Logarithmes, exponentielles, puissances

A l'origine, les logarithmes ont été conçus pour remplacer les multiplications par des additions, de façon à faciliter les calculs. On doit à J. Neper, dans les années 1600, la réalisation d'une première table de logarithmes, d'où le nom de logarithme népérien qui lui est aujourd'hui associé. Jusqu'à une époque récente -les années 1960-, les règles à calcul étaient basées sur des graduations logarithmiques, avant d'être définitivement supplantées par les calculettes.

La fonction logarithme, $ln\ x$ ou $log(x)$, intervient dans de nombreux domaines. Elle caractérise notamment toutes sortes de phénomènes évolutifs à croissance lente. On utilise aussi un logarithme pour définir un niveau sonore, ou encore pour l'échelle de Richter à propos des séismes. La fonction logarithme comble aussi un vide : on sait que la dérivée de x^n (avec n entier relatif) est nx^{n-1}, mais on n'obtient jamais ainsi $x^{-1} = 1/x$ (pour $n = 0$, la dérivée est 0), ou encore une primitive de x^a est $x^{a+1}/(a+1)$ sauf si $a = -1$). Maintenant c'est la fonction $ln\ x$ qui aura comme dérivée $1/x$, ou encore une primitive de $1/x$ est $ln\ x$.

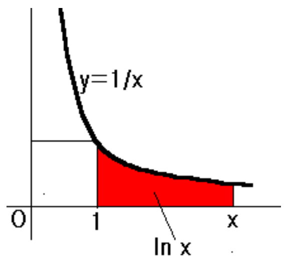
1. La fonction logarithme népérien

1.1. Définition du logarithme népérien par une intégrale (ou une aire)

Plaçons-nous sur l'intervalle ***R****+. La fonction $y = 1/x$ est continue sur cet intervalle. Elle admet des primitives sur ***R****+, et la primitive qui s'annule pour $x = 1$ est $\int_1^x \frac{1}{t}dt$. Par définition, on appelle logarithme népérien (noté *ln*) cette intégrale, soit :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

Si l'on veut, $\ln x$ est représentée par une aire algébrique (ici égale à l'aire géométrique) :



On a déjà plusieurs propriétés du logarithme qui découlent de sa définition :

- la fonction *ln* est définie sur ***R****+ =]0, ∞[
- Elle est dérivable sur ***R****+, et sa dérivée est $(\ln x)' = 1/x$.
- Comme la dérivée est positive, la fonction *ln* est croissante sur ***R****+.
- $\ln 1= 0$.
- Comme la fonction *ln* est croissante, on en déduit le signe de $ln\ x$:
  $ln\ x > 0$ pour $x > 1$, et $\ln x < 0$ sur]0, 1[.

1.2. Propriété fondamentale

Le logarithme transforme un produit en somme, et une puissance en multiplication, soit, avec a et $b > 0$ et n entier :

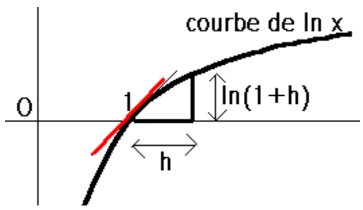
$ln\ (a\ b) = ln\ a + ln\ b$ [1]
$ln\ (a^n) = n\ ln\ a$ [2]
Notamment, $\ln(1/a) = -\ln a$. On a aussi $\ln(a / b) = \ln a - \ln b$.

1.3. Limites

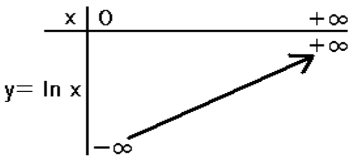
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ [3]

* $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ [4]

* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ [5]



1.4. Courbe représentative



Les résultats précédents donnent le tableau de variations de la fonction *ln*, et la courbe en découle.

La courbe présente deux branches infinies. D'une part, lorsque x tend vers 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$. La courbe admet l'axe des y comme asymptote. D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$, y tend vers $+\infty$. En formant le rapport $ln\ x / x$, on verra qu'il tend vers 0. La courbe admet une branche parabolique de direction Ox.

---

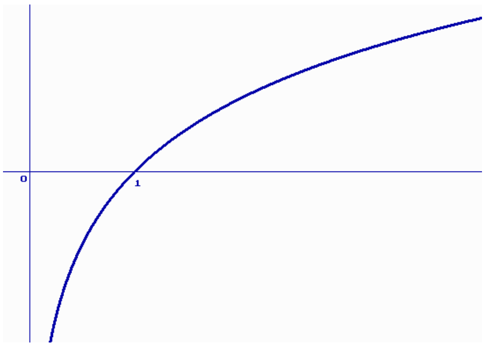
[1] Pour le démontrer, prenons la fonction $y = \ln ax$ sur R*+. Sa dérivée est $a / ax = 1/x$. De même que $\ln x$, c'est une primitive de $1/x$ sur ***R****+. D'où $\ln ax = ln\ x + K$. En faisant $x = 1$, on en déduit $K = a$. D'où $\ln ax = \ln x + \ln a$.

[2] Pour n entier, cette propriété est une conséquence de la précédente.

[3] Prenons x sous la forme 2^n, d'où $\ln 2^n = n \ln 2$. Lorsque n tend vers $+\infty$, cela revient à faire tendre x vers $+\infty$, et $n \ln 2$ tend vers $+\infty$.

[4] Posons $X = 1/x$. Lorsque x tend vers 0+, X tend vers $+\infty$, $\ln x = \ln(1/X) = -\,ln\ X$ qui tend vers $-\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$.

[5] Plaçons-nous au voisinage de 1. Le taux d'accroissement est $\ln x /(x - 1)$. En prenant comme infiniment petit $h = x - 1$, il vaut aussi $\ln(1+h) / h$. En passant à la limite, le taux d'accroissement devient la dérivée de $\ln x$ en 1, soit $1/x$ pour $x = 1$, c'est-à-dire 1.



Courbe du logarithme

1.5. Croissances comparées

Lorsque l'on cherche une limite dans le cadre d'une multiplication entre une puissance de *x* et une puissance de *ln x*, et que l'on tombe sur une forme indéterminée, la puissance de *x* l'emporte sur la puissance du logarithme.

Notamment, prenons $\frac{\ln x}{x}$ lorsque *x* tend vers +∞. On obtient une forme indéterminée ∞/∞. Dans ce cas, c'est *x* qui l'emporte (ou encore *ln x* est négligeable devant *x* au voisinage de +∞) : $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0.

Pour démontrer que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 pour *x* tendant vers +∞, on procède ainsi :

- On commence par démontrer que *ln x* < *x* sur ***R****+. Il suffit pour cela d'étudier la fonction auxiliaire *g*(*x*) = *x* – *ln x*, dont la dérivée est 1 – 1/*x* = (*x* – 1)/*x*. La dérivée est négative ou nulle sur]0, 1] et positive ou nulle sur [1, +∞[. La fonction *g* admet un minimum en *x* = 1 et son minimum vaut *g*(1) = 1. On en déduit que g(*x*) > 0, d'où *ln x* < *x*.
- L'inégalité précédente permet d'écrire : pour *x* > 0, $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$, soit $\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$, ou $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 2$.

Alors $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. Plus précisément on a l'encadrement, dès que *x* est supérieur à 1 : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. Et quand *x* tend vers +∞, $\frac{\ln x}{x}$ est pris en sandwich entre 0 et une quantité qui tend vers 0, et donc tend vers 0.

Les autres cas de limites se déduisent de celui-ci, en procédant à des changements de variables.

Par exemple, prenons *x ln x* lorsque *x* tend vers 0+. Posons *X* = 1/*x*. Quand *x* tend vers 0+, *X* tend vers +∞, et $x\ln x = \frac{1}{X}\ln\frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X}$, et l'on applique le résultat précédent. Finalement *x ln x* tend vers 0. Remarquons que la propriété de croissance comparée s'applique bien : lorsque *x* tend vers 0+, *x* ln *x* est de la forme indéterminée 0.∞. Dans ce cas, c'est *x* qui l'emporte et l'on a bien : $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0^-$.

Passons maintenant au cas général : $\frac{(\ln x)^a}{x^b}$ avec *a* et *b* positifs. Lorsque *x* tend vers +∞, on a une forme indéterminée ∞/∞. Pour montrer que c'est x^b qui l'emporte, on fait :

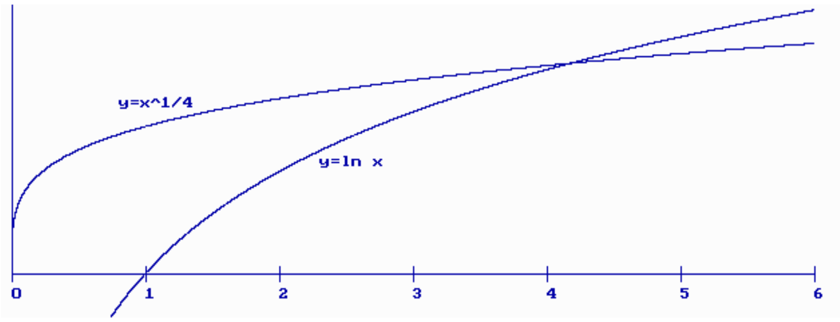
$\frac{(\ln x)^a}{x^b} = \left(\frac{\ln x}{x^{b/a}}\right)^a$, et l'on pose $X = x^{b/a}$, avec *X* qui tend aussi vers +∞

$$= \left(\frac{\ln X^{a/b}}{X} \right)^a = \left(\frac{a}{b} \frac{\ln X}{X} \right)^a.$$ Sachant que $\ln X / X$ tend vers 0, il en est de même de $\frac{(\ln x)^a}{x^b}$.

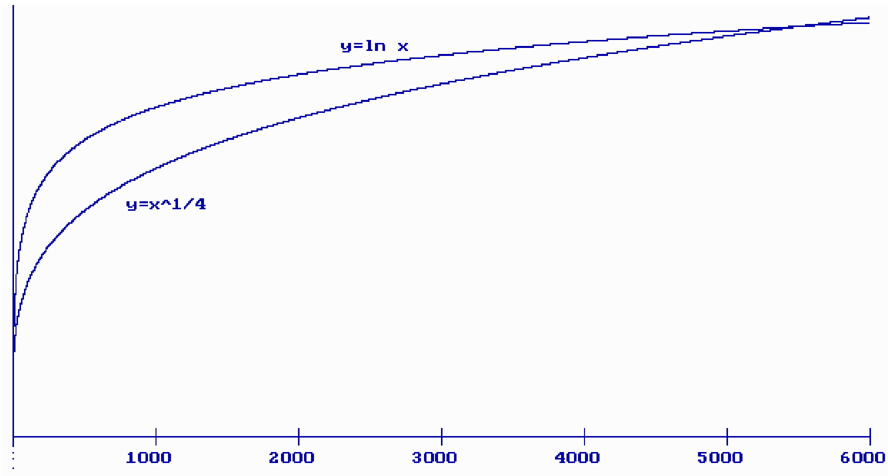
Remarque : Le fait que le logarithme soit négligeable face à une puissance de x à l'infini indique que la fonction logarithme a une croissance très lente. On peut le constater en comparant les deux fonctions qui font l'objet de l'exercicce suivant :

Exercice : Position relative des courbes d'équation y = ln x et $y = x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$ **.**

1) *Tracer sur ordinateur ces deux courbes sur]0, 5]. Constater que la courbe du ln traverse celle de* $y = x^{1/4}$*. Que va-t-il se passer pour de plus grandes valeurs de x ? Le vérifier en traçant les deux courbes sur]0, 6000]. Conclure sur la position relative des deux courbes.*



Avec ce tracé des deux courbes, on a l'impression que la courbe du *ln* monte plus vite que celle de $y = x^{1/4}$, puisqu'elle la dépasse pour x de l'ordre de 4,2. Mais on sait que sa croissance finit par devenir beaucoup plus lente que celle de $y = x^{1/4}$. Il est donc sûr que la courbe de $y = x^{1/4}$ va à nouveau traverser celle de *ln*. On le constate sur le dessin suivant, pour x approximativement égal à 5500. Finalement la courbe de *ln* commence par être au-dessous, puis elle passe au-dessus, et enfin repasse définitivement en dessous.

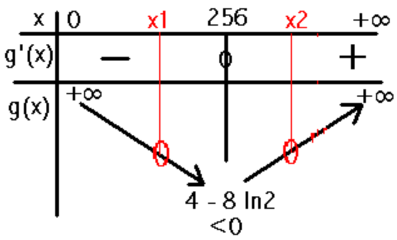


2) *Vérifier cela théoriquement.*

Prenons la fonction auxiliaire $g(x) = x^{1/4} - \ln x$ sur $\boldsymbol{R}^{*}+$. Sa dérivée est :

$g'(x) = \frac{1}{4x^{3/4}} - \frac{1}{x} = \frac{x^{1/4} - 4}{4x}$. Elle s'annule pour $x^{1/4} = 4$, c'est-à-dire $x = 4^4 = 256$.

Comme la fonction $y = x^{1/4}$ est croissante, la dérivée est négative pour $x < 256$, et positive pour $x > 256$. D'où le tableau de variation :



Le minimum m, pour $x = 256$, est négatif. Sur]0, 256], la fonction est continue et décroissante. Elle réalise une bijection de]0, 256] sur [+∞, m]. Le nombre 0, qui est dans l'ensemble d'arrivée, admet un antécédent unique x_1 de l'ordre de 4,2. Il en est de même sur l'intervalle [256, +∞[, dont l'image est [m, +∞[, avec x_2 de l'ordre de 5500 tel que $g(x_2) = 0$. On en conclut que la courbe du *ln* commence par être au-dessous de celle de $y = x^{1/4}$, puis au-dessus, en enfin au-dessous.

1.6. La fonction logarithme, comme bijection de *R**+ dans *R*

Puisque la fonction *ln* est dérivable sur ***R****+, elle est aussi continue. Etant strictement croissante et continue sur *R**+, elle réalise une bijection de ***R****+ =]0, +∞[sur]ln(0), ln(+∞)[=]– ∞, +∞[= ***R***. Ainsi, tout nombre réel (de l'ensemble d'arrivée) admet un antécédent unique dans ***R****+. Notamment 1 a pour antécédent un nombre appelé e, de l'ordre de 2,718 , tel que $\ln e = 1$. [6]

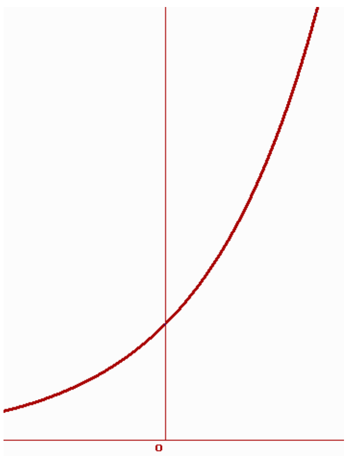
Etant une bijection, la fonction *ln* admet une bijection réciproque, appelée exponentielle, et notée pour le moment $exp(x)$. On l'écrira aussi e^x.

2. La fonction exponentielle

Par définition, la fonction exponentielle est l'inverse du logarithme, soit :

$y = \exp(x)$ avec $x \in \boldsymbol{R}$ équivaut à $x = \ln y$ avec $y \in \boldsymbol{R}^{*+}$

D'où $\ln(\exp(x)) = x$, ce qu'on écrira aussi : $\ln e^x = x$ et aussi $\exp(\ln x) = x$, ou $e^{\ln x} = x$.



La courbe de l'exponentielle

Les propriétés de l'exponentielle découlent de celles du logarithme.

[6] Comme $\ln e = 1$, on dit que *ln* est le logarithme en base e. On définit plus largement un logarithme en base a par $\log_a x = \ln x / \ln a$, et l'on a aussi $\log_a a = 1$. Notamment en base 2, si l'on a $y = 2^n$, alors $\log_2 y = n \log_2 2 = n$.

La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur $\boldsymbol{R}$, avec cette particularité : la dérivée de l'exponentielle est égale à l'exponentielle :

exp(x))' = exp(x) [7]

Elle est croissante, et réalise une bijection de $\boldsymbol{R}$ sur $\boldsymbol{R}$*+. L'exponentielle est partout positive.

On a notamment exp(0) = 1 et exp(1) = e, ce qui conduit à choisir la notation e^{x} au lieu de exp(x) : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$. Les règles des puissances s'appliquent à l'exponentielle :

$e^{a+b} = e^a\, e^b$
$(e^a)^b = e^{ab}$.

Limites :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

La courbe admet une branche parabolique de direction verticale en +∞, et une asymptote horizontale qui est l'axe des x en -∞.

On a aussi :

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (c'est la limite du taux d'accroissement en 0).

- En cas d'indétermination entre une puissance de x et une puissance d'exponentielle en multiplication, c'est toujours l'exponentielle qui l'emporte.

3. Exponentielles généralisées a^{x}

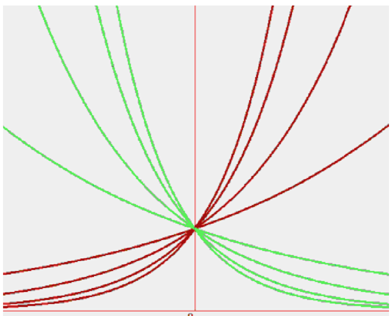
Il s'agit de la fonction a^{x}, où a est une constante. Par définition, puisque $a = e^{\ln a}$,

$a^x = e^{x \ln a}$

D'où la règle : quand on a à étudier une fonction du type a^x on doit aussitôt la remplacer par $e^{x \ln a}$.

Cette fonction n'a de sens que si $a > 0$. Lorsque a est supérieur à 1, ln $a > 0$ et la courbe de $y = a^x$ est croissante, comme pour e^x. Mais si a est strictement compris entre 0 et 1, ln a est négatif, et la courbe est décroissante, comme pour e^{-x}. La dérivée (a^x)' s'obtient en dérivant $e^{x \ln a}$, d'où

$(a^x)' = e^{x \ln a} \ln a$.



En rouge les courbes de $y = 4^x, 3^x, 2^x, \sqrt{2}^{\,x}$
en vert celles de $(1/4)^x, (1/3)^x, (1/2)^x, (1/\sqrt{2})^x$

[7] Pour $y = \exp(x)$ ou $x = \ln y$, on a $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy} = \dfrac{1}{1/y} = y = \exp(x)$

4. Fonctions puissances

Il s'agit de x^a. On connaît déjà cette puissance lorsque a est un entier relatif, ou un nombre rationnel (une fraction d'entiers). Grâce à l'exponentielle et au logarithme, cette fonction puissance va maintenant avoir un sens pour a réel quelconque, puisque par définition :

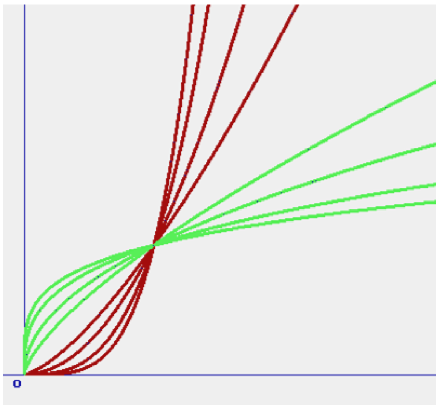
$x^a = e^{a \ln x}$

Quand on a à étudier une fonction du type x^a on aura intérêt à la remplacer aussitôt par $e^{a \ln x}$.

Lorsque a est un nombre réel quelconque, cette fonction n'existe que pour $x > 0$.

Sa dérivée sur $\boldsymbol{R}^*+$ est $(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \dfrac{a}{x} = x^a \dfrac{a}{x} = a\, x^{a-1}$. On retrouve la formule classique de dérivation d'une puissance.

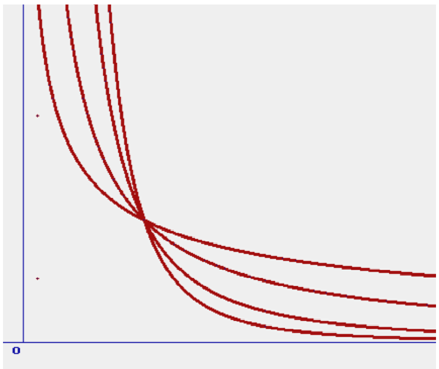
Selon les valeurs de a, la courbe représentative présente l'une des formes suivantes.



Cas ou l'exposant a est positif :

* Lorsque a est supérieur à 1, on retrouve une demi-parabole d'axe vertical pour $y = x^2$, et une forme analogue dans le cas général.

* Lorsque a est entre 0 et 1, on retrouve la demi-parabole d'axe horizontal pour $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$



Cas où l'exposant a est négatif, on retrouve notamment une branche d'hyperbole pour $a = -1$ ($y = 1/x$)

5. Exercices

5.1. Etude de x^x

On considère la fonction telle que $f(x) = x^x$.

1) Donner son ensemble de définition, et étudier cette fonction. Tracer la courbe représentative.

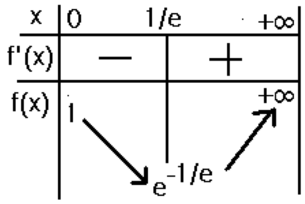
Pour traiter cette fonction de x, le seul moyen est d'écrire $x^x = e^{x\ln x}$. Cette expression existe si et seulement si $x > 0$, à cause du logarithme. D'où l'ensemble de définition $D = \boldsymbol{R}^{*+}$. Comme mélange de fonctions classiques, la fonction est continue et dérivable sur D. La dérivée est :

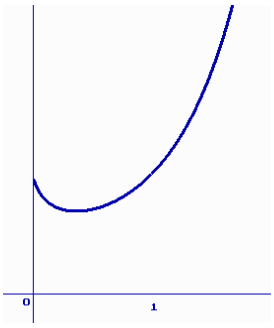
$f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + \frac{x}{x}) = f(x)(\ln x + 1)$. Comme $f(x)$ est toujours positif, à cause de l'exponentielle, la dérivée est du signe de $\ln x + 1$. Elle s'annule pour $\ln x = -1$, soit $x = e^{-1} = 1/e \approx 0{,}37$. Comme $\ln x$ est une fonction croissante, $\ln x + 1$ l'est aussi, elle passe donc du signe moins au signe plus quand x augmente.

On en déduit le tableau de variations, la fonction admet un minimum en $1/e$, et celui-ci vaut $(1/e)^{1/e}=(e^{-1})^{1/e} = e^{-1/e} \approx 0{,}69$.

Lorsque x tend vers 0+, $x \ln x$ prend la forme indéterminée $0 \,.\, \infty$, mais dans ce cas c'est x qui l'emporte, et $x \ln x$ tend vers 0, d'où $y = e^{x\ln x}$ tend vers 1.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $x \ln x$, de la forme $+\infty \,.+\infty$, tend vers $+\infty$, et l'exponentielle aussi. Pour étudier cette branche infinie, formons $\frac{y}{x} = \frac{x^x}{x} = x^{x-1} = e^{(x-1)\ln x}$, on constate que $(x - 1) \ln x$ tend vers $+\infty$, donc y/x tend vers l'infini, ce qui indique que la courbe admet une branche parabolique de direction Oy.





2) *Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 0. En appelant $\underline{f}$ la fonction prolongée, est-elle dérivable en 0 ?*

Prenons comme fonction prolongée $\underline{f}$ telle que $\underline{f}(x) = f(x)$ sur $\boldsymbol{R}^{*+}$, et $\underline{f}(0) = 1$. Cette fonction est maintenant définie sur $\boldsymbol{R}^+$. Comme f admet une limite 1 lorsque x tend vers 0 et qu'on a aussi $\underline{f}(0) = 1$, cette fonction est continue en 0.

Pour étudier la dérivabilité en 0, formons le taux d'accroissement au voisinage de 0, en utilisant le fait que $x \ln x$ tend vers 0 : $\frac{e^{x\ln x} - 1}{x} = \frac{e^{x\ln x} - 1}{x \ln x} \ln x$. On sait que $\frac{e^X - 1}{X}$ tend vers 1 lorsque X tend vers 0, d'où $\frac{e^{x\ln x} - 1}{x \ln x}$ aussi. Comme $\ln x$ tend vers $-\infty$, le taux d'accroissement tend vers $-\infty$. La fonction n'est pas dérivable en 0, mais la courbe admet une tangente verticale en ce point.

5.2. *Etude d'une fonction paire*

Etudier la fonction f telle que $f(x) = x\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

La division est impossible si $e^x = 1$, soit $x = 0$. D'où l'ensemble de définition $\boldsymbol{R}^*$.

Formons $f(-x) = -x\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = -x\dfrac{e^{-x}(1+e^{x})}{e^{-x}(1-e^{x})} = f(x)$. Même si cela ne se voyait pas, la fonction est paire. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des *y*, et on peut réduire l'intervalle d'étude à ***R****+.

Limite en 0 : *f*(*x*) est de la forme indéterminée 0 / 0, mais on a $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}-1}(e^{x}+1)$ et l'on sait que $\dfrac{e^{x}-1}{x}$ tend vers 1 lorsque *x* tend vers 0, *f*(*x*) tend donc vers 2 (on pourrait d'ailleurs prolonger *f* par continuité en 0).

Limite en +∞ : Comme $\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1} \approx \dfrac{e^{x}}{e^{x}} = 1$, *f*(*x*) ≈ *x* tend vers +∞. Pour étudier la branche infinie, formons *f*(*x*) / *x* qui tend vers 1. Enfin :

$f(x) - x = x(\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1} - 1) = x\dfrac{2}{e^{x}-1} \approx \dfrac{2x}{e^{x}}$, dans ce cas d'indétermination ∞/∞, l'exponentielle l'emporte, et *f*(*x*) – *x* tend vers 0. La courbe admet une asymptote oblique qui est la première bissectrice du repère, d'équation *y* = *x*.

Dérivée : $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2xe^{x} - 1}{(e^{x}-1)^{2}}$. Pour connaître son signe, qui est celui du numérateur, prenons la fonction auxiliaire $g(x) = e^{2x} - 2xe^{x} - 1$, dont la dérivée est $g'(x) = 2\,e^{x}\,(e^{x} - x - 1)$. La courbe de l'exponentielle est située au-dessus de sa tangente en *O* d'équation *y* = *x* + 1, d'où la dérivée *g*'(*x*) est toujours positive, et *g* est croissante sur ***R***+ à partir de *g*(0) = 0. A son tour *g* est positive sur ***R****+, et *f* '(*x*) aussi, d'où *f* est croissante sur ***R****+.