```
for(x=0;x<1.;x+=pas)
{        /* parmi les  points x sur [0 1] , on garde ceux du sous-intervalle 0110  */
  y=f(x); yy=f(y);yyy=f(yy);
 if(x<0.5 && y>0.5 && yy>0.5 && yyy<0.5)
    {  placer le point d'abscisse x sur une ligne, ce qui donne l'intervalle 0110
       placer le point d'abscisse y sur une ligne en dessous, ce qui donne l'intervalle 110
       placer le point d'abscisse yy sur une ligne en dessous, ce qui donne l'intervalle 10
       placer le point d'abscisse yyy sur une ligne en dessous, ce qui donne l'intervalle 0
      if (fabs(yyy-x)<0.001) xf=x;   /* xf est le point fixe */
     }
 }
```

avec la fonction auxiliaire:

```
double f(double x) {return  ( 4.*x*(1.-x)) ;}
```

Ce que nous avons fait avec le sous-intervalle 0110 se généralise à tout sous-intervalle ayant le même chiffre au début et à la fin. Comme tous les nombres en binaire sont possibles, on peut toujours s'arranger pour avoir un nombre de longueur quelconque, avec le même chiffre au début et à la fin, et sans répétition périodique à l'intérieur. On a ainsi démontré que la fonction f admet des trajectoires périodiques de n'importe quelle période, et en plus on sait comment les construire, comme cela a été fait pour 0110.

Ce que nous venons de faire avec la fonction $f(x) = 4\,x\,(1 - x)$ s'applique à bien d'autres cas. Nous allons en traiter un autre sous forme d'exercice, en manipulant les concepts précédents, pour trouver de nouveaux résultats.

Exercice

Il s'agit de montrer qu'une fonction admettant un cycle de période 3 admet alors des cycles de n'importe quelle période.

1) *Déterminer une fonction f admettant un cycle de 3 points.*

Donnons-nous ces trois points, par exemple les points (1,2), (2,3), (3,1). Il suffit d'imposer que l'ordonnée de chacun soit l'abscisse du suivant, et cela de façon cyclique (l'ordonnée du dernier est aussi l'abscisse du premier). Ensuite on construit une courbe passant par ces trois points. La courbe la plus simple correspond à une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, comme le prouve la méthode

[10] Cela peut aussi être fait manuellement. Dans ce cas, on a intérêt à commencer par la fin. On commence par tracer l'intervalle 0, puis on détermine au-dessus l'intervalle 10, puis en remontant l'intervalle 110, et enfin 0110.

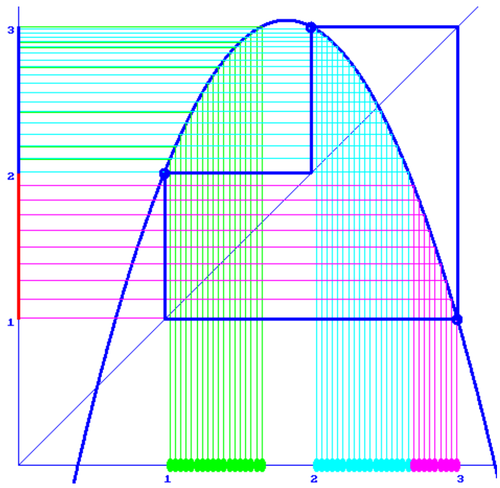
d'interpolation de Lagrange. Pour trouver les coefficients a, b, c, il suffit de résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=1 \end{cases}$$

Pour cela, on utilise la méthode du pivot de Gauss, et l'on a intérêt à commencer par mettre les inconnues dans l'ordre c, b, a. Le calcul donne finalement l'équation d'une parabole :

y = -1,5 x^2 + 5,5 x – 2.

Voici le dessin correspondant de la parabole, avec son cycle de trois points :



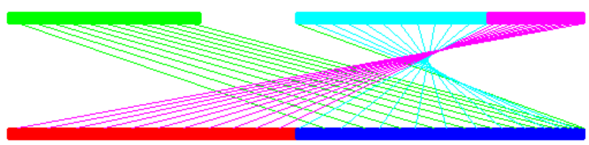
On a aussi colorié en vert les points x de l'axe des x avec x dans [1 2], et tels que $y=f(x)$ est dans [2 3], en bleu pâle les points x dans [2 3] avec y dans [2 3] et en mauve les points x dans [2 3] avec y dans [1 2].

2) *Coder avec un 0 l'intervalle [1 2] et avec un 1 l'intervalle [2 3]. Vérifier que l'image f(intervalle 0) contient l'intervalle 1, et que l'image f(intervalle 1) est égale à l'union des intervalles codés 0 et 1. Puis coder les sous-intervalles ayant un nombre en binaire de longueur 2, 3 et 4.*

On constate en effet que les points u_0 situés dans [1 2] (à savoir l'intervalle codé 0) ont leur successeur $u_1 = f(u_0)$ dans [2 3], et même que certains des points proches de 2 ont leur image en dehors de l'intervalle [1 3]. Pour simplifier, nous ne prendrons pas en compte les points u_0 dont la trajectoire sort de l'intervalle [1 3]. On peut déjà affirmer que dans le codage des trajectoires un 0 est toujours suivi de 1, et qu'il n'y aura jamais de bloc 00. Par contre, un point u_0 dans [2 3] a son successeur u_1 dans l'intervalle [1 2] ou dans l'intervalle [2 3].

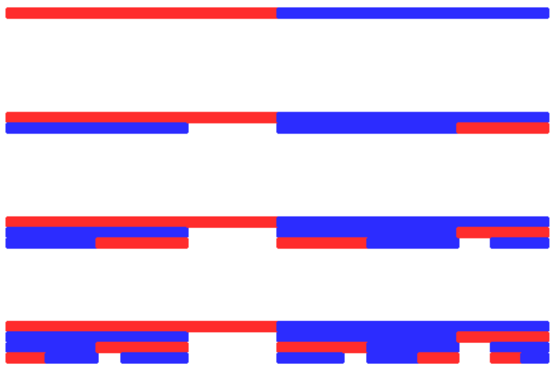
Voici comment construire les sous-intervalles dont le codage binaire a pour longueur 2 : il s'agit de 01 , 11 et 10. Pour avoir 01, on part de la fin, à savoir de 1, et on remonte en allant à gauche pour avoir 01. Pour avoir 11, on part du segment 1, et on remonte à droite pour avoir 11. Enfin, pour avoir 10, on part de 0, et on remonte en allant à droite. D'où le dessin :

01 11 10



0 1

On obtient par programme les sous-intervalles codés par des nombres de longueur 1, 2, 3 et 4. Ici la lecture se fait par bandes de haut en bas (un nombre de longueur 3 est formé de trois bandes), avec 0 en rouge et 1 en bleu, en l'absence d'une bande, cela correspond aux trajectoires qui sortent de l'intervalle [1 3] et l'on n'en tient pas compte.



longueur 1 : 0   1

longueur 2 : 01   11   10

longueur 3 : 011 010 110 111
101

longueur 4 : 0110 0111 0101
1101 1111 1110 1010 1011

***3)** Combien y a-t-il de sous-intervalles codés par un nombre en binaire de longueur k ?*

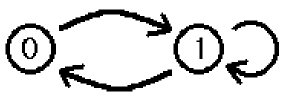
Les nombres en binaire concernés ont la particularité d'avoir tous leurs 0 isolés (pas de bloc 00). Appelons $F(k)$ le nombre de ces nombres en binaire de longueur k. Ces nombres peuvent être divisés en deux catégories :

- Ceux commençant par 01 et suivi d'un nombre de longueur k-2 avec des 0 isolés aussi, d'où $F(k\text{-}2)$ nombres de cette forme.
- Ceux commençant pas 1 et suivi d'un nombre de longueur k-1 avec des 0 isolés, d'où $F(k\text{-}1)$ nombres de cette forme.

Ainsi, $F(k) = F(k\text{-}1) + F(k\text{-}2)$, avec $F(1)=2$, et $F(3)=3$. On retrouve, à un décalage près, la suite de Fibonacci, d'où la succession : 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.

***4)** Montrer qu'à partir du moment où la fonction possède un cycle de longueur 3, elle possède des cycles ayant n'importe quelle longueur de période.*

Le graphe de transition permettant la fabrication des mots en binaire concernés a la forme suivante :



Pour les mêmes raisons que précédemment, on peut toujours trouver un nombre de longueur k+1 commençant et finissant par le même chiffre, et n'ayant pas de blocs répétitifs sur sa longueur k.[11] Le sous-intervalle correspondant possède alors un point donnant lieu à un cycle de longueur k. Par exemple le sous-intervalle 010110 contient un point dont la trajectoire est un cycle de longueur 5. Et cela peut se faire pour n'importe quelle longueur k. Et ce qui vaut pour la fonction f que nous avons prise se généralise à toute fonction possédant un cycle de longueur 3.

[11] Pour compter tous les cycles de longueur k (ou un diviseur de k), il suffit de compter combien il y a de nombres en binaire commençant et finissant par le même chiffre (soit 0 soit 1) et de longueur k+1. En faisant le même raisonnement qu'avant, ces nombres sont de la forme 01…10 ou 1…1, on en trouve finalement $F(k\text{-}1) + F(k\text{-}3)$, dès que $k>3$.